



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Serov, The absolute convergence of Fourier series in generalized Nikol'skiĭ classes, *Differ. Uravn.*, 1978, Volume 14, Number 3, 499–503

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

February 17, 2025, 13:07:27



УДК 517.946

В. С. СЕРОВ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ НИКОЛЬСКОГО

В N -мерной области G рассмотрим дифференциальный эллиптический оператор $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ порядка m с коэффициентами $a_\alpha(x) \in C^\infty(G)$. Предположим, что $A(x, D)$ имеет самосопряженное положительно определенное расширение \hat{A} , которое к тому же имеет полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственных функций в $L_2(G)$. Тогда каждой функции f из $L_2(G)$ можно сопоставить ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \varphi_n(x), \quad (1)$$

где $f_n = (f, \varphi_n)_{L_2(G)}$, а ряд (1) суммируется по возрастанию собственных значений.

В данной работе рассматривается абсолютная сходимость рядов (1).

В работе [1] Я. Петре доказана абсолютная сходимость ряда (1)

для функций из класса, эквивалентного $B_{2,1}^{\frac{N}{2}}(G)$. В работе [2] автором настоящей заметки было доказано, что в классах Бесова эта теорема не улучшаема. А именно для каждой точки x_0 из области G была построена функция с компактным носителем, содержащимся в области G , которая при любом $\theta > 1$ принадлежит классу $B_{2,\theta}^{N/2}(G)$ и у которой ряд (1) сходится абсолютно в точке x_0 .

Таким образом, в классе Никольского $H_2^{N/2}(G)$ нет абсолютной сходимости рядов Фурье. Но известно, что для любого $\epsilon > 0$ ряд Фурье по собственным функциям эллиптического оператора любой функции из $H_2^{\frac{N}{2} + \epsilon}(G)$ сходится абсолютно. Более подробные сведения об абсолютной сходимости можно найти в обзорной статье [3].

В настоящей работе будут рассматриваться обобщенные классы Ни-

кольского $H_2^{\frac{N}{2}, v}(G)$, где слабоколеблющаяся функция v принадлежит некоторому классу V . В частности, классу V принадлежат все функции, которые при больших t равны $(\ln t)^{\beta_1}$, $(\ln \ln t)^{\beta_2}$ и т. д., где β_j — любые вещественные числа, а также любое их конечное произведение. Заметим, что все эти функции v таковы, что $1/v$ также принадлежат классу V . Определение классов $H_2^{\frac{N}{2}, v}$ и V можно найти в работе [4].

Символом $\overset{\circ}{H}_p^{\alpha, v}(G)$ обозначим класс функций, полученный замыканием в норме пространства $H_p^{\alpha, v}$ множества функций $C_0^\infty(G)$.

В данной работе будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f \in \overset{\circ}{H}_2^{\frac{N}{2}, v}(G)$, функция $1/v \in V$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n} < \infty$. Тогда ряд (1) для функции f сходится абсолютно в каждой точке области G и равномерно абсолютно на каждом компакте K из области G .

О неулучшаемости теоремы 1 говорит следующая

Теорема 2. Пусть функция $v \in V$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n} = +\infty$. Тогда для каждой точки x_0 из области G найдется функция с компактным носителем, содержащимся в области G , которая принадлежит классу $\overset{\circ}{H}_2^{N/2, v}(G)$ и у которой ряд (1) расходится абсолютно в точке x_0 .

Прежде чем доказывать теоремы 1 и 2, введем некоторые объекты, с которыми нам придется работать.

Легко показать, что в дискретном случае спектральная функция $\theta(x, y, \lambda)$ оператора \hat{A} будет иметь следующий вид:

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(x) \cdot \overline{\varphi_n(y)}. \quad (2)$$

Поэтому спектральное разложение $E_\lambda f$ будет представлять собой частичные суммы ряда Фурье (1), так как

$$E_\lambda f = \int_G \theta(x, y, \lambda) f(y) dy = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n \cdot \varphi_n(x). \quad (3)$$

Нам понадобится норма в $L_2(G)$ разности $E_{2\lambda} f - E_\lambda f$, которая в нашем случае будет равна величине

$$\|E_{2\lambda} f - E_\lambda f\|_{L_2(G)} = \left(\sum_{\lambda \leq \lambda_n < 2\lambda} |f_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Кроме того, для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}_2^\alpha(G)$ будем пользоваться неравенством, которое доказано в работе Ш. А. Алимова [5]:

$$\|E_{2\lambda} f - E_\lambda f\|_{L_2(G)} \leq c \lambda^{-\frac{\alpha}{m}} \|f\|_{H_2^\alpha}. \quad (5)$$

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. В силу основного результата [4] для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}_2^{N/2, v}(G)$ существует функция $g \in \overset{\circ}{H}_2^{\frac{N}{2} - m\tau}(G)$ такая, что

$$f - \hat{A}^{-\tau} v(\hat{A}^{1/m}) g \in \Delta(\hat{A}), \quad (6)$$

где $\Delta(\hat{A})$ — множество функций, принадлежащих области определения любой степени оператора \hat{A} , а число $\tau > 0$ выбрано таким образом, чтобы $\frac{N}{2} - m\tau > 0$.

Таким образом, из соотношения (6) следует, что для абсолютной сходимости ряда (1) функции f достаточно доказать абсолютную сходимость ряда (1) функции $\tilde{A}^{-\tau}v(\tilde{A}^{1/m})g$. По спектральной теореме ряд (1) функции $\tilde{A}^{-\tau}v(\tilde{A}^{1/m})g$ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{1/m}) g_n \cdot \varphi_n(x). \tag{7}$$

Для ряда в (7) можно получить следующее формальное неравенство:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{1/m}) g_n \cdot \varphi_n(x) \right| \leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{1/m}) |g_n| \cdot |\varphi_n(x)|. \tag{8}$$

Далее, используя свойства слабоколеблющихся функций, правую часть неравенства (8) можно оценить сверху величиной

$$c \sum_{k=0}^{\infty} [2^{-km\tau} v(2^k)] \sum_{2^k \leq \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |g_n| \cdot |\varphi_n(x)|. \tag{9}$$

Оценивая внутреннюю сумму в (9), по неравенству Гёльдера получим следующую оценку сверху:

$$c \sum_{k=0}^{\infty} [2^{-km\tau} v(2^k)] \left(\sum_{2^k \leq \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |g_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^k \leq \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |\varphi_n(x)|^2 \right)^{1/2}. \tag{10}$$

В работе Л. Гординга [6] для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ доказана следующая асимптотическая оценка:

$$\theta(x, x, \lambda) = \lambda^{N/m} (A(x) + o(1)), \tag{11}$$

которая равномерна на каждом компакте K из области G . Учитывая соотношения (2), (4), (5), (11) и тот факт, что функция $g \in \overset{\circ}{H}_{2^{\frac{N}{2}-m\tau}}(G)$, для (10) получим следующую оценку сверху:

$$c \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(2^k) \right) \|g\|_{L^2}^{\frac{N}{2}-m\tau}, \tag{12}$$

равномерную на каждом компакте K из G . Из (12) следует, что теорема 1 доказана, так как ряд в (12) сходится тогда и только тогда, когда

сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v(n)/n$.

Прежде чем доказывать теорему 2, нам необходимо доказать следующую лемму.

Л е м м а. Для любого $a > 0$ и для любой точки $x_0 \in G$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $\mu \geq \mu_0$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{a\mu \leq \lambda_n^{1/m} < 2\mu a} |\varphi_n(x_0)|^2 \geq c\mu^N, \tag{13}$$

где положительная постоянная c зависит от a , μ_0 и от точки x_0 , но не зависит от μ .

Доказательство. Учитывая соотношение (11), сумму в левой части (13) можно представить в следующем виде:

$$\mu^N a^N [A(x_0) [2^N - 1] + o(1)]. \quad (14)$$

Отсюда вытекает, что μ_0 можно выбрать таким образом, чтобы для всех $\mu \geq \mu_0$ выполнялось неравенство (13). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим оператор $\hat{A}^{-\frac{N}{m}} \nu(\hat{A}^{\frac{1}{m}})$. В силу основных результатов работы [7] Ш. А. Алимова и работы [4] можно утверждать, что этот оператор является интегральным с ядром

$$E(x, y) + Q(x, y).$$

При этом функция $E(x, y) \in \overset{\circ}{H}_1^{N, \nu}(G)$ при каждом фиксированном x (или y), а оператор с ядром $Q(x, y)$ переводит $L(B)$ в $\Delta(\hat{A})$, где B — любой шар из области G . О функции $E(x, y)$ можно утверждать, что она с компактным носителем, который содержится в шаре с центром в точке x_0 .

На основании теорем вложения можно утверждать, что функция $E(x, y) \in \overset{\circ}{H}_2^{\frac{N}{2}, \nu}(G)$ при каждом фиксированном x . Легко показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(x_0) \int_{B_0} E(x_0, z) \overline{\varphi_n(z)} dz + \sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(x_0) \int_G Q(x_0, z) \overline{\varphi_n(z)} dz = \\ = \sum_{\lambda_n < \lambda} \lambda_n^{-N/m} \nu(\lambda_n^{1/m}) |\varphi_n(x_0)|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что правая часть в равенстве (15) при $\lambda \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$. Поскольку в этом случае для функции $E(x_0, z)$ ряд Фурье будет расходиться абсолютно в точке x_0 , то ряд Фурье для функции $Q(x_0, z)$ абсолютно сходится.

Для ряда в правой части равенства (15) можно получить следующую оценку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-N/m} \nu(\lambda_n^{1/m}) |\varphi_n(x_0)|^2 \geq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-Nk} \nu(2^k) \sum_{2^k \leq \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |\varphi_n(x_0)|^2.$$

Отсюда с использованием леммы получается следующая оценка снизу для правой части равенства (15):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-N/m} \nu(\lambda_n^{1/m}) |\varphi_n(x_0)|^2 \geq c \sum_{k=0}^{\infty} \nu(2^k), \quad (16)$$

где c — константа, большая 0. Из неравенства (16) следует утверждение теоремы 2, так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \nu(2^k)$ сходится или расходится одновременно с рядом

менно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n)/n$.

З а м е ч а н и е 1. Так как члены ряда в правой части равенства (15) являются положительными, то в теореме 2 фактически доказана расходимость ряда Фурье для функции $E(x_0, z)$ в точке x_0 .

З а м е ч а н и е 2. Мы предполагали, что расширение $\hat{A} \geq cI$ имеет только дискретный спектр и полную ортонормированную систему собственных функций. Все результаты остаются справедливыми и в случае непрерывного спектра, если под соответствующей абсолютной сходимостью понимать сходимость следующего интеграла: $\int_c^\infty |dE_{\lambda}|$, где

$\{E_{\lambda}\}$ — разложение единицы, отвечающее самосопряженному расширению оператора A , и если под соответствующей сходимостью или расходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n}$ понимать сходимость или расходимость соответственно интеграла $\int_c^\infty \frac{v(t)}{t} dt$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ш. А. Алимову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Peetre J. Absolute convergence of eigen function expansion. Math. Ann., 169: 2, 1967.
2. Серов В. С. Матем. заметки, **19**, № 3, 1976.
3. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Успехи матем. наук, 31:6, 1976.
4. Серов В. С. Дифференц. уравнения, **12**, № 10, 1976.
5. Алимов Ш. А. Матем. сб., 101 (143); № 1 (9), 1976.
6. Гординг Л. Математика, сб. переводов, вып. 3, т. I, 1957.
7. Алимов Ш. А. Дифференц. уравнения, **8**, № 9, 1972.

Поступила в редакцию
14 марта 1977 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова