B. G. Dragovich, Nonlocal dynamics of p-adic strings, *TMF*, 2010, Volume 164, Number 3, 380–385

https://www.mathnet.ru/eng/tmf6547

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 164, № 3
сентябрь, 2010

Б. Г. Драгович*

НЕЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА p-АДИЧЕСКИХ СТРУН

Рассматривается построение лагранжианов, которые могут быть использованы для описания всего p-адического сектора открытой адельной скалярной струны. Эти лагранжианы строятся с использованием лагранжиана для p-адических струн с произвольным простым числом p. Они содержат пространственно-временную нелокальность за счет наличия даламбертиана в аргументе дзета-функции Римана. Приведен краткий обзор, а также представлены некоторые новые результаты.

Ключевые слова: нелокальная теория поля, p-адические струны, дзета-функция Римана.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время активно исследуется нелокальная теория поля с бесконечным числом производных. Эта теория основывается, главным образом, на теории обыкновенных струн, а также на теории p-адических струн. Теория p-адических струн возникла в 1987 г. [1]. Рассматривались различные виды p-адических струн, но наибольший интерес представляли струны, мировой лист которых является p-адическим, а все остальные свойства описываются вещественными и комплексными числами. Четырехточечные амплитуды рассеяния открытых скалярных обыкновенных и p-адических струн связаны на древесном уровне через их произведение, которое равно константе. В этом произведении обыкновенная и p-адическая струны рассматриваются на равных основаниях (см., например, обзоры [2], [3]). Были также исследованы некоторые другие p-адические структуры, была разработана p-адическая математическая физика (см. недавний обзор [4]).

В отличие от обыкновенных струн, для открытых скалярных p-адических струн существует эффективная нелокальная теория поля с лагранжианом [5], [6], который описывает четырехточечные амплитуды рассеяния и все высшие амплитуды на древесном уровне. Заметим, что этот лагранжиан не содержит p-адических чисел явно, он содержит только простое число p, которое можно рассматривать или как вещественный, или как p-адический параметр. Поскольку этот лагранжиан является простым и точным на древесном уровне, он существенно использовался

*Institute of Physics, Belgrade, Serbia. E-mail: dragovich@ipb.ac.rs

в течение последних десяти лет, при этом исследовались разные аспекты динамики p-адических струн, которые сравнивались с динамикой обыкновенных струн и применялись к нелокальной космологии (см., например, [7]–[11] и приведенную там литературу).

В настоящей работе приведены обзор и некоторые новые результаты, относящиеся к построению лагранжиана с дзета-функцией Римана для всего p-адического сектора открытой скалярной струны. Требование наличия дзета-функции Римана в лагранжиане обусловлено тем фактом, что она присутствует в произведении по p всех четырехточечных амплитуд p-адической скалярной струны. При построении возможных лагранжианов мы начинаем с лагранжиана для отдельной p-адической открытой скалярной струны. Интересный подход к теории поля и космологии, основанный на дзета-функции Римана, был предложен в работе [12].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. p-АДИЧЕСКИЕ ОТКРЫТЫЕ СКАЛЯРНЫЕ СТРУНЫ

Как и теория обыкновенных струн, теория p-адических струн начинается с амплитуд рассеяния. Пусть $v \in V = \{\infty, 2, 3, \dots, p, \dots\}$. Кросс-симметричная амплитуда Венециано для рассеяния двух открытых скалярных струн определяется с помощью бета-функции Гельфанда–Граева–Тейта:

$$A_v(a,b) = g_v^2 \int_{\mathbb{Q}_v} |x|_v^{a-1} |1-x|_v^{b-1}\, d_v x\,, \tag{1}$$

где $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, $a = -\alpha(s) = -s/2 - 1$, $b = -\alpha(t)$ и $c = -\alpha(u)$ – комплекснозначные кинематические переменные, для которых справедливо условие $a+b+c = 1$. Отметим, что переменная x в подынтегральном выражении относится к мировому листу струны: мировые листы обыкновенной и p-адической струн описываются соответственно вещественными и p-адическими числами (см., например, [2], [3] и [13], где приведены основные свойства p-адических чисел и их функции). Таким образом, отличие p-адических струн от обыкновенных обусловлено только рассмотрением p-адического мирового листа. После вычисления интеграла в выражении (1) получаем

$$A_\infty(a,b) = g_\infty^2 \,\frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)}\, \frac{\zeta(1-b)}{\zeta(b)}\, \frac{\zeta(1-c)}{\zeta(c)}\,, \tag{2}$$

$$A_p(a,b) = g_p^2 \,\frac{1-p^{a-1}}{1-p^{-a}}\, \frac{1-p^{b-1}}{1-p^{-b}}\, \frac{1-p^{c-1}}{1-p^{-c}}\,, \tag{3}$$

где ζ – дзета-функция Римана. Выражение (2) соответствует обычному случаю, а (3) – p-адическому.

По определению дзета-функция Римана имеет вид

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\,, \qquad s = \sigma + i\tau, \qquad \sigma > 1, \tag{4}$$

она имеет аналитическое продолжение на всю плоскость комплексных s, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Вычисляя произведение амплитуд p-адических струн (3) по p и используя (4), получаем (см., например, [14])

$$\prod_v A_v(a,b) = \prod_v g_v^2 = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Произведение p-адических амплитуд в выражении (5) расходится [15], однако оно становится сходящимся после подходящей регуляризации. Потребуем, чтобы произведение амплитуд (5) было конечным, откуда следует конечность произведения постоянных взаимодействия, т.е. $g_\infty^2 \prod_p g_p^2 = \mathrm{const}$. Имеются три интересные возможности: 1) $g_p^2 = 1$; 2) $g_p^2 = p^2/(p^2-1)$, что дает $\prod_p g_p^2 = \zeta(2)$; 3) $g_p^2 = |m/n|_p$, где m и n – любые два ненулевых целых числа, что дает $g_\infty^2 \prod_p g_p^2 = |m/n|_\infty \prod_p |m/n|_p = 1$.

Из выражения (5) следует, что обычную амплитуду Венециано, являющуюся специальной функцией, можно выразить как произведение всех обратных p-адических аналогов, являющихся элементарными функциями. Это следствие наличия бета-функций Гельфанда–Граева–Тейта, но не общее свойство струнных амплитуд рассеяния. В общем случае произведение струнных амплитуд является функцией кинематических переменных.

Другая интерпретация выражения (5) связана с адельной струной. Впрочем, адельная струна должна иметь адельный мировой лист. До сих пор не найдена амплитуда рассеяния двух открытых скалярных струн с адельными мировыми листами. Таким образом, концепция адельной струны с адельным мировым листом не так хорошо изучена и оставляет немало вопросов. Однако p-адические струны с p-адическим мировым листом корректно определены, а произведение амплитуд рассеяния полезно при рассмотрении открытых скалярных струн.

На древесном уровне точный лагранжиан эффективного скалярного поля φ, описывающего тахион открытой p-адической струны, имеет вид [5], [6]

$$\mathcal{L}_p = \frac{m^D}{g_p^2}\,\frac{p^2}{p-1}\left[-\frac{1}{2}\,\varphi p^{-\Box/2m^2}\varphi + \frac{1}{p+1}\,\varphi^{p+1}\right], \tag{6}$$

где p – простое число, а $\Box = -\partial_t^2 + \nabla^2$ – D-мерный даламбертиан. Соответствующее уравнение движения для лагранжиана (6) исследовали многие авторы (см., например, [9] и приведенную там литературу).

Теперь построим лагранжианы, которые могут быть использованы для описания всего p-адического сектора открытой скалярной струны. Такой лагранжиан должен, в частности, описывать амплитуду рассеяния для всего p-адического сектора, содержащую дзета-функцию Римана. Следовательно, этот лагранжиан должен содержать дзета-функцию Римана с даламбертианом в аргументе. Таким образом, нам следует искать возможность построения лагранжиана, содержащего дзета-функцию Римана и тесно связанного с p-адическим лагранжианом (6). Существуют аддитивный и мультипликативный подходы, ниже мы будем в основном рассматривать аддитивный подход.

3. АДДИТИВНЫЙ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ПОДХОДЫ

Простое число p в выражении (6) можно заменить на любое натуральное число $n \geqslant 2$, что может дать разумные результаты.

Введем лагранжиан, включающий в себя описанный выше лагранжиан (6), но с заменой p на $n \in \mathbb{N}$. Соответствующая сумма всех лагранжианов $\mathcal{L}_n$ имеет вид

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathcal{L}_n = m^D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{g_n^2} \frac{n^2}{n-1} \left[-\frac{1}{2} \phi n^{-\Box/2m^2} \phi + \frac{1}{n+1} \phi^{n+1} \right]. \tag{7}$$

Конкретный вид данного выражения зависит от выбора коэффициентов C_n и постоянных взаимодействия g_n. Положим

$$\frac{C_n}{g_n^2} \frac{n^2}{n-1} = D_n, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Следующие простые случаи приводят к дзета-функции Римана: $D_n = 1$, $D_n = (-1)^{n-1}$, $D_n = n+1$, $D_n = \mu(n)$, $D_n = -\mu(n)(n+1)$, $D_n = (-1)^{n-1}(n+1)$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

Случай $D_n = 1$ рассматривался в работах [16], [17], а случай $D_n = n+1$ исследовался в работе [18].

Варианты лагранжианов с функцией Мёбиуса $\mu(n)$ описаны в работах [19], [20]. Напомним, что ее явное определение имеет вид

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & n = p^2 m, \\ (-1)^k, & n = p_1 p_2 \dots p_k, \quad p_i \neq p_j, \\ 1, & n = 1 \quad (k = 0), \end{cases} \tag{8}$$

и она связана с функцией, обратной дзета-функции Римана, соотношением

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + i\tau, \qquad \sigma > 1. \tag{9}$$

Соответствующий лагранжиан для $D_n = \mu(n)$ имеет вид

$$L = m^D \left[-\frac{1}{2} \phi \frac{1}{\zeta(\Box/2m^2)} \phi + \int_0^{\phi} \mathcal{M}(\phi)\, d\phi \right], \tag{10}$$

где $\mathcal{M}(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \phi^n = \phi - \phi^2 - \phi^3 - \phi^5 + \phi^6 - \phi^7 + \phi^{10} - \phi^{11} - \cdots$.

Для $D_n = -\mu(n)(n+1)$ лагранжиан имеет вид

$$L = m^D \left\{ \frac{1}{2} \phi \left[\frac{1}{\zeta(\Box/2m^2 - 1)} + \frac{1}{\zeta(\Box/2m^2)} \right] \phi - \phi^2 F(\phi) \right\}, \tag{11}$$

где $F(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \phi^{n-1} = 1 - \phi - \phi^2 - \phi^4 + \cdots$.

Случай $D_n = (-1)^{n-1}(n+1)$ был недавно рассмотрен в работе [14]. Напомним, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s), \qquad s = \sigma + i\tau, \qquad \sigma > 0, \tag{12}$$

что имеет аналитическое продолжение на всю плоскость комплексных s без особенностей, т.е. аналитическое разложение имеет вид [21]

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(k+1)^{-s}. \tag{13}$$

В точке $s=1$ имеем

$$\lim_{s\to 1}(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2.$$

С учетом (12) и используя аналитическое продолжение, получаем из (7)

$$\begin{aligned} L=-\,m^D\Big\{\frac{1}{2}\,\phi\Big[\big(1-2^{2-\Box/2m^2}\big)\zeta\Big(\frac{\Box}{2m^2}-1\Big)+\\ +\big(1-2^{1-\Box/2m^2}\big)\zeta\Big(\frac{\Box}{2m^2}\Big)\Big]\phi-\frac{\phi^2}{1+\phi}\Big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим случай $D_n=(-1)^{n-1}$. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L=m^D\Big[-\frac{1}{2}\,\phi\big(1-2^{1-\Box/2m^2}\big)\zeta\Big(\frac{\Box}{2m^2}\Big)\phi+\phi-\frac{1}{2}\log(1+\phi)^2\Big]. \tag{15}$$

Потенциал равен

$$V(\phi)=-L(\Box=0)=m^D\Big[\frac{1}{4}\,\phi^2-\phi+\frac{1}{2}\log(1+\phi)^2\Big] \tag{16}$$

и имеет один локальный максимум $V(0)=0$ и один локальный минимум в точке $\phi=1$. Этот потенциал имеет особенность в точке $\phi=-1$, т.е. $V(-1)=-\infty$, и $V(\pm\infty)=+\infty$. Уравнение движения имеет вид

$$\big(1-2^{1-\Box/2m^2}\big)\zeta\Big(\frac{\Box}{2m^2}\Big)\phi=\frac{\phi}{1+\phi}. \tag{17}$$

Это уравнение имеет два тривиальных решения: $\phi=0$ и $\phi=1$.

Дзета-функция Римана, возникающая в мультипликативном подходе, дается в виде произведения (4). Исходным является p-адический лагранжиан (6), в котором $g_p^2=p^2/(p^2-1)$. Лагранжиан, полученный в рамках этого подхода, аналогичен лагранжиану (11). Эти два лагранжиана описывают одну и ту же теорию поля в приближении слабых полей.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущем разделе мы представили некоторые лагранжианы, которые могут быть использованы для описания p-адического сектора открытых скалярных струн. Они содержат дзета-функцию Римана и являются также отправными точками для интересных примеров так называемой дзета-теории поля. Соответствующие потенциалы, равные $V(\phi)=-L(\Box=0)$, а также уравнения движения рассматриваются в приведенных ссылках. Все эти модели дзета-теории поля содержат тахионы.

Из приведенных выше лагранжианов наиболее интересны лагранжианы (14) и (15). В отличие от других лагранжианов, эти лагранжианы не имеют особенностей по даламбертиану $\Box$, и для них легче использовать псевдодифференциальное описание. Аналитичность лагранжиана может оказаться полезной в приложении к нелокальной космологии, в частности при использовании процедуры линеаризации (см., например, [22] и приведенную там литературу).

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства развития науки и технологии Сербии в рамках контракта № 144032D. Автор благодарит организаторов Международной конференции "Проблемы теоретической и математической физики" (21–27 августа 2009 г., Москва–Дубна, Россия) за очень приятные и полезные научные встречи.

Список литературы

[1] И. В. Волович, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340.
[2] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
[3] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
[4] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17, arXiv: `0904.4205`.
[5] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.
[6] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077–3079.
[7] D. Ghoshal, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **584**:1–2 (2000), 300–312, arXiv: `hep-th/0003278`.
[8] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034, 39 pp., arXiv: `hep-th/0207107`.
[9] V. S. Vladimirov, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 79–87.
[10] I. Ya. Aref'eva, "Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy", *p-Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Zoran Rakić, I. V. Volovich, AIP, New York, 2006, 301–311, arXiv: `astro-ph/0410443`.
[11] N. Barnaby, T. Biswas, J. M. Cline, *JHEP*, **04** (2007), 056, 35 pp., arXiv: `hep-th/0612230`.
[12] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **4**:5 (2007), 881–895, arXiv: `hep-th/0701284`.
[13] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Наука, М., 1966.
[14] Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 449–455, arXiv: `0911.3625`.
[15] I. Ya. Aref'eva, B. Dragović, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 445–450.
[16] B. Dragovich, *Zeta strings*, arXiv: `hep-th/0703008`.
[17] Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 364–372, arXiv: `0804.4114`.
[18] B. Dragovich, "Some Lagrangians with zeta function nonlocality", *Problems of Modern Theoretical Physics*, a volume in honour of Prof. I. L. Buchbinder on the occasion of his 60th birthday (Tomsk, Russia, 2008), Tomsk State Pedagogical Univ., 146–153, arXiv: `0805.0403`.
[19] B. Dragovich, *Romanian J. Phys.*, **53**:9–10 (2008), 1105–1110, arXiv: `0809.1601`.
[20] B. Dragovich, *Fortschr. Phys.*, **57**:5–7 (2009), 546–551, arXiv: `0902.0295`.
[21] J. Sondow, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**:2 (1994), 421–424.
[22] A. S. Koshelev, *SFT non-locality in cosmology: solutions, perturbations and observational evidences*, arXiv: `0912.5457`.