S. A. Anikin, V. A. Smirnov, The R operation in theories with massless particles, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 1, 49–58

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

R-ОПЕРАЦИЯ В ТЕОРИЯХ С БЕЗМАССОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Аникин С. А., Смирнов В. А.

В теориях с безмассовыми частицами доказана теорема Боголюбова – Парасюка для перенормировочной процедуры с неминимальными вычитаниями, обобщающей перенормировку с «мягкой массой».

В серии работ [1] была описана процедура устранения как ультрафиолетовых (УФ-), так и инфракрасных (ИК-) расходимостей в широком классе теорий с помощью некоторой вычитательной процедуры. В данной статье предлагается обобщение этой перенормированной схемы, основанное на отказе от минимальности УФ- и ИК-вычитаний. Класс теорий, к которым применимо предлагаемое обобщение, остается прежним – это теории, в которых «почти нет» ИК-расходимостей. В теориях с худшим ИК-поведением ИК-расходимости невозможно устранить с помощью локальных (в x-пространстве) контрчленов.

Для описания R-операции необходимо определить вычитающие операторы. Прежде всего модифицируем безмассовые пропагаторы теории: в α-представлении введем в каждый из них дополнительный множитель $\varphi(\alpha)$, являющийся достаточное число раз дифференцируемой функцией, и если фейнмановская амплитуда (ФА) рассматривается в евклидовом пространстве, то убывающей на бесконечности быстрее любой обратной степени переменной α. Кроме того, положим $\varphi(0)=1$. В различные пропагаторы могут вставляться различные функции $\varphi(\alpha)$. Анализ сходимости для простоты изложения будет проводиться в евклидовой формулировке, хотя все результаты переносятся и на пространство Минковского (см. замечания в конце работы).

Введем вычитающие операторы, определенные на α-представлении модифицированной ФА подграфа γ $G_\gamma^\varphi(\underline{p}\,|\,\underline{\alpha})\equiv G_\gamma(\underline{p}\,|\,\underline{\alpha})\prod_{l\in\gamma}\varphi(\alpha_l)$:

$$M_\gamma^{a_\gamma,b_\gamma}=M_\gamma^{b_\gamma}I_\varphi+(1-M_\gamma^{b_\gamma})M_{\gamma,\varphi}^{a_\gamma}, \tag{1}$$

где

$$I_\varphi M_\gamma^n G_\gamma^\varphi(\underline{p}\,|\,\underline{\alpha})=\prod_{l\in\gamma}\varphi(\alpha_l-\varkappa\alpha_l)\,|_{\varkappa=1}\mathscr{M}_\varkappa^n G_\gamma(\underline{\varkappa p}\,|\,\underline{\alpha}), \tag{2}$$

$$M_{\gamma,\varphi}^n G_\gamma^\varphi(\underline{p}\,|\,\underline{\alpha})=\mathscr{M}_\varkappa^n G_\gamma(\varkappa\underline{p}\,|\,\underline{\alpha})\prod_{l\in\gamma}\varphi(\alpha_l-\varkappa\alpha_l),$$

$$\mathscr{M}_\varkappa^n f(\varkappa)=\sum_{k=0}^{n}\mathscr{M}_\varkappa^{(k)}f(\varkappa)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0). \tag{3}$$

Заметим, что согласно определению оператора $M_\gamma^{a\gamma, b\gamma}$ он осуществляет разложение в ряд Тейлора по внешним импульсам до степени b_γ исходной ФА $G_\gamma(\underline{p})$, а члены со степенями импульсов от $b_\gamma+1$ до a_γ приобретают дополнительную ИК-регуляризацию за счет функций $\varphi(\alpha)$. Будем условно называть такие члены «массивными», т. к. функции $\varphi(\alpha)$ и их производные играют роль массивного члена в пропагаторе (более подробно об этом см. в части 1 работы [1]).

С помощью введенных вычитающих операторов определим R-операцию привычной формулой

$$R = \sum_{F_0} \prod_{\gamma \in F_0} (-M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}), \tag{4}$$

в которой суммирование ведется по всем лесам F_0 обобщенных блоков, т. е. полных одночастично-неприводимых подграфов. Нетрудно показать (см. приложение), что в (4) можно заменить суммирование по F_0 на суммирование по лесам F одночастично-неприводимых подграфов.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Перенормированная ФА*

$$RG_\Gamma^\varphi(\underline{p}) \equiv R \int d\underline{\alpha} G_\Gamma(\underline{p} \mid \underline{\alpha}) \prod_{l \in \Gamma} \varphi(\alpha_l)$$

не содержит ни УФ-, ни ИК-расходимостей, если числа a_γ *и* b_γ *удовлетворяют соотношениям* $0 \leqslant a_\gamma - \omega_\gamma \equiv a^\gamma$; $0 \leqslant \omega_\gamma - 1 - b_\gamma \equiv b^\gamma$; $\sum_i a^{\gamma_i} \leqslant a^\gamma$, $\sum_i b^{\gamma_i} \leqslant b^\gamma$ *для произвольной совокупности подграфов* $\{\gamma_i\}$ *таких, что*:

а) $\mathscr{L}(\gamma_i \cap \gamma_{i'}) = \varnothing$;

б) *любое объединение* $\gamma_i \cup \gamma_{i'} \cup \ldots$ *является одночастично приводимым*;

в) $\gamma_i \Subset \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим регуляризованную ФА $G_\Gamma^\varphi(\underline{p})$, сопоставляемую сильно связному графу Г:

$$G_\Gamma^\varphi(\underline{p}) \equiv \int d\underline{\alpha} G_\Gamma^\varphi(\underline{p} \mid \underline{\alpha}) = \int_0^\infty d\underline{\alpha} D^{-2}(\underline{\alpha}) Z(\underline{p}, \underline{\alpha}) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{A(\underline{p}, \underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} - \sum_l m_l^2 \alpha_l\right\} \prod_l \varphi(\alpha_l). \tag{5}$$

Здесь функция $Z(\underline{p}, \underline{\alpha})$, как обычно, учитывает наличие производных во взаимодействии и нескалярный характер пропагаторов. Разобьем интеграл в правой части (5) на сумму интегралов по секторам $\Delta_{\pi, j} = \{\underline{\alpha} \mid \alpha_{\pi(1)} \leqslant \leqslant \alpha_{\pi(2)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{\pi(j)} \leqslant 1 \leqslant \alpha_{\pi(j+1)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{\pi(L)}\}$. В дальнейшем без потери общности будем рассматривать вклад G_Δ в (5) от сектора $\Delta_j \equiv \Delta_{I, j}$, отвечающего тождественной перестановке. В интеграле по области Δ_j для $l \geqslant j+1$ введем переменные $\beta_l = \alpha_l^{-1}$.

При анализе сходимости различных вкладов в G_Δ удобно переходить к преобразованию Фурье по части переменных $\underline{p}$, т. е. использовать смешанное представление [2], которое с точностью до несущественного численного множителя имеет вид

$$(6)\qquad \int d\underline{\alpha} \int d\underline{\beta}\, [A^r(\underline{\alpha}, \underline{\beta})]^{-2} Z^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) \times$$
$$\times \exp\left\{-W^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) - \sum_{l=1}^{j} m_l^2\alpha_l - \sum_{l=j+1}^{L} m_l^2\beta_l^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{j} \varphi(\alpha_l) \prod_{l=j+1}^{L} \varphi(\beta_l^{-1}).$$

Напомним, что при определении действия вычитающих операторов в подынтегральное выражение вводятся параметры $\underline{\varkappa}=\{\varkappa_\gamma|\gamma\in F\}$. В результате функции A^r, Z^r и W^r (так же как и φ) приобретают зависимость от $\underline{\varkappa}$ и оказываются выраженными в конечном счете через суммы по 1-, 2- и псевдодеревьям графа $\hat{\Gamma}^r$ [2] величин

$$\Pi_T(\alpha, \beta, \varkappa) = \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ l\notin T}} \alpha_l \prod_{\substack{j\leqslant l\leqslant L\\ l\in T}} \beta_l \prod_{\gamma\in F} \varkappa_\gamma^{2L(\gamma\setminus T)}.$$

Граф $\hat{\Gamma}^r$ получается из Γ путем присоединения новой вершины $\hat{v}$, связанной дополнительными линиями с каждой из r внешних вершин, рассматриваемых в координатном представлении, при этом[1] $\hat{\Gamma}\equiv\hat{\Gamma}^n$. Анализ сходимости G_Δ будем проводить в «секторных» переменных» $\underline{t}=(t_1, \ldots, t_j)$ и $\underline{\tau}=(\tau_{j+1}, \ldots, \tau_L)$, задаваемых соотношениями

$$(7)\qquad \alpha_l=t_l\ldots t_j,\qquad \beta_{l'}=\tau_{j+1}\ldots\tau_{l'},$$

и изменяющихся в Δ_j на отрезке [0, 1]. Здесь и далее, если область изменения индексов l и l' не указана, они пробегают значения $1, 2, \ldots, j$ и $j+1, \ldots, L$, соответственно. Отметим, что сектор определяет максимальное гнездо $\mathcal{N}$ подграфов γ_l $(l=1, 2, \ldots, L)$, каждый из которых состоит из линий с номерами $\{1, 2, \ldots, l\}$.

Для анализа сходимости RG_Δ удобно перегруппировать слагаемые в (4) после перехода к суммированию по лесам согласно некоторому отношению эквивалентности. С этой целью введем операцию «достройки» $F\to\bar{F}$ такую, что $F\subset\bar{F}$. Лес $\bar{F}$ достраивается из F следующим образом. Пусть $\gamma\in F$, а $\underline{\gamma}=\bigcup_{\substack{\gamma'\in F\\ \gamma'\subseteq\gamma}}\gamma'$ ($\underline{\gamma}'$ может быть и пустым множеством). Рассмотрим гнездо подграфов $\{\gamma'|\underline{\gamma}'=\underline{\gamma}\cup(\gamma_l\cap\gamma),\ l=1, \ldots, L;\ \gamma'\neq\gamma\}$. Оно содержит $L_\gamma-L_{\underline{\gamma}}$ различных элементов. Занумеруем их в порядке включения $\gamma^1\subset\gamma^2\subset\ldots\subset\gamma^{L_\gamma-L_{\underline{\gamma}}}\equiv\gamma$. При любом $i=1, 2, \ldots, L_\gamma-L_{\underline{\gamma}}-1$ будем добавлять к F элемент, являющийся УФ-неприводимой[2] компонентой подграфа γ^i, включающей линию $\mathcal{L}(\gamma^i\setminus\gamma^{i-1})$. После того как указанным способом произведена достройка по всем максимальным элементам леса F, мы про-

---

[1] Здесь n – число внешних вершин диаграммы Γ.

[2] УФ-неприводимым мы называем такой подграф, который либо сильно связан, либо состоит из единственной линии.

должаем достраивать лес «извне» с помощью изложенной процедуры, ограничиваясь, однако, только подграфами $\gamma_l \in \mathcal{N}$ с номерами $l \leqslant j$.

Прежде чем определить отношение эквивалентности, введем Σ — совокупность собственно-энергетических (СЭ-) обобщенных блоков γ диаграммы Γ, таких что: а) каждый из них соединен с остальной частью диаграммы двумя безмассовыми линиями, которые образуют подграф, обозначаемый γ^*; б) произведение немодифицированных пропагаторов, отвечающих линиям γ^*, ведет себя при $p \to 0$ как p^{-4}. Такой выбор Σ соответствует фактически СЭ-вставкам в линии, сопоставляемые безмассовым скалярным и векторным частицам.

Обозначим символом $\Sigma_{\mathcal{N}}$ подмножество Σ, состоящее из подграфов, каждый из которых является компонентой связности хотя бы для одного $\gamma_l \in \mathcal{N}$.

Назовем теперь два леса F_1 и F_2 эквивалентными, если

$$(\overline{F_1 \backslash \Sigma_{\mathcal{N}}}) \cup \Sigma_{\mathcal{N}} = (\overline{F_2 \backslash \Sigma_{\mathcal{N}}}) \cup \Sigma_{\mathcal{N}}.$$

Лес, обладающий свойством $\bar{F} = F$, является [3] максимальным УФ-лесом (обозначим его $\mathcal{F}_\alpha$), содержащим линии $\mathcal{L}(F) = \bigcup_{\gamma \in F} \mathcal{L}(\gamma)$. Из оставшихся линий построим аналогичным образом ИК-лес $\mathcal{F}_\beta$, используя гнездо, соответствующее обратному порядку линий. При этом УФ-неприводимость заменяется понятием ИК-неприводимости (подграф γ является ИК-(не)приводимым тогда и только тогда, когда $\hat{\Gamma}/(\Gamma \backslash \gamma)$ одновершинно (не)приводим), а роль числа независимых циклов $\mathfrak{N}(\gamma)$ играет $\hat{\mathfrak{M}}(\gamma)$ — число независимых коциклов графа $\hat{\Gamma}$, содержащихся в подграфе γ (подробнее см. [3]). Отметим, что при построении $\mathcal{F}_\beta$ достраивается лишь пустой ИК-лес.

Множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\beta$ является максимальным обобщенным лесом [3]. В нем ровно L элементов. Введем ассоциированные с $\mathcal{F}$ вспомогательные переменные $\underline{t}' = \{t_\gamma' | \gamma \in \mathcal{F}_\alpha\}$ и $\underline{\tau}' = \{\tau_\gamma' | \gamma \in \mathcal{F}_\beta\}$:

$$\alpha_l = \prod_{l \in \gamma \in \mathcal{F}_\alpha} t_\gamma', \qquad l \in \mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}_\alpha); \tag{8}$$

$$\beta_l = \prod_{l \in \gamma \in \mathcal{F}_\beta} \tau_\gamma', \qquad l \in \mathcal{L}_\beta \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}_\beta).$$

Определим отображение σ: $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$. Линия $\sigma(\gamma)$ такова, что $\sigma(\gamma) \in \mathcal{L}(\gamma)$ и $\sigma(\gamma) \notin \mathcal{L}(\gamma')$, $\forall \gamma' \subseteq \gamma$, $\gamma' \in \mathcal{F}$. Обозначим через $\bar{\gamma}$ минимальный из элементов леса, строго включающих в себя данный элемент γ. Переменные $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ выражаются через $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ следующим образом: $t_\gamma' = \alpha_{\sigma(\gamma)}$, если γ — максимальный элемент $\mathcal{F}_\alpha$, и $t_\gamma' = \alpha_{\sigma(\gamma)}[\alpha_{\sigma(\bar{\gamma})}]^{-1}$ в противном случае; $\tau_\gamma' = \beta_{\sigma(\gamma)}$, если γ — максимальный элемент в $\mathcal{F}_\beta$, и $\tau_\gamma' = \beta_{\sigma(\gamma)}[\beta_{\sigma(\bar{\gamma})}]^{-1}$ в противном случае. Отсюда получаем связь $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ и $(\underline{t}, \underline{\tau})$. Для γ, являющихся максимальными элементами соответственно $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{F}_\beta$,

$$t_\gamma' = \begin{cases} t_{\sigma(\gamma)} \ldots t_j, & \sigma(\gamma) \leqslant j, \\ [\tau_{j+1} \ldots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & \sigma(\gamma) > j; \end{cases} \tag{9}$$

$$\tau_\gamma' = \tau_{j+1} \ldots \tau_{\sigma(\gamma)}, \quad \sigma(\gamma) > j$$

и для немаксимальных элементов из $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{F}_\beta$

$$(9') \qquad t_\gamma' = \begin{cases} t_{\sigma(\gamma)} \dots t_{\sigma(\bar\gamma)-1}, & \sigma(\gamma) < \sigma(\bar\gamma) \leqslant j; \\ [t_{\sigma(\bar\gamma)} \dots t_{\sigma(\gamma)-1}]^{-1}, & \sigma(\bar\gamma) < \sigma(\gamma) \leqslant j; \\ t_{\sigma(\gamma)} \dots t_j \tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\bar\gamma)}, & \sigma(\gamma) \leqslant j < \sigma(\bar\gamma); \\ [t_{\sigma(\bar\gamma)} \dots t_j \tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & \sigma(\bar\gamma) \leqslant j < \sigma(\gamma); \\ \tau_{\sigma(\gamma)+1} \dots \tau_{\sigma(\bar\gamma)}, & j < \sigma(\gamma) < \sigma(\bar\gamma); \\ [\tau_{\sigma(\bar\gamma)+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & j < \sigma(\bar\gamma) < \sigma(\gamma); \end{cases}$$

$$\tau_\gamma' = \tau_{\sigma(\bar\gamma)+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}, \quad j < \sigma(\bar\gamma) < \sigma(\gamma).$$

Представим $\mathcal{F}_\alpha$ в виде непересекающегося объединения $\mathcal{F}_\alpha^+ \cup \mathcal{F}_\alpha^-$. К $\mathcal{F}_\alpha^+$ отнесем такие максимальные γ из $\mathcal{F}_\alpha$, для которых $\sigma(\gamma) \leqslant j$, и такие немаксимальные, для которых $\sigma(\gamma) < \sigma(\bar\gamma)$. Нетрудно увидеть, что $\overline{F \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}} = \mathcal{F}_\alpha$ всегда достраивается из $F \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$ элементами множества $\mathcal{F}_\alpha^+$. Таким образом, любой лес $F \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$ можно получить из $\mathcal{F}_\alpha$, удалив из последнего некоторые элементы множества $\mathcal{F}_\alpha^+$, так что каждый член класса эквивалентности лесов характеризуется $\mathcal{F}_\alpha^-$, некоторым подмножеством $\mathcal{F}_\alpha^+$ и некоторым подмножеством $\Sigma_{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{F}_\alpha^+$. Поэтому вклад всего класса эквивалентности в (4) группируется в выражение

$$(10) \qquad R_{\mathcal{F}, \mathcal{N}} = \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^-} (-M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}) \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^+ \cup \Sigma_{\mathcal{N}}} (1 - M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}).$$

Ниже мы будем пользоваться различными представлениями операторов $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ через операторы $\mathcal{M}$. Определение операторов $\mathcal{M}$ требует введения в G_Δ вспомогательных параметров. Сопоставим каждому подграфу γ пару таких параметров — $\varkappa_\gamma$ и ζ_γ. Параметры ζ_γ вводятся в функции $\varphi(\alpha_l)$ так, что

$$\prod_l \varphi(\alpha_l) \Rightarrow \prod_l \varphi\left(\alpha_l \left(1 - \prod_{\gamma \ni l} \zeta_\gamma^2\right)\right).$$

Параметры же $\varkappa_\gamma$ вводятся так же, как и в случае обычных УФ-вычитаний, т. е. на них домножаются все внешние импульсы подграфа γ. После простых преобразований эти параметры оказываются множителями некоторых из переменных α_l $(l=1, \dots, L)$.

Произведем в G_Δ по части переменных $\underline{p}$ преобразование Фурье. Конкретный выбор этой группы импульсов будет дан ниже. Преобразованная функция $G_\Delta(\underline{p}, \underline{x} | \underline{\varkappa}, \underline{\zeta})$ запишется как

$$(11) \qquad G_\Delta(\underline{p}, \underline{x} | \underline{\varkappa}, \underline{\zeta}) = \int_0^1 \prod_l t_l^{l-1} dt_l \prod_{l'} \tau_{l'}^{L-l'} d\tau_{l'} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\sum_l m_l^2 \alpha_l(\underline{t}) - \sum_{l'} m_{l'}^2 [\beta_{l'}(\underline{\tau})]^{-1} \right\} \times$$
$$\times \prod_{\gamma \in \mathcal{F} \cup \Sigma_{\mathcal{N}}} \varkappa_\gamma^{4\mathfrak{R}(\gamma) + a(\gamma)} f^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta} | \underline{\varkappa}) \times$$
$$\times \prod_l \varphi\left(\alpha_l(\underline{t}) \left(1 - \prod_{\gamma \ni l} \zeta_\gamma^2\right)\right) \prod_{l'} \varphi\left((\beta_{l'}(\underline{\tau}))^{-1} \left(1 - \prod_{\gamma \ni l'} \zeta_\gamma^2\right)\right).$$

Здесь $a(\gamma)=\sum_{l\in\gamma} a_l$, a_l — степень импульса в числителе l-го пропагатора, $f^r\equiv(A^r)^{-2}Z^r\exp(-W^r)$. Смешанное представление выбирается для $\mathscr{L}_a\equiv\equiv\mathscr{L}(\mathscr{F}_\alpha)$ по рецепту работы [2]. В множество $\mathscr{V}^r$ (множество внешних вершин, которым сопоставляются координатные переменные) включается по одной вершине из каждой совокупности вершин, связанных между собой и не связанных с другими вершинами путями, составленными из линий, принадлежащих $\mathscr{L}_\alpha$. В результате такого выбора представления показатель экспоненты W^r оказывается гладкой функцией вспомогательных переменных $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ и не содержит отрицательных степеней $\varkappa_\gamma$, что вытекает из определения $\Sigma_{\mathscr{N}}$.

Запишем функцию f^r в виде

$$\prod_{l=1}^{j}\alpha_l^{-2}\prod_{l\in\mathscr{L}_\alpha}(\alpha_l')^2 f^r(\underline{x},\underline{p},\underline{\alpha}',\underline{\beta}'\,|\,\underline{\varkappa})=$$

$$=\prod_{l=1}^{j} t_l^{-2l}\prod_{\gamma\in\mathscr{F}_\alpha}(t_\gamma')^{2L_\gamma} f^r(\underline{x},\underline{p},\underline{t}',\underline{\tau}'\,|\,\underline{\varkappa})$$

и воспользуемся для нее представлением [3, формула (15)], которое легко обобщается на случай наличия параметров $\underline{\varkappa}$:

$$f^r(\underline{x},\underline{p},\underline{t}',\underline{\tau}'\,|\,\underline{\varkappa})=\prod_{\gamma\in\mathscr{F}_\alpha}(\varkappa_\gamma^2 t_\gamma')^{-2\mathfrak{N}(\gamma)-[a(\gamma)/2]}\times$$
$$\times\prod_{\gamma\in\mathscr{F}_\beta}(\tau_\gamma')^{-\Omega(\gamma)-L(\gamma)}\prod_{\gamma\in\Sigma_{\mathscr{N}}\setminus\mathscr{F}}\varkappa_\gamma^{-2[\omega(\gamma)/2]-2L(\gamma)}\,Q(\underline{t}',\underline{\tau}'\,|\,\underline{\varkappa}), \tag{12}$$

где $Q\in C^\infty$, а $[x]$ — целая часть x. В (12) введен ИК-индекс расходимости $\Omega(\gamma)$, удовлетворяющий неравенству

$$\Omega(\gamma)\leqslant\left[{}^1\!/_2\left(\omega(\widehat{\Gamma\setminus\gamma})-\omega(\hat{\Gamma})+\sum_i \mathrm{Odd}(\Gamma\setminus\gamma)_i+1\right)\right],$$

где $(\Gamma\setminus\gamma)_i$ — компоненты связности подграфа $\Gamma\setminus\gamma$, а нечетность $\mathrm{Odd}\,\gamma$ равна $\mathrm{Odd}\,\gamma=a(\gamma)-2[{}^1\!/_2 a(\gamma)]$. Переменная t_γ' входит в Q лишь в комбинации $t_\gamma'\pi_\gamma(\underline{\tau})\varkappa_\gamma^2$, где $\pi_\gamma(\underline{\tau})=\prod\tau_{l'}$, а произведение берется по таким l', для которых $\gamma\subset\gamma_{l'-1}$ и $\gamma^*\cap\gamma_{l'-1}=\varnothing$. Что же касается $\varkappa_\gamma$ с γ из $\Sigma_{\mathscr{N}}\setminus\mathscr{F}$, то они входят в Q только в комбинациях $\varkappa_\gamma^2\pi_\gamma(\underline{\tau})$. Эти утверждения следуют из свойств факторизации различных форм и того факта, что для γ таких, что $\gamma\subset\gamma_{l'-1}$, $\gamma^*\cap\gamma_{l'-1}=\varnothing$ всегда $\mathrm{def}_T\,\gamma\leqslant\mathrm{def}_T\,\gamma_{l'-1}$. Отметим также, что для $\gamma\in\mathscr{F}_\alpha$, параметры ζ_γ входят в функции φ также в комбинациях $t_\gamma'\zeta_\gamma^2$.

Из соотношений (9) следует, что t_γ' содержит отрицательные степени переменных $(\underline{t},\underline{\tau})$ тогда и только тогда, когда $\gamma\in\mathscr{F}_\alpha^-$. Однако при действии оператора $M_\gamma^{a_\gamma,b_\gamma}$ соответствующий параметр $\varkappa_\gamma$ полагается равным нулю. Поэтому используемое представление (12) является фактически факторизацией и в переменных $(\underline{t},\underline{\tau})$. Другими словами, правая часть (12) под действием операторов $M_\gamma^{a_\gamma,b_\gamma}$ $(\gamma\in\mathscr{F}_\alpha^-)$ превращается в выражение вида $\prod_l t_l^{\bar{N}_l}\prod_{l'}\tau_{l'}^{\bar{N}_{l'}}\psi(\underline{t},\underline{\tau})$, где ψ — гладкая, ограниченная функция.

Докажем УФ-сходимость $R_{\mathcal{F},\mathcal{N}}G_\Delta$. Прежде всего перейдем в (10) к операторам $\mathcal{M}$, действующим на параметры. При этом мы переопределим введенные выше параметры $(\underline{\varkappa}, \underline{\zeta})$, заменяя $(\underline{\varkappa}, \underline{\zeta}) \to (\underline{\varkappa', \zeta'}, \underline{\varkappa}')$. Тогда (опуская штрихи)

$$M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma} \Rightarrow \mathcal{M}_{\zeta_\gamma}^{b_\gamma} I_{\varkappa_\gamma} + (I_{\zeta_\gamma} - \mathcal{M}_{\zeta_\gamma}^{b_\gamma}) \mathcal{M}_{\varkappa_\gamma}^{a_\gamma}. \tag{13}$$

Используя для $(I_\varkappa - \mathcal{M}_\varkappa^a)$ стандартное представление

$$(I_\varkappa - \mathcal{M}_\varkappa^a) f(\varkappa) = \int\limits_0^1 d\varkappa \frac{(1-\varkappa)^a}{a!} \left(\frac{\partial}{\partial\varkappa}\right)^{a+1} f(\varkappa), \tag{14}$$

можно оценить степени, в которых t_l входят в подынтегральное выражение для $R_{\mathcal{F},\mathcal{N}}G_\Delta$. Согласно (9), (11) и (12) имеем

$$\deg t_l \equiv N_l = -l - 1 + \sum_{\sigma(\gamma) \leqslant l < \sigma(\bar\gamma)} N_\gamma^+ - \sum_{\sigma(\bar\gamma) \leqslant l < \sigma(\gamma)} N_\gamma^-, \tag{15}$$

где $N_\gamma^\pm$ — степени переменных t_γ' при $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^\pm$. В (15) под знаком сумм мы не выписывали условие $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha$ и приняли, что для γ, являющихся максимальными, условие $\sigma(\gamma) \leqslant l < \sigma(\bar\gamma)$ заменяется на $\sigma(\gamma) \leqslant l$. Легко видеть, что для $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^-$

$$N_\gamma^- \leqslant L_\gamma + [a^\gamma/2]. \tag{16}$$

Так как согласно (13) действие оператора $(1 - M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma})$ при проводимом подсчете степеней сводится к $\omega_\gamma + a^\gamma + 1$ дифференцированию по $\varkappa_\gamma$, то

$$N_\gamma^+ \geqslant [a^\gamma/2] + L_\gamma + 1. \tag{17}$$

Перегруппировав в (15) слагаемые с помощью соотношений

$$\sum_{\sigma(\gamma) \leqslant l < \sigma(\bar\gamma)} = \sum_{\sigma(\gamma) \leqslant l} - \sum_{\sigma(\gamma), \sigma(\bar\gamma) \leqslant l}, \quad \sum_{\sigma(\bar\gamma) \leqslant l < \sigma(\gamma)} = \tag{18}$$
$$= \sum_{\bar\gamma : \sigma(\bar\gamma) \leqslant l} - \sum_{\sigma(\gamma), \sigma(\bar{\bar\gamma}) \leqslant l}, \quad \sum_{\gamma : \sigma(\bar{\bar\gamma}) \leqslant l} A_\gamma = \sum_{\gamma : \sigma(\gamma) \leqslant l} \sum_{\gamma' : \bar{\bar\gamma}' = \gamma} A_{\gamma'},$$

получаем из (15) с учетом (16) и (17), что при сформулированных в теореме условиях на a^γ степень $N_l \geqslant -1 + \sum\limits_{\substack{\sigma(\gamma) \leqslant l < \sigma(\bar\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\alpha}} 1$. Покажем, что для любого $1 \leqslant l \leqslant j$ найдется такой $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha$, что $\sigma(\gamma) \leqslant l < \sigma(\bar\gamma)$. Предположим противное. Рассмотрим максимальные элементы из $\mathcal{F}_\alpha$. Согласно предположению для любого из них $\sigma(\gamma) \geqslant l+1$. Пусть $\{\gamma_i\}$ — непересекающиеся друг с другом элементы $\mathcal{F}_\alpha$, строго принадлежащие одному из максимальных элементов. По предположению и для них $\sigma(\gamma_i) \geqslant l+1$. Продолжая рассуждение, получаем, что $\sigma(\gamma) \geqslant l+1$ для всех γ из $\mathcal{F}_\alpha$. Поскольку $\sigma(\gamma) \geqslant j+1$ для $\gamma \in \mathcal{F}_\beta$ по построению $\mathcal{F}_\beta$, мы получили, что $\sigma(\gamma) \geqslant l+1$ для всех $\gamma \in \mathcal{F}$. Поскольку в $\mathcal{F}$ ровно L элементов, это противоречит изоморфности отображения σ.

Перейдем к анализу ИК-сходимости. Вернемся к исходному способу введения параметров $\varkappa_\gamma$ и ζ_γ, а для оператора $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ выберем следующее представление:

$$M_\gamma^{a_\gamma,\, b_\gamma} \Rightarrow \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma} I_{\zeta_\gamma} + \sum_{k_\gamma=b_\gamma+1}^{a_\gamma} \mathscr{M}_{\zeta_\gamma}^{a_\gamma-k_\gamma} \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{(k_\gamma)},$$

отметим, что подынтегральное выражение в $R_{\mathscr{F},\mathscr{N}} G_\Delta$ представляет собой сумму, каждое из слагаемых в которой с точностью до гладкой функции является произведением степеней $\tau_{l'}$ (и t_l) на функции φ и их производные. Таким образом, сходимость по каждому $\tau_{l'}$ будет следовать из положительности степеней этих переменных в тех и только тех слагаемых, которые не содержат функций φ, зависящих от данного $\tau_{l'}$. В прочих случаях сходимость будет обеспечиваться функциями φ.

Пусть $\gamma \in \mathscr{F}_\alpha^-$. Если действие операторов $\mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{(k_\gamma)}$ влияет на степень $\tau_{l'}$, то в γ должна находиться хотя бы одна линия с номером, большим или равным l' (см. соотношения (9)). Однако в этом случае действие операторов $\mathscr{M}_{\zeta_\gamma}^{a_\gamma-k_\gamma}$ приводит к появлению функций φ (либо их производных), зависящих от $\tau_{l'}$, так что с учетом сделанного выше замечания остается лишь рассматривать вклад в $M_\gamma^{a_\gamma,\, b_\gamma}$, равный $\mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma} I_{\zeta_\gamma}$.

Пусть теперь $\gamma \in \mathscr{F}_\alpha^+ \cup \Sigma_{\mathscr{N}}$. Запишем $1 - M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ в виде $(I_\varkappa - \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma}) I_{\zeta_\gamma} - \sum\limits_{k_\gamma=b_\gamma+1}^{a_\gamma} \mathscr{M}_{\zeta_\gamma}^{a_\gamma-k_\gamma} \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{(k_\gamma)}$. Если операторы $\mathscr{M}_{\zeta_\gamma}^{a_\gamma-k_\gamma}$ обеспечивают сходимость по $\tau_{l'}$, то достаточно учитывать вклад в $1 - M_\gamma^{a_\gamma,\, b_\gamma}$ оператора $(I_{\varkappa_\gamma} - \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma}) I_{\zeta_\gamma}$. В противном случае вкладом $\sum \mathscr{M}_{\zeta_\gamma}^{a_\gamma-k_\gamma} \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{(k_\gamma)}$ пренебречь нельзя в указанном выше смысле. Отметим, что любое слагаемое из этой суммы приводит к действию производной $(\partial/\partial\varkappa_\gamma)^{k_\gamma}$ порядка $k_\gamma \geqslant b_\gamma+1$. С другой стороны, использование формулы для остаточного члена (14) показывает, что действие оператора $(I_{\varkappa_\gamma} - \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma})$ при подсчете степеней также эквивалентно применению операции $(\partial/\partial\varkappa_\gamma)^{b_\gamma+1}$. Таким образом, действие всего оператора $1 - M_\gamma^{a_\gamma,\, b_\gamma}$ при подсчете степеней τ сводится к применению этой операции. С учетом сделанных замечаний имеем

$$\deg \tau_{l'} = Q_{l'} + L - l' + \sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma) < l' \leqslant \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathscr{F}_\beta}} \deg \tau_\gamma{}' + \sum_{\substack{\sigma(\gamma) < l' \leqslant \sigma(\bar\gamma) \\ \gamma \in \mathscr{F}_\alpha}} N_\gamma{}'^{+} - \sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma) < l \leqslant \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathscr{F}_\alpha}} N_\gamma{}'^{-}, \tag{19}$$

где $Q_{l'}$ — прямой вклад в степень $\tau_{l'}$ от действия операторов $\prod\limits_{\gamma \in \Sigma_{\mathscr{N}}} (I_{\varkappa_\gamma} - \mathscr{M}_{\varkappa_\gamma}^{b_\gamma})$ за счет $\pi_\gamma(\underline{\tau})$, равный, как легко убедиться,

$$Q_{l'} = \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma_{\mathscr{N}} \\ \gamma \in \gamma_{l'-1} \\ \gamma^* \cap \gamma_{l'-1} = \varnothing}} (b_\gamma - \mathrm{Odd}\,\gamma + 1), \tag{20}$$

Из (12) и (13) получаем

$$\deg \tau_{l'} \geqslant L-l'+\sum_{\substack{\sigma(\gamma)<l'\leqslant\sigma(\gamma)\\ \gamma\in\mathcal{F}_\alpha}}(L_\gamma-[b^\gamma/2])-\sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma)<l'\leqslant\sigma(\gamma)\\ \gamma\in\mathcal{F}_\alpha}}\Bigl(L_\gamma-\Bigl[\frac{b^\gamma+1}{2}\Bigr]\Bigr)+\sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma)<l'\leqslant\sigma(\gamma)\\ \gamma\in\mathcal{F}_\beta}}(-\Omega(\gamma)-L(\gamma))+Q_{l'},$$

где $b^\gamma=\omega_\gamma-1-b_\gamma$. Тогда, пользуясь формулами, аналогичными (18), получаем

(21) $$\deg \tau_{l'}\geqslant -1+\sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma)<l\leqslant\sigma(\gamma)\\ \gamma\in\mathcal{F}_\beta}}1+\sum_{\substack{\sigma(\gamma)\geqslant l\\ \gamma\in\mathcal{F}_\alpha}}\Bigl(\Bigl[\frac{b^\gamma+1}{2}\Bigr]-\sum_{\gamma':\bar\gamma'=\gamma}\Bigl[\frac{b^{\gamma'}}{2}\Bigr]\Bigr)-\sum_{\substack{\sigma(\bar\gamma)<l'\leqslant\sigma(\gamma)\\ \gamma\in\mathcal{F}_\beta}}(1+\Omega(\gamma))+Q_{l'}.$$

Сумма первых двух членов неотрицательна, в чем легко убедиться, повторяя рассуждения, приведенные при оценке $\deg t_l$. Третий член неотрицателен, если b^γ выбрать так, чтобы

$$\Bigl[\frac{b^\gamma+1}{2}\Bigr]\geqslant\sum_{\gamma':\bar\gamma'=\gamma}\Bigl[\frac{b^{\gamma'}}{2}\Bigr],$$

что сводится к сформулированным в условиях теоремы ограничениям на b^γ. Что касается последних двух членов в правой части (21), то напомним, что $\Omega(\gamma)\geqslant 0$ лишь тогда, когда подграф $\Gamma\backslash\gamma$ содержит в себе γ' из $\Sigma_{\mathcal{N}}$ в качестве компоненты связности. Но в этом случае происходит взаимная компенсация между последней и предпоследней суммами в (21). Таким образом, $\deg \tau_{l'}\geqslant 0$ для l' таких, что $\gamma_{l'-1}$ не содержит «массивных» линий.

В заключение отметим, что для ФА, рассматриваемых в пространстве Минковского, можно воспользоваться стандартной ИК-ε-регуляризацией и техникой разворота контура [1] либо же интегрированием по частям по переменным $\tau_{l'}$ [2]. В первом случае на функцию φ накладывается условие быстрого убывания в нижней полуплоскости комплексного аргумента, а во втором (близкое условие) достаточно считать, что найдутся такие $\eta>0$, $C_{m,n}>0$ и $\beta_0>0$, что при $\beta\leqslant\beta_0$

$$|(\chi^{(n)}/\chi^{(n+1)})^{(m)}|<C_{m,n}\beta^{\eta-m+1},$$

где $\chi^{(n)}(\beta)=(d/d\beta)^n\varphi(1/\beta)$. Этим обоим ограничениям удовлетворяет, в частности, суперпозиция массивных экспонент. Перенормировка с «мягкой массой» соответствует выбору $\varphi(\alpha)=\exp(-i\mu^2\alpha)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем равенство

(П.1) $$R=\sum_{F_0\in\{F_0\}}\prod_{\gamma\in F_0}(-M_\gamma^{a_\gamma,b_\gamma})=\sum_{F\in\{F\}}\prod_{\gamma\in F}(-M_\gamma^{a_\gamma,b_\gamma}),$$

где F_0 – леса обобщенных блоков, а F – леса одночастично-неприводимых подграфов.

Рассмотрим $\gamma \in F$, не являющийся полным подграфом. В $\{F_0\}$ существует подграф $\bar\gamma$, являющийся пополнением γ, т. е. получающийся присоединением к γ всех линий, соединяющих вершины γ, но не включенных в γ. Легко увидеть, что в $\sum\limits_{\{F\}}$ после несложной перегруппировки соответствующие операторы входят в комбинации $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}(1 - M_{\bar\gamma}^{a_{\bar\gamma}, b_{\bar\gamma}})$. Согласно (1) имеем

$$M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}(1 - M_{\bar\gamma}^{a_{\bar\gamma}, b_{\bar\gamma}}) = M_\gamma^{b_\gamma}(1 - M_{\bar\gamma}^{b_{\bar\gamma}}) I_\varphi (I_\rho - M_{\bar\gamma, \rho}^{a_{\bar\gamma}}) +$$
$$+ (1 - M_\gamma^{b_\gamma})(1 - M_{\bar\gamma}^{b_{\bar\gamma}}) M_{\gamma, \rho}^{a_\gamma} (I_\rho - M_{\bar\gamma, \rho}^{a_{\bar\gamma}}).$$

Если положить $a_{\bar\gamma} \geqslant a_\gamma$, $b_{\bar\gamma} \geqslant b_\gamma$ и провести несложный анализ того, как входят соответствующие параметры $(\varkappa_{\bar\gamma}, \zeta_\gamma)$ и $(\varkappa'_\gamma, \zeta'_\gamma)$ в ФА, то легко показать, что

$$M_\gamma^{b_\gamma}(1 - M_{\bar\gamma}^{b_{\bar\gamma}}) G^\rho(\underline{p} \mid \underline{\alpha}) = M_{\gamma, \rho}^{a_\gamma}(1 - M_{\bar\gamma}^{b_{\bar\gamma}}) G^\rho(\underline{p} \mid \underline{\alpha}) = 0,$$

т. е. члены в (П.1), содержащие операторы, отвечающие неполным подграфам, выпадают.

Литература

[1] *Аникин С. А., Завьялов О. И., Карчев Н. И.*– ТМФ, 1980, *44*, № 3, 291–306; 1981, *46*, № 1, 3–26. *Аникин С. А., Бордаг М., Завьялов О. И.*– ТМФ, 1983, *56*, № 2, 163–170.

[2] *Смирнов В. А.*– ТМФ, 1980, *44*, № 3, 307–320; 1981, *46*, № 2, 199–212.

[3] *Смирнов В. А.*– ТМФ, 1983, *59*, № 3, 373–387.

[4] *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.

Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета

Поступила в редакцию 3.X.1983 г.

R-OPERATION IN THEORIES WITH MASSLESS PARTICLES

Anikin S. A., Smirnov V. A.

In theories with massless particles the Bogoliubov – Parassiuk theorem is proved which describes the renormalization procedure with nonminimal subtractions generalizing the renormalization with a «soft mass».