V. I. Meleshko, Regularized nonorthogonal factorizations and pseudoinversions of perturbed matrices,
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1986, Volume 26, Number 4, 485–498

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 519.61

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ И ПСЕВДООБРАЩЕНИЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ МАТРИЦ

МЕЛЕШКО В. И.

(Харьков)

Предлагаются и исследуются регуляризованные методы Гаусса и Холецкого факторизации и псеводообращения возмущенных матриц неполного ранга, возникающих при решении некорректных задач.

При численном решении некорректных задач [1]–[3], сводящихся к псевдообращению прямоугольной возмущенной, возможно неполного ранга матрицы, довольно часто возникает необходимость использовать методы неортогональной факторизации типа Гаусса и Холецкого [3], [4]. В настоящей работе предлагаются их конструктивные регуляризованные модификации в общем случае псевдообращения матриц неполного ранга. Для этих модификаций устанавливаются оценки возмущений для получаемых на их основе приближений, доказываются устойчивость предлагаемых алгоритмов и пределы изменения параметров регуляризации, обеспечивающие эту устойчивость. Исследование регуляризованного метода Холецкого ведется путем построения общей теории возмущений $U^*\check{I}U$-факторизаций для симметричных знаконеопределенных матриц неполного ранга. Отметим, что близкие алгоритмы псевдообращения прямоугольных (квадратных вырожденных) матриц ранее указывались в [4], [5], но нигде анализ возмущений и тем самым обоснование этих алгоритмов для матриц неполного ранга не проводились.

§ 1. Регуляризованные методы неортогональной факторизации

Всюду в дальнейшем нормы векторов евклидовы, а нормы матриц спектральные; для упрощения изложения операторы перестановки строк и столбцов, связанные с выбором «ведущего» элемента на каждом шаге, опущены, поскольку их введение очевидно. Псевдообратная матрица понимается как матрица, порождающая среднеквадратичные решения минимальной евклидовой нормы [6], [7].

В регуляризованном методе Гаусса (р. м. Г.) строится последовательность матриц $A^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots, A^{(0)}=A$, в виде

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $A_{11}^{(k)}$ — обратимая матрица размера $k\times k$.

Для этого на k-м шаге у имеющейся клетки $A_{22}^{(k)}$ ищется ведущий τs-й элемент

$$|a_{\tau s}^{(k)}|=\max_{k<i\leqslant n, k<j\leqslant m} |a_{ij}^{(k)}|,$$

где $a_{ij}^{(k)}$ есть ij-й элемент матрицы $A^{(k)}$.

Если $|a_{\tau s}^{(k)}|>\varepsilon$, то делается перестановка τ-й строки и s-го столбца с $(k+1)$-ми строкой и столбцом матрицы $A^{(k)}$. Затем пересчитывается по полученной после перестановок клетке

$$(1.2)\qquad A_{22}^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ w^{(k)} & W^{(k)} \end{pmatrix}$$

матрица $A^{(k+1)}$, при этом

$$(1.3)\qquad A^{(k+1)}=\begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & \begin{pmatrix} a_{k+1,\,k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ \alpha^{(k)} & A_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где $A_{22}^{(k+1)}=W^{(k)}-\alpha^{(k)}d^{(k)}$, $\alpha^{(k)}=(a_{k+1,k+1}^{(k)})^{-1}w^{(k)}$.

Если $|a_{\tau s}^{(k)}|\leqslant\varepsilon$, то процесс факторизации прекращается и определяется неортогональная факторизация матрицы A в виде

$$(1.4)\qquad A_\varepsilon=U_kR_k,\quad U_k^*=(U_1^*\ \vdots\ U_2^*),\quad R_k=(R_1\ \vdots\ R_2),\quad U_2=A_{21}^{(k)},$$

$$R_2=A_{12}^{(k)},\quad U_1=\begin{pmatrix} 1 & & \\ a_{21}^{(k)} & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^{(k)} & a_{k2}^{(k)} & \ldots\ 1 \end{pmatrix},\quad R_1=\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1k}^{(k)} \\ & a_{22}^{(k)} & \ldots & a_{2k}^{(k)} \\ & & \cdots & \cdots \\ 0 & & & a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Приближение для псевдообратной матрицы строится таким образом:

$$(1.5)\qquad A_\varepsilon^+=R_k^+U_k^+.$$

Предложение 1. *Если A не возмущена и $\varepsilon=0$, то в р.м.Г. будет сделано ровно r шагов факторизации, где $r=\operatorname{rank}A$, и*

$$(1.6)\qquad A_\varepsilon=A=U_rR_r,\qquad A^+=R_r^+U_r^+.$$

Действительно, если будет не r шагов факторизации, то UR будет иметь ранг, отличный от r. Второе соотношение в (1.6) следует из теоремы 6 работы [7].

Вычисление R^+ в (1.5) (U^+ в (1.5)), когда R (соответственно, U^*) — верхнетрапецеидальная матрица, эффективно проводится ортогональной факторизацией $R=SQ$ с помощью преобразований Гивенса или Хаусхолдера [3], [4], где S — нижнетреугольная квадратная, Q — ортогональная матрицы. Тогда $R^+=Q^*S^{-1}$.

Перейдем к описанию регуляризованного метода Холецкого (р. м. Х.) факторизации симметричных вырожденных знаконеопределенных матриц.

Пусть имеется симметричная матрица A порядка n с элементами a_{ij}. Будем строить последовательность матриц

$$(1.7)\qquad A^{(k)}=\begin{pmatrix} A_1^{(k)} & A_2^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k)} \end{pmatrix},\qquad k=0,1,\ldots,$$

где $A_1^{(k)}$ — верхнетреугольная матрица размера $k\times k$, $A_2^{(k)}$ — прямоугольная матрица, $A_3^{(k)}$ — симметричная матрица порядка $n-k$, 0 — нулевая матрица.

Для этого у клетки $A_3^{(k)}$ определяется ведущий элемент путем сравнения максимальных ее элементов, стоящих на диагонали и вне диагонали:

$$|a_{\zeta\zeta}|=\max_{k<i\leqslant n}|a_{ii}^{(k)}|,\qquad |a_{\tau s}^{(k)}|=\max_{k<i\leqslant n,i<j\leqslant n}|a_{ij}^{(k)}|.$$

Если $|a_{\zeta\zeta}^{(k)}|\geqslant|a_{\tau s}^{(k)}|$ и $|a_{\zeta\zeta}^{(k)}|>\varepsilon$, то у матрицы $A^{(k)}$ меняются местами ζ-е строка и столбец с $(k+1)$-ми строкой и столбцом соответственно.

После перестановок определяется матрица $A^{(k+1)}$, которая отличается от полученной после перестановок $A^{(k)}$ только элементами клетки

$$(1.8\text{а})\qquad A_3^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ d^{(k)*} & W_k \end{pmatrix},$$

принимающей вид

$$(1.8\text{б})\qquad \begin{pmatrix} |a_{k+1,k+1}^{(k)}|^{1/2} & \alpha^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

где $\alpha^{(k)}=|a_{k+1,k+1}^{(k)}|^{-1/2}d^{(k)}\operatorname{sign}a_{k+1,k+1}^{(k)}$, $A_3^{(k+1)}=W_3^{(k)}-(a_{k+1,k+1}^{(k)})^{-1}d^{(k)*}d^{(k)}$. Делается переход к следующему шагу факторизации.

Если $|a_{\zeta\zeta}^{(k)}|<|a_{\tau s}^{(k)}|$ и $|a_{\tau s}^{(k)}|>\varepsilon$, то вводится ортогональное преобразование

$$(1.9)\qquad G_k=(g_{ij})_{i,j=1}^{n},$$

элементы которого совпадают с единичной матрицей, за исключением четырех элементов, определяемых следующим образом: $g_{\tau\tau}=-g_{ss}=g_{\tau s}=$ $=g_{s\tau}=2^{-1/2}$. Вычисляется матрица

$$(1.10)\qquad \check{A}^{(k)}=G_kA^{(k)}G_k,$$

у которой затем τ-й столбец и s-я строка переставляются с $(k+1)$-м столбцом и $(k+2)$-й строкой так, чтобы полученный $(k+1)$-й диагональный элемент был наибольшим. Далее делается пересчет в соответствии с (1.8) элементов клетки $\check{A}_3^{(k)}$ и осуществляется переход к следующему шагу факторизации, при этом за $A^{(k+1)}$ принимается полученная $\check{A}^{(k+1)}$.

Как только $|a_{\tau s}^{(k)}|\leqslant\varepsilon$ и $|a_{\zeta\zeta}^{(k)}|\leqslant\varepsilon$, так процесс факторизации прекращается и неортогональная факторизация матрицы A определяется в виде

$$(1.11)\qquad A_\varepsilon=\bar{U}_\varepsilon^*\check{I}\bar{U}_\varepsilon,\quad \bar{U}_\varepsilon=U_kG_{(k)},$$

где верхнетрапецеидальная матрица $U_k=(A_1^{(k)}\ :\ A_2^{(k)})$ составляется из клеток $A_1^{(k)}$ и $A_2^{(k)}$ полученной матрицы (1.7); $G_{(k)}=G_k\ldots G_1$, где $G_i=I$, если преобразование (1.9) не проводилось; $\check{I}$ — диагональная матрица с k-м диагональным элементом, определяемым как $\check{i}_k=\operatorname{sign}a_{kk}^{(k-1)}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть симметричная матрица A порядка n имеет ранг $r\leqslant n$ и параметр регуляризации взят $\varepsilon=0$. Тогда в р.м.Х. будет сделано ровно r шагов факторизации и*

$$(1.12)\qquad A_\varepsilon=A,\qquad A^+=G_{(r)}U_r^+\check{I}U_r^{+,*}\,G_{(r)}^*.$$

Если дополнительно A — неотрицательно-определенная матрица, то ведущим элементом является диагональный элемент, преобразование (1.9) нет необходимости проводить, $\check{I}$ является единичной матрицей и тем самым

$$(1.13)\qquad A_\varepsilon=U_r^*U_r=A,\qquad A_\varepsilon^+=U_r^+U_r^{+,*}.$$

Действительно, предположим, что матрица A неотрицательно-определенная и в то же время на каком-то шаге факторизации оказалось, что $|a_{\tau s}^{(k)}|>|a_{ss}^{(k)}|>0$. Тогда $|a_{\tau s}^{(k)}|>|a_{\tau\tau}^{(k)}|$ и $|a_{\tau s}^{(k)}|>|a_{ss}^{(k)}|$. У матрицы $\breve{A}$ диагональные элементы после преобразования G_k по формуле (1.10) примут вид

$$\breve{a}_{\tau\tau}^{(k)}=a_{s\tau}^{(k)}+{}^1/_2(a_{\tau\tau}^{(k)}+a_{ss}^{(k)}),\qquad \breve{a}_{ss}^{(k)}=-a_{s\tau}^{(k)}+{}^1/_2(a_{\tau\tau}^{(k)}+a_{ss}^{(k)})$$

и тем самым (с учетом указанных соотношений) станут разных знаков. Поэтому после факторизации получим, что у диагональной матрицы $\breve{I}$ есть единичный отрицательный элемент, а это противоречит неотрицательной определенности A.

§ 2. Исследование возмущений р. м. Г.

Предположим, что вместо истинной матрицы A задана возмущенная матрица $\tilde{A}=A+B$, по которой ведутся вычисления описанными методами факторизации и псевдообращения, где B — матрица возмущений. Промежуточные переменные, которые получаются в этих методах при вычислениях, проводимых по возмущенной матрице $\tilde{A}$, пометим тильдой. Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к неортогональным факторизациям и справедливые для невозмущенной матрицы A. Всюду в дальнейшем $\ker A$, $R(A)$ — ядро и образ A, P_X — ортопроектор на подпространство X, $P_X{}^\perp=I-P_X$, $X^\perp$ — ортогональное дополнение X.

Лемма 1. *Предположим, что имеется размера $r\times r$ клеточная верхнетреугольная обратимая матрица*

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix},\tag{2.1}$$

у которой $A_1{}^*A_1\geqslant\lambda_1{}^2I>0$, $A_3{}^*A_3\geqslant\lambda_3{}^2I>0$, $\|A_2\|\leqslant\lambda_2$. Тогда

$$\|A^{-1}\|\leqslant 2^{1/2}\{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2-[(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2)^2-4\lambda_1{}^2\lambda_3{}^2]^{1/2}\}^{-1/2},\tag{2.2}$$

а если дополнительно $\lambda_1{}^2\leqslant\lambda_3{}^2$, $\lambda_2{}^2\leqslant t\lambda_1{}^2$, $t\geqslant 0$, то

$$\|A^{-1}\|\leqslant 2^{1/2}[2+t-(t^2+4t)^{1/2}]^{-1/2}\lambda_3{}^{-1}.\tag{2.3}$$

Для доказательства рассмотрим обратную к (2.1) матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1{}^{-1} & -A_1{}^{-1}A_2A_3{}^{-1}\\ 0 & A_3{}^{-1}\end{pmatrix}.$$

Используя это выражение, получаем

$$\|A^{-1}\|^2=\max_{\|x\|\leqslant 1}(A^{-1,*}A^{-1}x,x)=\max_{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2\leqslant 1}[\|A_1{}^{-1}(x_1-A_2A_3{}^{-1}x_2)\|^2+$$
$$+\|A_3{}^{-1}x_2\|^2]\leqslant\max_{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2\leqslant 1}[\lambda_1{}^2(\|x_1\|+\lambda_2\lambda_3{}^{-1}\|x_2\|)^2+\lambda_3{}^{-2}\|x_2\|^2].\tag{2.4}$$

Если взять двумерные матрицы

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^{-1} & \lambda_1{}^{-1}\lambda_3{}^{-1}\lambda_2\\ 0 & \lambda_3{}^{-1}\end{pmatrix},$$

то

$$\|C^{-1}\|^2=\max_{\tau_1{}^2+\tau_2{}^2\leqslant 1}[\lambda_1{}^{-2}(\tau_1+\lambda_2\lambda_3{}^{-1}\tau_2)^2+\lambda_3{}^{-1}\tau_2{}^2]=\tag{2.5}$$
$$=2\{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2-[(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2)^2-4\lambda_1{}^2\lambda_3{}^2]^{1/2}\}^{-1},$$

где при вычислении квадрата нормы $|C^{-1}|^2$ использовалось минимальное собственное значение двумерной матрицы CC^*, которое легко непосредственно вычисляется, а обратная величина к нему и дает (2.5).

Сравнивая (2.4), (2.5), находим (2.2), а из (2.2), (2.4) следует (2.3).

Для возмущенной прямоугольной матрицы $\tilde{A}=A+B$ введем неортогональную факторизацию вида

$$(2.6)\qquad \tilde{A}\equiv\begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{pmatrix}=\tilde{U}\tilde{R}=\begin{pmatrix}\tilde{U}_1\tilde{R}_1 & \tilde{U}_1\tilde{R}_2\\ \tilde{U}_2\tilde{R}_1 & \tilde{U}_2\tilde{R}_2+\tilde{R}_3\end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix}\tilde{U}_1 & 0\\ \tilde{U}_2 & I\end{pmatrix},\qquad \tilde{R}=\begin{pmatrix}\tilde{R}_1 & \tilde{R}_2\\ 0 & \tilde{R}_3\end{pmatrix},$$

$\tilde{U}_1$, $\tilde{R}_1$ — обратимые матрицы (необязательно треугольные и с любыми диагональными элементами) размера $k\times k$, $k<r=\operatorname{rank} A$.

Теорема 1. *Предположим, что исходная прямоугольная матрица A имеет ранг r и матрица возмущений $B=\tilde{A}-A$ такова, что выполняется условие*

$$(2.7)\qquad \|A^+\|\|B\|<1.$$

Тогда для любых k таких, что $1\leqslant k<r$, и для любых факторизаций (2.6) *имеют место оценки*

$$(2.8а)\qquad \|\tilde{R}_3\|\geqslant\|A^+\|^{-1}-\|B\|,\qquad \|\tilde{R}_3{}^+\|\leqslant\|A^+\|,$$

$$(2.8б)\qquad \|\tilde{R}_3\|_E\geqslant(r-k)^{1/2}(\|A^+\|^{-1}-\|B\|),$$

где $\|T\|_E$ — евклидова норма матрицы T.

Доказательство. Из (2.7) следует, что

$$(2.9)\qquad \tilde{R}_3=\tilde{A}_{22}-\tilde{A}_{21}\tilde{A}_{11}{}^{-1}\tilde{A}_{12}.$$

Введем для $\tilde{A}$ сингулярное разложение $\tilde{A}=Q\tilde{\Sigma}V$, где Q, V — ортогональные матрицы, $\tilde{\Sigma}$ — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят сингулярные числа $\tilde{\sigma}_j$ ($\tilde{\sigma}_k\leqslant\tilde{\sigma}_{k+1}$), $j=1, 2,\ldots, s$, $r\leqslant s\leqslant\min\{n, m\}$. В силу условия (2.7), r из этих чисел удовлетворяют соотношениям

$$(2.10)\qquad \sigma_i-|B|\leqslant\tilde{\sigma}_i\leqslant\sigma_i+\|B\|,\qquad i=1, 2,\ldots, r.$$

Определим $Q=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}$ и $V=(V_1 \vdots V_2)$, где Q_1, $V_1{}^*$ — клетки размера $k\times s$. Тогда можно записать

$$\tilde{A}'=\begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\tilde{\Sigma}V_1 & Q_1\tilde{\Sigma}V_2\\ Q_2\tilde{\Sigma}V_1 & Q_2\tilde{\Sigma}V_2\end{pmatrix}.$$

Поэтому (2.9) записывается в виде

$$\tilde{R}_3=Q_2\tilde{\Sigma}[I-V_1(Q_1\tilde{\Sigma}V_1)^{-1}Q_1\tilde{\Sigma}]V_2=Q_2\tilde{\Sigma}(I-N_X)V_2,$$

где введен косопроектор $N_X=V_1(Q_1\tilde{\Sigma}V_1)^{-1}Q_1\tilde{\Sigma}$ на подпространство $X=R(V_1)$ — образ матрицы V_1, так как N_X идемпотентен, т. е. $N_XN_X=N_X$.

Из ортогональности Q следует, что $Q_2{}^*Q_2=I-Q_1{}^*Q_1$. Поэтому

$$\tilde{R}_3{}^*\tilde{R}_3=V_2{}^*(I-N_X)^*\tilde{\Sigma}Q_2{}^*Q_2\tilde{\Sigma}(I-N_X)V_2=$$
$$=V_2{}^*(I-N_X)^*\tilde{\Sigma}(I-Q_1{}^*Q_1)\tilde{\Sigma}(I-N_X)V_2=V_2{}^*(I-N_X)^*\tilde{\Sigma}^2(1-N_X)V_2.$$

Тем самым сингулярные числа матрицы $\widetilde{R}_3$ совпадают с сингулярными числами матрицы $L=\widetilde{\Sigma}(I-N_X)V_2$. Из ортогональности V следует соотношение $V_2V_2^*=I-V_1V_1^*$, используя которое, получаем

$$LL^*=\widetilde{\Sigma}(I-N_X)V_2V_2^*(I-N_X)\widetilde{\Sigma}=$$
$$=\widetilde{\Sigma}(I-N_X)(I-V_1V_1^*)(I-N_X)^*\widetilde{\Sigma}=\widetilde{\Sigma}(I-N_X)(I-N_X)^*\widetilde{\Sigma}.$$

Отсюда следует, что сингулярные числа у L и тем самым у $\widetilde{R}_3$ совпадают с сингулярными числами матрицы $M=\widetilde{\Sigma}(I-N_X)$. Заметим, что матрица $I-N_X$, порождаемая косопроектором N_X, обладает тем свойством, что $\|(I-N_X)e\|\geqslant\|(I-P_X)e\|$ для любых $e\in R^s$, где P_X — ортопроектор на подпространство X. Поэтому

$$(2.11)\qquad \|M^*M\|=\|\widetilde{R}_3\|^2=\max_{\|e\|=1}(\widetilde{\Sigma}^2(I-N_X)e,\ (I-N_X)e)\geqslant$$
$$\geqslant\min_{\dim X=k}\ \max_{\|e\|=1}(\widetilde{\Sigma}^2(I-P_X)e,\ (I-P_X)e)\geqslant$$
$$\geqslant(\sigma_{r-k}-\|B\|)^2\geqslant(\|A^+\|^{-1}-\|B\|)^2,$$

где учтено, что из (2.10) следует $\tilde{\sigma}_1\geqslant(\|A^+\|^{-1}-\|B\|)$. Из (2.11) вытекает первая оценка в (2.8а).

С другой стороны, для любых $y\in X^\perp$ имеет место

$$(M^*My,\ y)=(\widetilde{\Sigma}^2(I-N_Xy),\ I-N_Xy)\geqslant$$
$$\geqslant(\widetilde{\Sigma}^2(I-P_X)y,\ (I-P_X)y)\geqslant\|\widetilde{A}^+\|^{-1}\|y\|,$$

что доказывает вторую оценку в (2.8а).

В евклидовых нормах матриц справедлива цепочка неравенств

$$\|\widetilde{R}_3\|_E^2=\operatorname{tr}M^*M=\operatorname{tr}(I-N_X)^*\widetilde{\Sigma}^2(I-N_X)=\sum_{i=1}^{s}\tilde{\sigma}_i^2\|n_i\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{s}\tilde{\sigma}_i^2\|p_i\|^2\geqslant\sum_{i=1}^{s-k}\tilde{\sigma}_i^2\geqslant(r-k)\tilde{\sigma}_{s-r+1}^2\geqslant(r-k)\,(\|A^+\|^{-1}-\|B\|)^2,$$

где n_i есть i-й столбец косопроектора $I-N_X$, p_i есть i-й столбец ортопроектора P_X. Здесь использовано свойство

$$\sum_{i=1}^{s}\|p_i\|^2=s-k.$$

Тем самым доказано (2.8б).

Всюду в дальнейшем $\beta=\|B\|$, $\sigma_1=\|A^+\|^{-1}$, $\sigma_r=\|A\|$.

Лемма 2. *Если в р.м.Г. вычисления ведутся по возмущенной матрице $\widetilde{A}$, ранг невозмущенной матрицы A равен r и возмущения B удовлетворяют (2.7), то на каждом k-м шаге, $k=0, 1, \ldots, r-1$, ведущий элемент удовлетворяет соотношению*

$$(2.12)\qquad \|\tilde{a}_{\tau s}^{(k)}\|\geqslant(r-k)^{1/2}[(n-k)(m-k)]^{-1/2}(\sigma_1-\beta)\geqslant\omega_{nmr}(\sigma_1-\beta)$$

и выполняются оценки

$$(2.13)\qquad \|(\widetilde{A}_{11}^{(k)})^{-1}\|\leqslant2^{k-1}\omega_{nmr}^{-1}(\sigma_1-\beta)^{-1}\prod_{i=1}^{k-1}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1},$$

$$(2.14)\qquad \|\widetilde{R}_1^{-1}\|\leqslant2^{(k-1)/2}\omega_{nmr}^{-1}(\sigma_1-\beta)^{-1}\prod_{i=1}^{k-1}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2},$$

$$(2.15)\qquad \|\tilde{U}_1^{-1}\|\leqslant 2^{(k-1)/2}\prod_{i=1}^{k-1}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2},$$

где $\tilde{A}_{11}^{(k)}=\tilde{U}_1\tilde{R}_1$; $\tilde{U}_1$, $\tilde{R}_1$ *определены в* (1.4); $\omega_{nmr}=\min\{[(n-r+1)\times\times(m-r+1)]^{-1/2}, r^{1/2}(nm)^{-1/2}\}$.

В силу теоремы 1, на каждом шаге ведущий элемент будет удовлетворять неравенствам (2.12). При этом $d_*^{(k-i)}$ в разложении

$$T_{i+1}=\begin{pmatrix} a_{k-i,k-i}^{(k-i)} & d_*^{(k-i)} \\ 0 & T_i \end{pmatrix},$$

где $T_1=a_{kk}^{(k)}$, $i=1, 2, \dots, k-1$, будет удовлетворять $\|d_*^{(k-i)}\|\leqslant\sqrt{i}\,|a_{k-i,k-i}^{(k-i)}|$.

Поэтому если обозначить $\|T_i^{-1}\|=\psi_i$ и учесть, что $|a_{k-i,k-i}^{(k-i)}|\geqslant\psi_i^{-1}$, то из леммы 1 получим соотношение

$$(2.16)\qquad \psi_{i+1}\leqslant 2^{1/2}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2}\psi_i,\quad i=1, 2, \dots, k-1,$$

где $\psi_1=|\tilde{a}_{kk}^{(k)}|^{-1}\leqslant\omega_{nmr}^{-1}(\sigma_1-\beta)^{-1}$.

Так как в силу принятых обозначений $T_k=R_1$, то из (2.16) следует (2.14). Аналогично доказывается (2.15). Оценка (2.13) следует из соотношения $\|(A_{11}^{(k)})^{-1}\|<\|R_1^{-1}\|\|U_1^{-1}\|$ и оценок (2.14), (2.15).

Отметим, что в частных случаях невырожденных, например симметричных, матриц (см. ниже второе утверждение леммы 3) оценки (2.12)–(2.15) могут быть значительно улучшены.

Теорема 2. *Предположим, что в р.м.Г. вычисления ведутся по возмущенной матрице* $\tilde{A}=A+B$, *при этом* A — *прямоугольная матрица ранга* r. *Возмущения* B *удовлетворяют*

$$(2.17)\qquad \rho\beta<1$$

и для параметра регуляризации ε *выполняется*

$$(2.18)\qquad c\beta\leqslant\varepsilon<\omega_{nmr}(\sigma_1-\beta),$$

где $c=1+\rho[2\sigma_r+\beta+\sigma_r^2\rho(1-\rho\beta)^{-1/2}]$,

$$\rho=2^{r-1}\omega_{nmr}^{-1}(\sigma_1-\beta)^{-1}\prod_{i=1}^{r-1}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1}.$$

Тогда в р.м.Г. будет сделано ровно r *шагов факторизации, а когда дополнительно* $(c+1)\beta<\sigma_1$, *то для приближения* $\tilde{A}_\varepsilon^+$ *из* (1.5), *найденного приведенным р.м.Г., справедлива оценка*

$$(2.19)\qquad \|\tilde{A}_\varepsilon^+-A^+\|\leqslant\chi(1+c)\sigma_1^{-2}[1-\sigma_1^{-1}(1+c)\beta]^{-1}\beta,$$

где

$$\chi=\begin{cases}(1+\sqrt{5})/2, & \textit{если } A \textit{ неполного ранга } (r<\min\{n, m\}),\\ \sqrt{2}, & \textit{если } A \textit{ полного ранга } (r=\min\{n, m\}),\\ 1, & \textit{если } A \textit{ обратима } (r=n=m).\end{cases}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2, для ведущего элемента в р.м.Г. при проведении вычислений по возмущенной матрице $\tilde{A}$ на всех k шагах до r-го включительно будет выполняться (2.12). Поэтому при выборе параметра регуляризации ε, удовлетворяющего правому неравенству в (2.18), процесс факторизации до r-го шага останавливаться не будет. С другой стороны, используя оценку (2.13) и условие (2.17), получаем, что на каждом k-м шаге $\|\tilde{A}_{11}^{-1}\| \leqslant \rho$ и $\|\tilde{A}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\| \leqslant \rho^2(1-\rho\beta)^{-1}\beta$. Следовательно, для клетки $A_{22}^{(k)}$, указанной в (1.1), справедливы соотношения

$$\|\tilde{A}_{22}^{(k)} - A_{22}^{(k)}\| \leqslant \|\tilde{A}_{22} - A_{22}\| + \|A_{21}\tilde{A}_{11}^{-1}(\tilde{A}_{12} - A_{12}) +$$

$$+ A_{21}(\tilde{A}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1})A_{12} + (\tilde{A}_{21} - A_{21})\tilde{A}_{11}^{-1}\tilde{A}_{12}\| \leqslant$$

$$\leqslant \{1 + \rho[2\sigma_r + \beta + \sigma_r^2\rho(1-\rho\beta)^{-1}]\}\beta \equiv c\beta.$$

Поэтому на r-м шаге для ведущего элемента справедливо

$$\|\tilde{a}_{\tau s}^{(r)}\| \leqslant \|\tilde{A}_{22}^{(k)} - A_{22}^{(k)}\| \leqslant c\beta \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым процесс факторизации при выполнении левого неравенства в (2.18) прекратится именно на r-м шаге. В результате получим факторизацию $\tilde{A}_r = \tilde{U}_r \tilde{R}_r$ ранга r по типу (1.4), для которой

$$\|\tilde{A}_r - A_r\| \leqslant \left\| \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} - A_{11} & \tilde{A}_{12} - A_{12} \\ \tilde{A}_{21} - A_{21} & \tilde{A}_{22} - A_{22} - \tilde{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \right\| \leqslant (c+1)\beta.$$

Отсюда на основе теории возмущений псевдообратных матриц [8], [9] получаем оценку (2.19).

С л е д с т в и е 1. Если параметр регуляризации ε удовлетворяет условию $0 < \varepsilon < \omega_{nmr}\sigma_1$, то в р.м.Г. для любой матрицы A неполного ранга имеет место

$$\lim_{\|B\| \to 0} \tilde{A}_\varepsilon^+ = A^+,$$

т. е. р.м.Г. является устойчивым.

Т е о р е м а 3. *Если прямоугольная матрица A размера $r \times m$ имеет полный ранг, вычисления в р.м.Г. ведутся по возмущенной матрице $\tilde{A} = A + B$ и параметр регуляризации удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varepsilon < m^{-1/2}(\sigma_1 - \beta)$, то для приближения $\tilde{A}_\varepsilon^+$ из* (1.5) *в р.м.Г. имеет место оценка*

$$\|\tilde{A}_\varepsilon^+ - A^+\| \leqslant \sigma_1^{-2}(1 - \sigma_1^{-1}\beta)^{-1}\beta.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, для матриц полного ранга параметр регуляризации ε в р.м.Г. можно брать нулевым, а оценка возмущений псевдообращаемой матрицы значительно улучшается по сравнению с оценкой (2.19), справедливой для матриц неполного ранга.

§ 3. Исследование возмущений р. м. X.

Для получения оценок возмущений факторизаций в приведенном выше р. м. X. в общем случае симметричных знаконеопределенных возмущенных матриц сначала укажем новые общие результаты теории возмущений симметричных факторизаций.

Введем $\mathfrak{R}_{rn}$ — пространство верхнетрапецеидальных матриц, состоящее из трапецеидальных матриц $N = (N_1 \vdots N_2)$ размера $r \times n$, в которых N_1 — верхнетреугольная невырожденная матрица размера $r \times r$, N_2 — прямоугольная $[r \times (n-r)]$-матрица.

Пусть имеются две неортогональные факторизации: $A = U^* \check{I} U$ и $\tilde{A} = \tilde{U}^* \check{\tilde{I}} \tilde{U}$, где $U \in \mathfrak{R}_{rn}$, $\tilde{U} \in \mathfrak{R}_{rn}$, $\check{I}$ — диагональная матрица с элементами $+1$,

-1. Можно записать

(3.1) $$B \equiv \tilde{A} - A = (U+E)^* \check{I}(U+E) - A = U^* \check{I} E + E^* \check{I} U + E^* \check{I} E,$$

где $E = \tilde{U} - U$.

Определим линейный оператор S, действующий из $\mathfrak{R}_{rn}$ в пространство симметричных матриц $\mathfrak{H}_{nn}{}^r$ ранга r, следующим образом:

(3.2) $$SE \equiv F^*E + E^*F, \text{ где } F = \check{I}U,$$

и (3.1) перепишем в виде

(3.3) $$SE = B - E^* \check{I} E \equiv D.$$

Так как пространства $\mathfrak{H}_{rn}$, $\mathfrak{H}_{nn}{}^r$ изоморфны, то можно говорить об обратном операторе S^{-1}.

Теорема 4. *Обозначим $F = (F_1 \vdots F_2)$, где F_1 — верхнетреугольная матрица размера $r \times r$, F_2 — прямоугольная $[r \times (n-r)]$-матрица. Тогда для оператора S, определяемого соотношением* (3.2), *имеет место оценка*

(3.4) $$\|S^{-1}D\| \leqslant \tau \|D\| \qquad \forall D \in \mathfrak{H}_{nn}{}^r,$$

где

(3.5) $$\tau = \tau_1 + \varkappa \alpha_1 (1 + 2^{-1/2} r^{1/2} \alpha_1 \alpha_2), \qquad \tau_1 = r\alpha_1 [1 + 2^{-1/2} r^{1/2} (1 + \alpha_3^2)^{1/2} \alpha_3];$$

здесь $\alpha_1 = \|F_1^{-1}\|$, $\alpha_2 = \|F_2\|$, $\alpha_3 = \operatorname{cond} F_1$; $\varkappa = 1$, если F — верхнетрапецеидальная, и $\varkappa = 0$, если F — верхнетреугольная матрицы.

Доказательство начнем с частного случая, когда F, E — верхнетреугольные матрицы размера $r \times r$, т. е. $S: \mathfrak{R}_{rr} \to \mathfrak{H}_{rr}{}^r$. Для этого применим схему доказательства теоремы 2.1 работы [10], поскольку самой оценкой этой теоремы воспользоваться невозможно даже в частном случае треугольных F из-за того, что она содержит неточность: в выражении для τ_1, задаваемом соотношением (3.5), при доказательстве пропущен сомножитель $[1 + (\operatorname{cond} F_1)^2]^{1/2}$.

Заметим, что (3.4) имеет место для $r = 1$. Теперь предположим, что оценка (3.4) верна для $r \geqslant 1$ и некоторого $F \in \mathfrak{R}_{rr}$. Тогда для $\tilde{F} \in \mathfrak{R}_{r+1, r+1}$ (и $\tilde{E}$, $\tilde{D}$ соответственно) имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} F^* & 0 \\ f^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & e \\ 0 & \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^* & 0 \\ e^* & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & f \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & d \\ d^* & \delta \end{pmatrix},$$

откуда

(3.6) $$F^*E + E^*F = D, \qquad F^*e + E^*f = d, \qquad 2f^*e + 2\varphi\nu = \delta.$$

Если L — верхнетреугольная матрица, то

(3.7) $$\|L + L^*\|_E \geqslant 2^{1/2} \|L\|_E,$$

где $\|L\|_E$ — евклидова норма матрицы L.

Учитывая, что из (3.2), (3.3) следует $EF^{-1} + F^{*-1}E^* = F^{*-1}DF^{-1}$, и применяя оценку (3.7), находим

(3.8) $$\|EF^{-1}\| \leqslant \|EF^{-1}\|_E \leqslant 2^{-1/2} r^{1/2} \|F^{-1}\|^2 \|D\|.$$

Второе и третье равенства в (3.6) можно записать для вектора $\tilde{e} = \binom{e}{\nu}$ в виде матричного соотношения

$$\tilde{F}^* \tilde{e} = \begin{pmatrix} d \\ \delta/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^*f \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда с учетом (3.8) получаем

$$(3.9)\qquad \|\tilde{e}\|\leqslant\|\tilde{F}^{-1}\|\ \left\|\begin{pmatrix} d\\ \delta/2\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix} I_r\\ -\varphi^{-1}f^*\end{pmatrix}F^{*,-1}E^*f\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\tilde{F}^{-1}\|\{1+2^{-1/2}r^{1/2}[1+(\operatorname{cond}\tilde{F})^2]^{1/2}\operatorname{cond}\tilde{F}\}\|\tilde{D}\|,$$

где использована оценка

$$\left\|\begin{pmatrix} I_r\\ -\varphi^{-1}f^*\end{pmatrix}\right\|\leqslant[1+(\operatorname{cond}\tilde{F})^2]^{1/2}$$

и свойство $\|\tilde{F}^{-1}\|\geqslant\|F^{-1}\|$. Поскольку предполагалось, что $\|E\|\leqslant\tau_1\|D\|$, то из (3.9) следует

$$\|\tilde{E}\|\leqslant(\tau_1+\|\tilde{F}^{-1}\|\{1+2^{-1/2}r^{1/2}[1+(\operatorname{cond}\tilde{F})^2]^{1/2}\operatorname{cond}\tilde{F}\})\|\tilde{D}\|.$$

Теперь предположим, что F — верхнетрапецеидальная матрица и тем самым $S:\mathfrak{R}_{rn}\to\mathfrak{H}_{nn}$. Для $F=(F_1\vdots F_2)$, $E=(E_1\vdots E_2)$ можно записать

$$SE=\begin{pmatrix} F_1^*E_1+E_1^*F_1 & F_1^*E_2+E_1^*F_2\\ F_2^*E_1+E_2^*F_1 & F_2^*E_2+E_2^*F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2\\ D_2^* & D_3\end{pmatrix},$$

где F_1 — верхнетреугольная матрица.

Из этого матричного соотношения следует равенство $F_1^*E_2+E_1^*F_2=D_2$. Отсюда $E_2=F_1^{*,-1}(D_2-E_1^*F_2)$, что с учетом (3.8) дает оценку $\|E_2\|\leqslant\|F_1^{-1}\|(1+2^{-1/2}r^{1/2}\|F_1^{-1}\|\,\|F_2\|)\|D\|$. Поэтому $\|E\|\leqslant[\tau_1+\|F_1^{-1}\|(1+2^{-1/2}r^{1/2}\|F_1^{-1}\|\,\|F_2\|)]\|D\|$, откуда вытекает (3.4), (3.5).

Теорема 5. *Предположим, что для пары симметричных матриц $A,\tilde{A}$ размера $n\times n$ и ранга $r\leqslant n$ выполняется условие*

$$(3.10)\qquad \|\tilde{A}-A\|\,\|A^+\|<1,$$

а $\tilde{A}$ имеет факторизацию $\tilde{A}=\tilde{U}^*\check{I}\tilde{U}$, где $\tilde{U}\in\mathfrak{R}_{rn}$, при этом

$$(3.11)\qquad \tau^2\|\tilde{A}-A\|<1/4,$$

где τ определено выражениями (3.5), *в которых теперь $\alpha_1=\|\tilde{U}_1^{-1}\|$, $\alpha_2=\|\tilde{U}_2\|$, $\alpha_3=\operatorname{cond}\tilde{U}_1$, $\tilde{U}=(\tilde{U}_1\vdots\tilde{U}_2)$, $\tilde{U}_1$ — верхнетреугольная матрица.*

Тогда существует такая единственная факторизация $A=U^*\check{I}U$, $U\in\mathfrak{R}_{rn}$, что

$$(3.12)\qquad \|\tilde{U}-U\|\leqslant2\tau\|\tilde{A}-A\|.$$

Ясно, что если выполняется (3.10), то близлежащие сингулярные числа матриц $\tilde{A}$, A ограничены: $|\tilde{\sigma}_i-\sigma_i|\leqslant\|\tilde{A}-A\|$, $i=1,2,\ldots,r$; поэтому у данных матриц дефект и индекс одинаковы, и тем самым при проведении факторизации у $\tilde{A}$ существует такая же диагональная матрица $\check{I}$, как и у A. Кроме того, сингулярные числа матриц $\tilde{F}$ и $\tilde{U}$, связанных соотношением $\tilde{F}=\check{I}\tilde{U}$, одинаковы. Поэтому можно рассмотреть вытекающее из (3.3) операторное уравнение

$$(3.13)\qquad E=K(E),\qquad K(E)=S^{-1}B-S^{-1}E^*\check{I}E.$$

Оператор $K(E)$ при выполнении условия (3.11) переводит шар $S=\{E\mid\|E\|<2\tau\|B\|\}$ в себя. Действительно, при выполнении условия (3.11)

$$\|K(E)\|\leqslant\tau(\|B\|+\|E^2\|)\leqslant\tau(\|B\|+4\tau^2\|B\|^2)\leqslant2\tau\|B\|.$$

Кроме того,

$$\|K(E_2)-K(E_1)\|=\|S^{-1}[(E_2+E_1)^*\check{I}E_2+E_1^*\check{I}(E_2-E_1)]\|\leqslant$$
$$\leqslant 4\tau^2\|B\|\|E_2-E_1\|<\|E_2-E_1\|,$$

т. е. $K(E)$ — сжимающий оператор в шаре S. Множество S компактно, K непрерывен, поэтому, по теореме о сжимающем отображении [11], получаем, что операторное уравнение (3.13) имеет единственное решение, которое удовлетворяет (3.12).

Следствие 2. Предположим, что для симметричной невырожденной A и симметричной возмущенной $\tilde{A}$ матриц выполняются условия (3.10), (3.11), где теперь в выражении (3.11)

$$\tau=n\|A^{-1}\|^{1/2}\{1+2^{-1/2}n^{1/2}[1+(\operatorname{cond}A)^2]^{1/2}(\operatorname{cond}A)^{1/2}\}.$$

Тогда для всякой факторизации $A=G^*U^*\check{I}UG$, где $\check{I}$ — диагональная матрица с элементами ± 1 и U — верхнетреугольная, G — ортогональная матрицы, существует такая единственная факторизация $\tilde{A}=G^*\tilde{U}^*\check{I}\tilde{U}G$, также с верхнетреугольной матрицей $\tilde{U}$, что справедлива оценка (3.12).

Следствие 2 уточняет, а теорема 5 обобщает на знаконеопределенные вырожденные симметричные матрицы результат работы [10], ранее доказанный для невырожденных положительно-определенных матриц.

По аналогии с (2.7) для возмущенной симметричной матрицы $\tilde{A}$ введем неортогональную факторизацию

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1 & \tilde{A}_2\\ \tilde{A}_2^* & \tilde{A}_3\end{pmatrix}=\tilde{U}_*\tilde{R}=\begin{pmatrix}\tilde{R}_1^*\check{I}\tilde{R}_1 & \tilde{R}_1^*\check{I}\tilde{R}_2\\ \tilde{R}_2^*\check{I}\tilde{R}_1 & \tilde{R}_2^*\check{I}\tilde{R}_2+\tilde{R}_3\end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

где

$$\tilde{U}^*=\begin{pmatrix}\tilde{R}_1^*\check{I} & 0\\ \tilde{R}_2^*\check{I} & I\end{pmatrix}\qquad \tilde{R}=\begin{pmatrix}\tilde{R}_1 & \tilde{R}_2\\ 0 & \tilde{R}_3\end{pmatrix},$$

$\check{I}$ — диагональная матрица, по диагонали которой стоят $+1$ или -1.

Лемма 3. *Если $\tilde{R}_1$ — обратимая клетка, то в* (3.14) *имеет место оценка $\|\tilde{R}_3\|\geqslant\|\tilde{A}^+\|^{-1}$. Если дополнительно $\tilde{A}$ положительно определена, то*

$$\|\tilde{A}_1^{-1}\|\leqslant\|\tilde{A}^{-1}\|,\qquad \operatorname{cond}\tilde{A}_1\leqslant\operatorname{cond}\tilde{A},\qquad \|\tilde{R}_1\|\leqslant\|\tilde{A}\|^{1/2},$$
$$\|\tilde{R}_3\|\leqslant\|\tilde{A}\|,\qquad \|\tilde{R}_3^{-1}\|\leqslant\|\tilde{A}^{-1}\|,\qquad \operatorname{cond}\tilde{R}_3\leqslant\operatorname{cond}\tilde{A},$$

а любой диагональный элемент $\tilde{r}_{ss}$ матрицы $\tilde{R}_3$ удовлетворяет неравенству $\|\tilde{A}^{-1}\|^{-1}\leqslant\tilde{r}_{ss}\leqslant\|\tilde{A}\|$.

Первое утверждение леммы следует из теоремы 1. Для доказательства первого неравенства во втором утверждении возьмем вектор $e=\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}$, где v — произвольный нормированный собственный вектор матрицы $\tilde{A}_1$. Тогда $e\in R(\tilde{A})$, и тем самым $\|\tilde{A}^{-1}\|^{-1}\leqslant(\tilde{A}e,e)=(\tilde{A}_1v,v)=\theta$, где θ — собственное значение матрицы $\tilde{A}_1$.

Введем сингулярное разложение матрицы $\tilde{A}=QDQ^*$, где $D=\operatorname{diag}\{\tilde{\sigma}_1,\ldots,\tilde{\sigma}_n\}$, $\tilde{\sigma}_i$ — собственные значения матрицы $\tilde{A}$, $Q^*=(Q_1^*\,\vdots\,Q_2^*)$ — ортогональная матрица, Q_1 — клетка $k\times n$. Тогда можно записать

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1 & \tilde{A}_2\\ \tilde{A}_2^* & \tilde{A}_3\end{pmatrix}=QDQ^*=\begin{pmatrix}Q_1DQ_1^* & Q_1DQ_2^*\\ Q_2DQ_1^* & Q_2DQ_2^*\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\tilde{R}_3=\tilde{A}_3-\tilde{A}_2^*\tilde{A}_1^{-1}\tilde{A}_2=Q_2T(I-P_X)TQ_2^*=Q_2TP_{X^\perp}TQ_2^*,$$

где $T=D^{1/2}$, $P_X=D^{1/2}Q_1^*(Q_1DQ_1^*)^{-1}Q_1D^{1/2}$ — ортопроектор на подпространство $X=R(D^{1/2}Q_1^*)=R(TQ_1^*)$.

Так как $\tilde{R}_3\tilde{R}_3^*=Q_2TP_{X^\perp}T(I-Q_1^*Q_1)TP_{X^\perp}TQ_2^*=L^*L$, где $L=TP_{X^\perp}TQ_2^*$ и $LL^*=TP_{X^\perp}T(I-Q_1^*Q_1)TP_{X^\perp}T=TP_{X^\perp}TTP_{X^\perp}T$, то сингулярные числа матрицы $\tilde{R}_3$ совпадают с сингулярными числами матрицы $TP_{X^\perp}T=TU^*UT$; здесь введено $P_{X^\perp}=U^*U$, U — ортогональная матрица. В свою очередь, $(UTTU^*z,\ z)=(UDU^*z,\ z)\leqslant\tilde{\sigma}_n(z,\ z)$ для любых $z\in R^{n-k}$, что и доказывает $\|\tilde{A}\|=\tilde{\sigma}_n\geqslant\|\tilde{R}_3\|$. Поскольку матрица $\tilde{R}_3$ положительно определена, то ведущий элемент находится на диагонали, а любой ее s-й диагональный элемент $\tilde{r}_{ss}$ удовлетворяет

$$\|\tilde{A}^{-1}\|^{-1}=\tilde{\sigma}_1\leqslant\tilde{r}_{ss}=\tilde{R}_3(e_s,\ e_s)\leqslant\tilde{\sigma}_n=\|\tilde{A}\|,$$

где e_s есть s-й единичный орт.

Утверждение о неухудшении обусловленности главной подматрицы невырожденной матрицы $\tilde{A}$ отмечалось также в [12].

Теорема 6. *Пусть вычисления в р.м.Х. ведутся по возмущенной симметричной матрице $\tilde{A}=A+B$ порядка n, при этом матрица A имеет ранг r, а возмущение B таково, что*

$$\zeta\beta<1 \tag{3.15}$$

и параметр регуляризации ε удовлетворяет неравенству

$$c\beta\leqslant\varepsilon<\omega_{nr}(\sigma_1-\beta), \tag{3.16}$$

где $c=1+\zeta[2\sigma_r+\beta+\sigma_r^2\zeta(1-\zeta\beta)^{-1}]$, $\omega_{nr}=\min\{(n-r+1)^{-1},\ r^{1/2}n^{-1}\}$,

$$\zeta=2^{r-1}\omega_{nr}^{-1}(\sigma_1-\beta)^{-1}\prod_{i=1}^{r-1}[2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1}.$$

Тогда в процессе факторизации будет сделано ровно r шагов и вычислена факторизация

$$\tilde{A}_r=\tilde{U}_r^*\check{I}\tilde{U}_r,\quad \tilde{U}_r=\bar{U}_rG(r), \tag{3.17}$$

где $\bar{U}_r$ — верхнетрапецеидальная матрица.

Если дополнительно

$$\sigma_1^{-1}(1+c)\beta<1, \tag{3.18}$$

то для $\tilde{A}_r^+=\tilde{U}_r^+\check{I}\tilde{U}_r^{+*}$ справедлива оценка

$$\|\tilde{A}_r^+-A^+\|\leqslant\chi\sigma_1^{-2}(1+c)\,[1-\sigma_1^{-1}(1+c)\beta]^{-1}\beta, \tag{3.19}$$

где χ указано в (2.19).

Доказательство. Сначала предположим, что при проведении факторизации в р.м.Х. ортогональные матрицы G_k на каждом шаге являются единичными. Тогда из соотношений (3.14) и из представления (1.7) видно, что при вычислениях с возмущенной матрицей $\tilde{A}$ на каждом шаге путем исключения Гаусса получается клетка $\tilde{R}_3=\tilde{A}^{(k)}_{\omega}=\tilde{A}_3-\tilde{A}_2^*\tilde{A}_1^{-1}\tilde{A}_2$, где A_1 имеет размер $k\times k$.

Поэтому применима лемма 2 и из (2.15) следует, что ведущий элемент удовлетворяет соотношению $|\tilde{a}\ \ |\geqslant r^{1/2}n^{-1}(\sigma_1-\beta)>\varepsilon$ и процесс факторизации не будет останавливаться до r-го шага. Из (2.16) получаем, что

$\|\tilde{A}_1^{-1}\| \leqslant \|\tilde{R}_1^{-1}\|^2 \leqslant \zeta$, поэтому при выполнении (3.15) имеем $\|\tilde{A}_1^{-1}-A_1^{-1}\| \leqslant$ $\leqslant \zeta^2(1-\zeta\beta)^{-1}\beta$. Следовательно, $\|\tilde{A}_3^{(k)}-A_3^{(k)}\| \leqslant c\beta$. Поэтому на r-м шаге факторизации ведущий элемент будет удовлетворять неравенству $|\tilde{a}_*^{(r)}| \leqslant$ $\leqslant c\beta < \varepsilon$, что приведет к прекращению в р. м. Х. процесса факторизации именно на r-м шаге. При этом

$$\|\tilde{A}_r - A\| \leqslant \|\tilde{A}_r - \tilde{A}\| + \|\tilde{A} - A\| \leqslant \|\tilde{A}_3^{(r)}\| + \|B\| \leqslant (1+c)\beta. \tag{3.20}$$

При выполнении (3.18) на основе теории возмущений псевдообратных матриц [8], [9] из (3.20) получаем (3.19).

Теперь предположим, что ортогональная матрица $G_{(r)}$ отличается от единичной. Так как справедлива цепочка неравенств

$$c\beta + |a_*^{(k)}| \geqslant |\tilde{a}_*^{(k)} - a_*^{(k)}| + |a_*^{(k)}| \geqslant |a_*^{(k)}| > \varepsilon,$$

то $|a_*^{(k)}| > \varepsilon - c\beta \geqslant 0$, и тем самым матрица $\check{A} = G_{(r)}^* A G_{(r)}$ допускает факторизацию $\check{A} = U_r^* \check{I} U_r$ с той же диагональной матрицей I, где U_r — верхнетрапецеидальная матрица. Для матриц $\check{A}$ и $\tilde{A}_* = G_{(r)}^* \tilde{A} G_{(r)}$ справедлива оценка (3.19). Поскольку $G_{(r)}$ ортогональна, то эти оценки верны также для A и $\tilde{A}$.

Теорема 7. *Предположим, что в условиях теоремы* 6 *выполняются требования* (3.15), (3.16), (3.18) *и дополнительно*

$$(1+c)\tau^2\beta < {}^1/_4, \tag{3.21}$$

где τ *определено выражением* (3.5), *в котором теперь*

$$\alpha_1 = \zeta^{1/2}, \qquad \alpha_2 = \zeta^{1/2}(\sigma_r + \beta), \qquad \alpha_3 = [\zeta(\sigma_2+\beta)]^{1/2}; \tag{3.22}$$

ζ *определено в теореме* 6.

Тогда в р. м. Х. при проведении вычисления над возмущенной матрицей $\tilde{A}$ *будет сделано* r *шагов и найдена факторизация* (3.17), *для которой существует такая единственная факторизация* $A = G_r^* U^* \check{I} U G_{(r)}$ (*где* U — *также верхнетрапецеидальная матрица*), *что*

$$\|\tilde{U}_r - U\| \leqslant 2\tau \|\tilde{A} - A\|. \tag{3.23}$$

Ограничимся доказательством этой теоремы для $G_{(r)} = I$. В силу теоремы 6, в рассматриваемом случае при проведении вычислений р. м. Х. над возмущенной матрицей $\tilde{A}$ будет сделано ровно r шагов факторизации и найдена факторизация (3.17), где $\tilde{U}_r = (\tilde{U}_1 \vdots \tilde{U}_2)$, $\tilde{U}_1$ — верхнетреугольная матрица, $\tilde{U}_2 = \check{I}\tilde{U}_1^{-1,*}A_2$. При этом из леммы 2 следует, что $\|\tilde{U}_1^{-1}\| \leqslant \zeta^{1/2}$ и $\|\tilde{U}_2\| \leqslant \zeta^{1/2}(\sigma_r+\beta)$, $\operatorname{cond}\tilde{U}_1 = [\zeta(\sigma_r+\beta)]^{1/2}$. Матрица $\tilde{A}_r$ имеет ранг r, и, по предположению, выполняется (3.18), (3.21), (3.22). Таким образом, выполнены условия применимости теоремы 5, откуда и следует требуемое утверждение и оценка (3.23).

Следствие 3. Если симметричная матрица A имеет ранг r и порядок n, а параметр регуляризации ε удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon <$ $< \omega_{nr}\|A^+\|^{-1}$, то в р. м. Х. для $\tilde{A}_\varepsilon$, $\tilde{U}_\varepsilon$, определенных выражениями (1.11) и вычисленных по $\tilde{A} = A + B$, справедливы соотношения

$$\lim_{\|B\|\to 0} \tilde{A}_\varepsilon^+ = A^+, \qquad \lim_{\|B\|\to 0} \tilde{U}_\varepsilon = U,$$

где U — единственная верхнетрапецеидальная матрица, порождающая факторизацию $A = G_{(r)}^* U^* \check{I} U G_{(r)}$, $G_{(r)}$ — ортогональная матрица, указанная в (1.11). Для невырожденных симметричных матриц оценки теорем 6, 7 могут быть значительно улучшены.

Теорема 8. *Пусть A — положительно-определенная матрица размера $n\times n$, вычисления в р. м. Х. ведутся по возмущенной матрице $\tilde{A}=A+B$, параметр регуляризации ε удовлетворяет*

(3.24) $\quad 0\leqslant\varepsilon<\sigma_1-\beta.$

Тогда в процессе факторизации будет сделано ровно n шагов, найдена факторизация $\tilde{A}=\tilde{U}_n{}^*\check{I}\tilde{U}_n$, где $\tilde{U}_n=\tilde{\tilde{U}}_nG_{(n)}$, $\tilde{\tilde{U}}_n$ — верхнетреугольная матрица, а если дополнительно

(3.25) $\quad \tau^2\beta<{}^1/_4,$

где $\tau=n(\sigma_1-\beta)^{-1/2}[1+(n^{1/2}/\sqrt{2})(1+\alpha^2)^{1/2}\alpha]$, $\alpha=[(\sigma_r+\beta)(\sigma_1-\beta)^{-1}]^{1/2}$, *то существует такая единственная верхнетреугольная матрица U, что $A=$ $=G_{(n)}{}^*U^*\check{I}UG_{(n)}$ и*

(3.26) $\quad \|\tilde{U}_n-U\|\leqslant 2\tau\|\tilde{A}-A\|.$

Ограничимся доказательством в предположении, что $G_{(n)}=I$. Из (3.24) следует, что $\sigma_1-\beta>0$, т. е. $\beta<\sigma_1$, поэтому индекс и дефект у матриц A, $\tilde{A}$ одинаковый и $\tilde{A}$ обратима. Из леммы 2 вытекает, что на каждом шаге для ведущего элемента имеет место $|\tilde{a}_*^{(k)}|\geqslant\sigma_1-\beta$.

Таким образом, в р. м. Х. при параметре регуляризации ε, удовлетворяющем (3.24), будет произведено ровно n шагов. Для полученной в результате факторизации верхнетрапецеидальной матрицы $\tilde{\tilde{U}}_n$ справедливо $\|\tilde{\tilde{U}}_n{}^{-1}\|=(\sigma_1-\beta)^{-1/2}$, $\|\tilde{\tilde{U}}_n\|=(\sigma_r+\beta)^{1/2}$, $\operatorname{cond}\tilde{\tilde{U}}_n=[(\sigma_r+\beta)(\sigma_1-\beta)^{-1}]^{1/2}$. Поэтому из теоремы 5 при выполнении (3.25) вытекает существование такой единственной верхнетрапецеидальной матрицы U, что $A=U^*\check{I}U$ и справедлива оценка (3.26) для $\tilde{U}_n-U$.

Автор признателен В. В. Воеводину за полезные замечания, в значительной мере способствовавшие улучшению полученных результатов.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Морозов В. А.* Оценивание точности решения некорректных задач и решение систем линейных алгебраических уравнений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1341–1349.
3. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
4. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
5. *Zlobec S.* The Gauss-bordering method for generalized inversion of matrices.— Z. angew. Math. und Mech., 1975, № 55, p. 445–449.
6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
7. *Мелешко В. И.* Псевдообратные операторы и рекуррентное вычисление псевдорешений в гильбертовых пространствах. — Сибирский матем. ж., 1978, № 1, с. 108–121.
8. *Wedin P.* Perturbation theory pseudoinverses. – BIT, 1973, v. 13, p. 217–232.
9. *Мелешко В. И.* Возмущения неограниченных замкнутых псевдообратных операторов. – Дифференц. ур-ния, 1979, № 4, с. 681–694.
10. *Stewart G. W.* Perturbation bounds for the *QR* factorization of a matrix. – SIAM J. Numer. Analys., 1977, v. 14, № 3, p. 509–518.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
12. *Икрамов Х. Д.* О соотношениях двойственности, связанных с гауссовым исключением. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 1, с. 213–216.

Поступила в редакцию 6.VIII.1984
Переработанный вариант 4.I.1985