вательных (D, γ)-системах. Пусть требуется проверить две простые гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против H_1: $\theta = \theta_1$. Предположим, имеются две (D, γ)-системы $D_n^0 = D_n^0(x^n)$, $D_n^1 = D_n^1(x^n)$ с коэффициентами доверия соответственно γ_0, γ_1.

Введем следующий критерий, который назовем (D^0, D^1)-к р и т е р и е м. Наблюдения продолжаются до тех пор, пока одновременно выполняются условия: а) $\theta_0 \in D_n^0$, б) $\theta_1 \in D_n^1$, и останавливаются при первом нарушении хотя бы одного из них. Соответствующий момент остановки обозначим ν. Предположим, что $P_\theta(\nu < \infty) = 1$, $\theta \in \Theta$. В момент остановки возможны три ситуации:

1) нарушается условие а); в этом случае принимается гипотеза H_1;

2) нарушается условие б); в этом случае принимается H_0;

3) одновременно нарушаются оба условия а), б); в этом случае решение принимается произвольным образом (например, всегда принимается H_0).

Из (1) следует, что сформулированный критерий имеет риски первого и второго рода $\alpha \leqslant 1 - \gamma_0$, $\beta \leqslant 1 - \gamma_1$. Критерий Вальда является частным случаем (D^0, D^1)-критерия, если первая (D, γ)-система строится на основе (4), (5), (7), где отображение $\varphi(\theta)$ выбирается так, чтобы $\varphi(\theta_0) = \theta_1$, а вторая (D, γ)-система также строится на основе (4), (5), (7), где отображение $\varphi(\theta)$ выбирается так, чтобы $\varphi(\theta_1) = \theta_0$ (подробнее см. [5]). Указанный факт характеризует общность и эффективность подхода, основанного на последовательных доверительных множествах.

В общем случае вопрос об эффективности и оптимальных свойствах предлагаемой последовательной процедуры остается в значительной степени неясным. Тем не менее данный подход является довольно общим и позволяет решать большое число задач на построение доверительных множеств и проверку гипотез для характеристик систем массового обслуживания, многократно цензурированных выборок, характеристик сложных систем по результатам испытаний и др.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neyman J.* – Ann. Math. Statist., 1935, vol. 6, p. 111–116. 2. *Большев Л.Н.* – Теор. вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, № 1, с. 187–191. 3. *Беляев Ю.К.* – ДАН, 1966, т. 169, № 4, с. 755–758. 4. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960. 5. *Павлов И.В.* – Изв. АН СССР. Технич. кибернет., 1982, № 3, с. 80–87.

УДК 517.957 МАТЕМАТИКА

Академик А.В. ПОГОРЕЛОВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Целью настоящей статьи является изучение задачи Дирихле для уравнения

(1) $$\theta(z_1, z_2, \ldots, z_n, z, x_1, x_2, \ldots, x_n) \det(z_{ij}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где θ и φ – непрерывные положительные функции.

Выпуклая функция $z(x)$, заданная в области G, называется о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м у р а в н е н и я (1), если для любой области $g \subset G$ имеет место равенство

$$(2)\qquad \int_{g^*} \theta(p_1, p_2, \ldots, p_n, z(p), x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p))\, dp_1, dp_2, \ldots, dp_n =$$

$$= \int_g \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n,$$

где $x_1(p), x_2(p), \ldots, z(p)$ — координаты той точки поверхности $z = z(x)$, в которой уравнение опорной плоскости имеет угловые коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а областью интегрирования g^* является так называемое нормальное изображение области g. Нормальное отображение с помощью выпуклой поверхности $z = z(x)$ состоит в сопоставлении точке x точки p, координатами которой являются угловые коэффициенты опорной плоскости поверхности в точке $(x, z(x))$.

Нормальное отображение так же, как и ему обратное, в общем случае неоднозначно. Однако эта неоднозначность может иметь место только на множестве меры нуль. Поэтому возможная неоднозначность в определении функций $x_1(p)$, $x_2(p), \ldots, z(p)$ не влияет на результат интегрирования в условии (2).

Пусть G — строго выпуклая область, x' — точка на границе области и $H(\mathbf{n})$ — расстояние точки x' от опорной плоскости области G с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Векторное уравнение $\mathbf{p} = \mathbf{n}/H(\mathbf{n})$ задает бесконечную выпуклую поверхность; обозначим через $G(x')$ ограничиваемую ею область. Сдвинем опорную плоскость в точке x' на расстояние λ и обозначим через $\sigma(x', \lambda)$ отсекаемый ею сегмент от области G.

Теорема 1. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *в строго выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях $h(x)$, если существует такая функция $\psi(p)$, для которой выполняются следующие условия*:

1) $\psi(p) \leqslant \theta(p, z, x)$ *для* $x \in G$, $z \leqslant \max h$ *и любых* p;

2) $\int_{(p)} \psi(p)\, dp > \int_G \varphi(x)\, dx$, *где интегрирование в левой части неравенства распространяется на все пространство переменных* p;

3) *для любой точки* $x' \in \partial G$ *и любых постоянных* $c, c_1 > 0$ *при* $\lambda \to 0$

$$\int_{G(x')} \psi\left(c_1 \mathbf{p} - \frac{c\mathbf{n}(x')}{\lambda}\right) dp \Big/ \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x)\, dx \to \infty.$$

Из теоремы 1 получается

Теорема 2. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *в выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если нормальная кривизна границы области строго положительна и, кроме того,*

$$\int_G \varphi(x)\, dx < \infty, \quad \theta(p, z, x) > \frac{c}{|p|^{(n+1)/2}} \text{ при } |\mathbf{p}| \to \infty,$$

или

$$\varphi(x) < c < \infty, \ \theta(p, z, x) > \frac{c}{|\mathbf{p}|^{n+1-\epsilon}} \text{ при } |\mathbf{p}| \to \infty.$$

Докажем теорему 1. В работе [1] А.Д. Александров доказал существование обобщенного решения уравнения (1) в строго выпуклой области G. В ходе этого доказательства строится последовательность выпуклых многогранников, однозначно проектирующихся в замкнутую область $\overline{G}$, сходящихся к выпуклой поверхности F с краем $z = h(x)$, $x \in \partial G$, удовлетворяющей условию:

$$(3)\qquad \int_{g'^*} \theta(p, z(p), x(p))\, dp = \int_{g'} \varphi(x)\, dx,$$

где g' — проекция любой области, взятой на поверхности F. В частности, это имеет место для любой области $g' \subset G$. Таким образом функция $z(x)$, задающая ту часть поверхности F, которая проектируется на G, есть обобщенное решение уравнения (1). Если поверхность F однозначно проектируется на замкнутую область $\bar{G}$, то $z(x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения (1) с граничным условием $z = h(x)$ на ∂G.

Покажем, что при условиях теоремы 1, а они гарантируют выполнение условий теоремы А.Д. Александрова, проектирование поверхности F на замкнутую область $\bar{G}$ однозначно. Допустим, проектирование поверхности F на замкнутую область $\bar{G}$ не однозначно. Тогда найдется такая точка P на поверхности и точка R на ее границе, которые имеют одну и ту же проекцию $x' \in \partial G$. Возьмем какую-нибудь точку Q на соединяющем их прямолинейном отрезке. Она тоже принадлежит F.

Не ограничивая общности, будем считать, что поверхность F расположена в полупространстве $z > 0$. Рассечем цилиндр Z, проектирующий область $\bar{G}$, двумя плоскостями, перпендикулярными оси z и проходящими через точки R и Q. Пересечение их с цилиндром Z обозначим через G_R и G_Q соответственно. Повернем теперь опорную плоскость цилиндра Z около опорной плоскости области G_Q на малый угол так, чтобы она разделяла точку P и край поверхности F. Эта плоскость, будем обозначать ее α, отсекает от области $\bar{G}$ малый сегмент $\sigma(x', \lambda)$.

Плоскость α отсекает от поверхности F малую шапочку F'. Ее нормальное изображение содержит нормальное изображение конуса, который проектирует из точки P край шапочки. Нормальное изображение этого конуса содержит нормальное изображение конуса V, проектирующего сечение цилиндра Z плоскостью α из той же точки. А оно отличается от нормального изображения конуса, проектирующего область G_R из точки P, только сдвигом в направлении нормали к опорной плоскости цилиндра Z в точке P на расстояние c/λ (c – постоянная, не зависящая от λ). Нормальное изображение конуса, проектирующего область G_R из точки P, получается преобразованием подобия области $G(x')$ относительно точки x' с коэффициентом подобия, не зависящим от λ.

Возьмем в качестве g' в равенстве (3) проекцию шапочки F' на область $\bar{G}$. Имеем

$$\int_{F'^*} \theta(p, z(p), x(p))\, dp = \int_{F'} \varphi(x)\, dx.$$

Заменим в этом равенстве θ на ψ, F' – на $\sigma(x', \lambda)$, F'^* – на нормальное изображение V^* конуса V. Получим неравенство

$$\int_{V^*} \psi(p)\, dp < \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x)\, dx.$$

Область V^* получается преобразованием подобия и сдвигом области $G(x')$. Если перейти в левой части неравенства к интегрированию по области $G(x')$ заменой переменных, то неравенство примет вид

$$c_2 \int_{G(x')} \psi\left(c_1 \mathrm{p} - \frac{c\mathrm{n}(x')}{\lambda}\right) dp < \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x)\, dx.$$

А это при достаточно малых λ противоречит условию 2) теоремы 1 Теорема доказана.

Докажем теорему 2. Так как в точке $x' \in \partial G$ нормальная кривизна положительна, то существует сфера S, проходящая через точку x', содержащая область G. Построим для шара, ограниченного сферой S, сегмент $\sigma_s(x', \lambda)$ и область $S(x')$ подобно тому, как строилась область $G(x')$. Так как $\sigma(x', \lambda) \subset \sigma_s(x', \lambda)$, а $S(x') \subset G(x')$, то нам достаточно показать, что при выполнении условий теоремы 2

$$\int_{S(x')} \psi(p)\,dp \Big/ \int_{\sigma_S(x',\lambda)} \varphi(x)\,dx \to \infty \text{ при } \lambda \to 0.$$

Вычисления, которые нетрудно провести, показывают, что это действительно так. Теорема 2 доказана.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
25 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д.* – Вестн. ЛГУ, 1958, № 1.

УДК 517.944+517.949.8

МАТЕМАТИКА

В.С. РЯБЕНЬКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ПРОЕКТОВ И ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ КАЛЬДЕРОНА НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ ЧЕТКОГО СЛЕДА

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 14 X 1982)

Пусть $Lu = 0$ – линейное эллиптическое уравнение, определенное в некоторой области D, и пусть $D^+ \subset D$ – некоторая подобласть. Кальдерон [1] предложил для эллиптических уравнений $Lu = 0$, рассматриваемых в D^+, способ равносильной замены этих уравнений псевдодифференциальными уравнениями, связывающими значения "данных Коши", т.е. искомой функции и ее последовательных нормальных производных до порядка $p - 1$, где p – порядок оператора L, на границе ∂D^+ области D^+. Подход Кальдерона развит Сили [2] и Хёрмандером [3].

В основе псевдодифференциальных соотношений на границе лежит построенный Кальдероном проектор P_Γ^+, действующий в пространстве "данных Коши", определенных на ∂D^+, и оставляющий неподвижными те и только те данные Коши, которые можно доопределить внутри D^+ до некоторого решения уравнения $Lu = 0$.

Обобщение конструкции Кальдерона опирается на вводимое нами понятие четкого следа функции на границе. В случае эллиптических по Петровскому систем таким следом являются, в частности, данные Коши. Формальная схема нашей конструкции не связана с типом уравнения.

Предлагаемая конструкция может быть использована для развития и обоснования того варианта [4] метода разностных проекторов [5–13] численного решения краевых задач, который не требует построения разностной аппроксимации граничных условий исходной краевой задачи. В случае общего эллиптического уравнения подход, намеченный в [4], развит и обоснован А.А. Резником [11, 12] на основе классических проектов Кальдерона и разностных проекторов [8].

Отметим, что конструкция разностных проекторов для разностных схем на нерегулярных сетках [9] оказала влияние на конструкцию обобщенных проектов Кальдерона, вводимых ниже.

1. Основные конструкции. Пусть в d-мерном евклидовом пространстве E^d задана область D с замыканием $\bar{D}$. Будем считать, что заданы линейные