А. Л. Лисок, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, Операторы симметрии уравнения типа Хартри с квадратичным потенциалом,
Сиб. матем. журн., 2005, том 46, номер 1, 149–165

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517+517.9

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**А. Л. Лисок, А. Ю. Трифонов,
А. В. Шаповалов**

Аннотация: Исследуются свойства симметрии нестационарного одномерного уравнения типа Хартри с квадратичным периодическим потенциалом и нелокальной нелинейностью. В явном виде найден нелинейный оператор эволюции этого уравнения и получено решение задачи Коши в классе квазиклассически-сосредоточенных функций. Найдены параметрические семейства нелинейных операторов симметрии уравнения типа Хартри (оставляющих инвариантным множество решений уравнения). С помощью операторов симметрии построены семейства точных решений уравнения. Предложенный подход конструктивно расширяет область приложений идей и методов группового анализа на случай нелинейных интегродифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, операторы симметрии, оператор эволюции, уравнение типа Хартри, квазиклассические сосредоточенные состояния.

Введение

Нестационарное одномерное уравнение типа Хартри с квадратичным периодическим по времени потенциалом записывается в виде

$$\{-i\hbar\partial_t + \widehat{\mathscr{H}_\varkappa}(t,\Psi)\}\Psi = 0, \quad \widehat{\mathscr{H}_\varkappa}(t,\Psi) = \widehat{\mathscr{H}}(t) + \varkappa\widehat{V}(t,\Psi), \tag{0.1}$$
$$\widehat{\mathscr{H}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\rho(x\hat{p}+\hat{p}x)}{2} - eEx\cos\omega t, \quad \hat{p} = -i\hbar\partial_x,$$
$$\widehat{V}(t,\Psi)\Psi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy[ax^2 + 2bxy + cy^2]|\Psi(y,t)|^2\Psi(x,t).$$

Здесь a, b, c, $k > 0$, ρ и E — параметры потенциала, $\varkappa$ — параметр нелинейности, m, e — масса и заряд частицы соответственно.

Уравнение (0.1) является частным случаем многомерного уравнения с переменными коэффициентами (внешними полями), возникающего в квантовой механике при приближенном описании систем нерелятивистских взаимодействующих частиц (см., например, [1]). Уравнение типа Хартри используется в теории бозе-эйнштейновского конденсата [2], где его принято называть уравнением Гросса — Питаевского. Квадратичный потенциал, входящий в уравнение (0.1),

Работа частично поддержана грантами Президента РФ НШ–1743.2003.2 и МД–246.2003.02, А. Л. Лисок поддержан стипендией некоммерческого фонда «Династия» в рамках МЦФФ в Москве и грантом МО РФ (№ А03–2.8–794).

имеет некоторую самостоятельную ценность для приложений, поскольку он используется для описания магнитных ловушек в моделях бозе-эйнштейновского конденсата.

Набор методов точного интегрирования нелинейных интегродифференциальных уравнений ограничен. Известны лишь частные случаи таких уравнений, что тем не менее представляет значительный интерес ввиду сложности задачи. Например, для уравнения типа Хартри специального вида построение частных решений обсуждалось в [3].

Непосредственное применение техники группового анализа (см. [4–9] и цитированную там литературу) к уравнению (0.1) нетривиально, что приводит к необходимости искать соответствующие подходы. Изучение классов таких уравнений оказывается эффективным с помощью приближенных (асимптотических) методов.

В данной работе свойства симметрии уравнения (0.1) исследуются в рамках метода квазиклассических асимптотик, развитого в [10, 11] на основе теории комплексного ростка [12, 13] для уравнения типа Хартри общего вида.

Несмотря на то, что общий метод является приближенным, его применение к уравнению (0.1) приводит к точным результатам. Основу метода составляет схема решения задачи Коши для уравнения (0.1) в классе траекторно-сосредоточенных функций, которая состоит в последовательном решении двух вспомогательных задач: а) динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы Гамильтона — Эренфеста [14]) и б) линейных ассоциированных уравнений Шрёдингера, образующих параметрическое семейство. Точное решение этих задач позволяет найти точное решение уравнения типа Хартри, а приближенное решение приводит к приближенному решению нелинейного уравнения. В рассматриваемом ниже примере удается точно решить систему Гамильтона — Эренфеста и линейные ассоциированные уравнения Шрёдингера. Это позволяет найти явный вид нелинейного оператора эволюции для уравнения (0.1) и с его помощью получить явные выражения для нелинейных операторов симметрии (оставляющих инвариантным множество решений) уравнения (0.1). Введены нелинейные аналоги операторов «рождения» и «уничтожения» для уравнения (0.1) и с их помощью построены семейства квазиклассических траекторно-когерентных состояний. Предложенный подход конструктивно расширяет область приложения идей и методов группового анализа [4] на случай нелинейных интегродифференциальных квантовомеханических уравнений вида (0.1). Для определенного класса нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений операторы симметрии построены методом L-преобразований (переход к переменным Лагранжа) в [15]. Посредством L-преобразований и группы инвариантности уравнения в [15] также построены однопараметрические семейства операторов симметрии для этих нелинейных уравнений.

Отметим, что все основные утверждения и конструкции данной работы остаются с заданной точностью по $\hbar$, $\hbar \to 0$, справедливыми и для уравнения типа Хартри общего вида. Особенностью рассматриваемого случая является то, что все основные утверждения можно проверить непосредственно.

1. Система Гамильтона — Эренфеста

В асимптотическом методе интегрирования уравнения типа Хартри, предложенного в [10, 11], существенную роль играет класс траекторно-сосредоточенных функций. Остановимся подробнее на предпосылках, определяющих структуру этого класса.

Уравнение типа Хартри является квантовомеханическим уравнением. Поэтому с точки зрения общих положений квантовой механики необходимо исследовать поставленную еще Эренфестом [16] проблему корректного вывода классических уравнений движения из квантовомеханических. Сами классические уравнения являются составной частью полного описания квантовой системы с точки зрения принципа соответствия. В стандартной линейной квантовой механике один из основных подходов к этой проблеме (см., например, [1]) состоит в получении уравнения Гамильтона — Якоби из уравнения Шрёдингера в некотором формальном пределе $\hbar \to 0$ ($\hbar$ — постоянная Планка). Для получения решений классических уравнений Гамильтона из уравнения Гамильтона — Якоби требуется сформулировать специальные предписания и ввести понятие фазовой траектории классической системы. Математически корректное описание этого подхода дано в [17]. При таком подходе для нелинейного уравнения типа Хартри не удается получить уравнение Гамильтона — Якоби на классическое действие и, следовательно, уравнения на его характеристики. Другой способ получить «классические» уравнения движения состоит в непосредственном их выводе из уравнения типа Хартри. Для этого требуется в квантовой механике ввести понятие фазовой траектории, изначально в ней отсутствующее. Пусть заданы вектор состояния системы Ψ и набор операторов обобщенных координат $\hat{x}$ и сопряженных им импульсов $\hat{p}$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{1.1}$$

Средние по состоянию Ψ

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle, \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle \tag{1.2}$$

являются функциями времени и параметрически зависят от $\hbar$:

$$\langle \hat{x} \rangle = x_\Psi(t, \hbar), \quad \langle \hat{p} \rangle = p_\Psi(t, \hbar). \tag{1.3}$$

Здесь $\langle \Psi | \Phi \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$. Если существует предел

$$\lim_{\hbar \to 0} x_\Psi(t, \hbar) = X(t), \quad \lim_{\hbar \to 0} p_\Psi(t, \hbar) = P(t), \tag{1.4}$$

то естественно назвать $x = X(t)$, $p = P(t)$ фазовой траекторией классической системы, соответствующей данному состоянию Ψ (и данной квантовой теории). Очевидно, что как средние (1.3), так и предельные значения (1.4) зависят, вообще говоря, от состояния Ψ. Следовательно, требование, чтобы (1.4) являлись решением классических уравнений движения, соответствует выбору состояния Ψ. Естественно решения уравнения типа Хартри, допускающие такой предельный переход, считать близкими к классическим (именно они будут нас интересовать в дальнейшем), а не допускающие — существенно квантовыми. Очевидно, что для первого класса состояний квадрат модуля $|\Psi(x, t, \hbar)|^2$ при $\hbar \to 0$ должен стремиться к $\delta(x - X(t))$. Аналогичное заключение можно сделать и для волновой функции Ψ в p-представлении $\widetilde{\Psi}(p, t, \hbar)$, т. е.

$$\lim_{\hbar \to 0} |\Psi(x, t, \hbar)|^2 = \delta(x - X(t)), \tag{1.5}$$

$$\lim_{\hbar \to 0} |\widetilde{\Psi}(p, t, \hbar)|^2 = \delta(p - P(t)). \tag{1.6}$$

Потребуем, чтобы для решения уравнения (0.1), помимо условий (1.5) и (1.6), существовали моменты произвольного порядка. Тогда решение уравнения (0.1) естественно искать в виде следующего анзаца:

$$\Psi(x,t,\hbar)=\varphi\bigg(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}},t,\sqrt{\hbar}\bigg)\exp\bigg[\frac{i}{\hbar}(S(t,\hbar)+P(t)\Delta x)\bigg]. \tag{1.7}$$

Здесь функция $\varphi(\xi,t,\sqrt{\hbar})$ принадлежит $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ — пространство Шварца) по переменной $\xi=\Delta x/\sqrt{\hbar}$ и регулярно зависит от $\sqrt{\hbar}$, а $\Delta x=x-X(t)$. Вещественные функции $S(t,\hbar)$, $Z(t)=(P(t),X(t))$, характеризующие решение, подлежат определению. Класс функций (1.7) будем обозначать символом $\mathscr{P}^t_\hbar$ и называть *классом квазиклассически сосредоточенных функций* (см. [10]).

Для уравнения (0.1) поставим задачу Коши

$$\Psi(x,t,\hbar)|_{t=s}=\psi(x,\hbar),\quad \psi(x,\hbar)\in\mathscr{P}^0_\hbar. \tag{1.8}$$

Для линейного оператора $\widehat{A}$ определим среднее значение $\langle\widehat{A}\rangle$ в состоянии $\Psi(x,t,\hbar)$ следующим образом:

$$\langle\widehat{A}\rangle=\frac{1}{\|\Psi(t)\|^2}\langle\Psi(t)|\widehat{A}|\Psi(t)\rangle=A_\Psi(t,\hbar). \tag{1.9}$$

На решениях $\Psi(t)$ уравнения (0.1) для средних значений оператора $\widehat{A}$ имеем

$$\frac{d\langle\widehat{A}(t)\rangle}{dt}=\bigg\langle\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t}\bigg\rangle+\frac{i}{\hbar}\langle[\widehat{\mathscr{H}_\varkappa}(t,\Psi(t)),\widehat{A}(t)]\rangle, \tag{1.10}$$

где $[\widehat{A},\widehat{B}]=\widehat{A}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{A}$ — коммутатор линейных операторов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

По аналогии с линейным квантовомеханическим уравнением Шрёдингера соотношение (1.10) будем называть уравнением Эренфеста [16]. Из уравнения Эренфеста, в частности, при $\widehat{A}=1$ следует, что норма любого решения уравнения (0.1) не зависит от времени, т. е. $\|\Psi(t)\|^2=\|\Psi(0)\|^2=\|\Psi\|^2$. В результате в уравнении (0.1), не уменьшая общности, можно перейти от постоянной $\varkappa$ к постоянной $\tilde{\varkappa}=\varkappa\|\Psi\|^2$.

Обозначим через

$$\alpha^{(l,j)}_\Psi(t,\hbar)=\frac{1}{\|\Psi\|^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\{(\Delta\hat{p})^l(\Delta x)^j\}\Psi(x,t)\,dx,\quad j,l=\overline{0,\infty}, \tag{1.11}$$

центрированные моменты функции $\Psi(x,t)$ $(j+l)$-го порядка относительно $x_\Psi(t,\hbar)$, $p_\Psi(t,\hbar)$. Здесь $\Delta\hat{p}=-i\hbar\partial_x-p_\Psi(t,\hbar)$, $\Delta x=x-x_\Psi(t,\hbar)$, а $\{(\Delta\hat{p})^l(\Delta x)^j\}$ — упорядоченный по Вейлю оператор с символом $(\Delta p)^l(\Delta x)^j$. Наряду с обозначениями (1.11) для дисперсии координат, импульсов и функции корреляции координат и импульсов будем использовать обозначения

$$\sigma_{xx}(t,\hbar)=\alpha^{(0,2)}_\Psi(t,\hbar),\quad \sigma_{pp}(t,\hbar)=\alpha^{(2,0)}_\Psi(t,\hbar),\quad \sigma_{xp}(t,\hbar)=\alpha^{(1,1)}_\Psi(t,\hbar).$$

Запишем уравнения Эренфеста для средних значений операторов $\hat{p}$, x, $\{(\Delta x)^k(\Delta\hat{p})^l\}$, $k,l=\overline{2,M}$. В результате для моментов первого и второго порядков получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{p}&=-m\big(\omega_0^2+\zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big)x-p\rho+eE\cos\omega t,\\ \dot{x}&=\frac{p}{m}+x\rho,\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$
\begin{aligned}
\dot\sigma_{xx} &= \frac{2}{m}\sigma_{xp} + 2\rho\sigma_{xx},\\
\dot\sigma_{xp} &= \frac{1}{m}\sigma_{pp} - m\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a)\big)\sigma_{xx},\\
\dot\sigma_{pp} &= -2m\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a)\big)\sigma_{xp} - 2\rho\sigma_{pp}.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Аналогично для моментов высших порядков найдем

$$
\begin{aligned}
\dot\alpha^{(j,l)} = \frac{l}{m}\alpha^{(j+1,l-1)} + (l-j)\rho\alpha^{(j,l)} - jm\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a)\big)\alpha^{(j-1,l+1)}\\
+ l\left[\frac{p}{m} + \rho x\right]\alpha^{(j,l-1)} + j\big[eE\cos\omega t - p\rho\\
- mx\big(\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a+b)\big)\big]\alpha^{(j-1,l)}, \quad j,l,M\in\mathbb{N}, \quad j+l=\overline{3,M}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Здесь обозначено $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\omega_{\mathrm{n}l}(u) = \sqrt{|\tilde\varkappa u|/m}$, $\zeta(u) = \mathrm{sign}(\tilde\varkappa u)$.

Систему уравнений (1.12)–(1.14) будем называть *системой Гамильтона — Эренфеста* порядка M (M — порядок наибольшего учитываемого момента), отвечающей уравнению типа Хартри (0.1).

Будем рассматривать систему Гамильтона — Эренфеста (1.12)–(1.14) как абстрактную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольными начальными условиями. Очевидно, что не все решения системы Гамильтона — Эренфеста (1.12)–(1.14) можно получить в результате усреднения соответствующих операторов по решениям уравнения типа Хартри (0.1). Например, средние значения должны удовлетворять соотношению неопределенностей Шрёдингера

$$
\sigma_{pp}\sigma_{xx} - \sigma_{xp}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}
\tag{1.15}
$$

для моментов второго порядка (соотношения неопределенностей для моментов высших порядков см. в [18, 19]), в то время как система Гамильтона — Эренфеста допускает тривиальные решения $p = 0$, $x = 0$, $\alpha^{(j,l)} = 0$, $j + l = \overline{2, M}$. Величина, стоящая в левой части соотношения (1.15), является интегралом системы Гамильтона — Эренфеста (1.13) (см. [20]). Следовательно, достаточно, чтобы соотношение неопределенностей выполнялось в начальный момент времени.

Соотношения неопределенностей будут выполнены автоматически, если в качестве начальных условий для системы Гамильтона — Эренфеста (1.12)–(1.13) выбрать

$$
\begin{gathered}
p|_{t=s} = p_0 = p_\psi(\hbar), \quad x|_{t=s} = x_0 = x_\psi(\hbar),\\
\sigma_{pp}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar), \quad \sigma_{xp}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar), \quad \sigma_{xx}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar),\\
\alpha^{(j,l)}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(j,l)}, \quad j,l,M\in\mathbb{N}, \quad j+l=\overline{3,M},
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

где $\psi(x,\hbar)$ — начальное условие (1.8) для уравнения (0.1).

Обозначим

$$
\widetilde\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a+b) - \rho^2|},
\tag{1.17}
$$

$$
\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a) - \rho^2|}.
\tag{1.18}
$$

Система Гамильтона — Эренфеста (1.12)–(1.14) распадается на M рекуррентных систем: систему на первые нецентрированные (начальные) моменты $p_\Psi(t)$,

$x_\Psi(t)$ и систему центрированных моментов $\alpha^{(j,l)}$ порядка n, $n = j + l$, $n = \overline{2, M}$. Из (1.14) следует, что система уравнений на моменты n-го порядка не зависит от моментов порядка выше n.

Структура общего решения систем (1.12) и (1.13) будет различной в зависимости от того, является положительным, отрицательным или равным нулю выражение, стоящее в (1.17) и (1.18) под знаком модуля. Здесь мы ограничимся случаем, когда одновременно выполняются неравенства $\widetilde{\Omega}^2 = \omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a+b) - \rho^2 > 0$ и $\Omega^2 = \omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\mathrm{n}l}^2(a) - \rho^2 > 0$. Тогда общее решение систем (1.12) и (1.13) имеет вид

$$X(t) = C_1 \sin\widetilde{\Omega}t + C_2 \cos\widetilde{\Omega}t + \frac{eE}{m(\widetilde{\Omega}^2 - \omega^2)}\cos\omega t,$$

$$\begin{aligned} P(t) = m(\widetilde{\Omega}C_1 - \rho C_2)\cos\widetilde{\Omega}t - m(\widetilde{\Omega}C_2 + \rho C_1)\sin\widetilde{\Omega}t \\ - \frac{eE\omega}{(\widetilde{\Omega}^2 - \omega^2)}\sin\omega t - \frac{eE\rho}{(\widetilde{\Omega}^2 - \omega^2)}\cos\omega t; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\sigma_{xx}(t) = C_3 \sin 2\Omega t + C_4 \cos 2\Omega t + C_5,$$

$$\sigma_{xp}(t) = m(\Omega C_3 - \rho C_4)\cos 2\Omega t - m(\Omega C_4 + \rho C_3)\sin 2\Omega t - m\rho C_5, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(t) = m^2((\rho^2 - \Omega^2)C_3 + 2\rho\Omega C_4)\sin 2\Omega t \\ + m^2((\rho^2 - \Omega^2)C_4 - 2\rho\Omega C_3)\cos 2\Omega t + m^2(\rho^2 + \Omega^2)C_5. \end{aligned}$$

Здесь C_l, $l = \overline{1, 5}$, — произвольные постоянные.

Обозначим через $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}) \in \mathbb{R}^5$ траекторию в расширенном фазовом пространстве, где

$$\begin{gathered} \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}) = (P(t, \mathfrak{C}), X(t, \mathfrak{C}), \sigma_{pp}(t, \mathfrak{C}), \sigma_{px}(t, \mathfrak{C}), \sigma_{xx}(t, \mathfrak{C}))^\intercal, \\ \mathfrak{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)^\intercal \end{gathered} \quad (1.21)$$

есть общее решение системы Гамильтона — Эренфеста (1.12), (1.13), а через $\hat{\mathfrak{g}}$ — столбец операторов

$$\hat{\mathfrak{g}} = \left(\hat{p}, \hat{x}, (\Delta\hat{p})^2, \frac{1}{2}(\Delta\hat{p}\Delta x - \Delta x\Delta\hat{p}), (\Delta x)^2\right)^\intercal. \quad (1.22)$$

Здесь через $B^\intercal$ обозначена матрица, транспонированная к матрице B. Систему уравнений (1.12)–(1.13) запишем в виде

$$\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{A}\mathfrak{g} + \mathfrak{a}(t), \quad \mathfrak{g}|_{t=s} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{a}(t) = (eE\cos\omega t, 0, 0, 0, 0)^\intercal, \quad (1.23)$$

где

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -\rho & -m\widetilde{\Omega}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho & -2m\Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & -m\Omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m} & 2\rho \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\Psi(x,t)$ — частное решение уравнения типа Хартри (0.1) с начальным условием $\Psi(x,t)|_{t=s} = \psi(x)$. Определим постоянные $\mathfrak{C}(\Psi(t))$ из уравнения*
$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}) = \langle\Psi(t)|\hat{\mathfrak{g}}|\Psi(t)\rangle, \tag{1.24}$$
а постоянные $\mathfrak{C}(\psi)$ из условия
$$\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}) = \langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{1.25}$$
Тогда $\mathfrak{C}(\Psi(t)) = \mathfrak{C}(\psi)$.

Доказательство. По построению вектор
$$\mathfrak{g}(t) = \langle\Psi(t)|\hat{\mathfrak{g}}|\Psi(t)\rangle = \mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\Psi(t))) \tag{1.26}$$
является частным решением системы уравнений (1.12)–(1.13) и в момент времени $t = s$ совпадает с $\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi))$. В силу единственности решения задачи Коши для системы (1.12), (1.13) выполняется соотношение
$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi)) = \mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\Psi(t))), \tag{1.27}$$
что и доказывает теорему.

Из уравнений (1.16), (1.25) следует, что при $s = 0$
$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\psi) = \Bigg(&\frac{p_0}{m\widetilde{\Omega}} + \frac{\rho x_0}{\widetilde{\Omega}}, x_0 - \frac{eE}{m(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}, \frac{\alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar) + m\rho\alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar)}{m\Omega},\\
&\frac{1}{2}\bigg(\alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar)\bigg(1-\frac{\rho^2}{\Omega^2}\bigg) - \frac{\alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar)}{m^2\Omega^2}\bigg) - \frac{\rho\alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar)}{m\Omega^2},\\
&\frac{1}{2}\bigg(\alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar)\bigg(1+\frac{\rho^2}{\Omega^2}\bigg) + \frac{\alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar)}{m^2\Omega^2}\bigg) + \frac{\rho\alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar)}{m\Omega^2}\Bigg)^{\mathsf{T}}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

2. Ассоциированное уравнение Шрёдингера

Разложим входящие в уравнение (0.1) операторы в ряд Тейлора по $\Delta x = x - x_\Psi(t,\hbar)$, $\Delta y = y - x_\Psi(t,\hbar)$ и $\Delta\hat{p} = \hat{p} - p_\Psi(t,\hbar)$. Тогда уравнение (0.1) примет вид
$$\Big\{-i\hbar\partial_t + \mathfrak{H}(t,\Psi) + \langle\mathfrak{H}_z(t,\Psi),\Delta\hat{z}\rangle + \frac{1}{2}\langle\Delta\hat{z},\mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi)\Delta\hat{z}\rangle\Big\}\Psi = 0, \tag{2.1}$$
где
$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(t,\Psi) = \frac{p_\Psi^2(t,\hbar)}{2m} + \frac{kx_\Psi^2(t,\hbar)}{2} - eEx_\Psi(t,\hbar)\cos\omega t + \rho x_\Psi(t,\hbar)p_\Psi(t,\hbar)\\
+ \frac{\tilde{\varkappa}}{2}c\alpha_\Psi^{(0,2)}(t,\hbar) + \frac{\tilde{\varkappa}}{2}(a+2b+c)x_\Psi^2(t,\hbar),\end{aligned}$$
$$\mathfrak{H}_z(t,\Psi) = \begin{pmatrix}\frac{1}{m}p_\Psi(t,\hbar) + \rho x_\Psi(t,\hbar)\\ kx_\Psi(t,\hbar) - eE\cos\omega t + \rho p_\Psi(t,\hbar) + \tilde{\varkappa}(a+b)x_\Psi(t,\hbar)\end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi) = \begin{pmatrix}\frac{1}{m} & \rho\\ \rho & m(\Omega^2+\rho^2)\end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix}p\\ x\end{pmatrix}, \quad \Delta\hat{z} = \begin{pmatrix}\Delta\hat{p}\\ \Delta x\end{pmatrix},$$
а $\langle\,.,.\,\rangle$ — евклидово скалярное произведение векторов.

Сопоставим нелинейному уравнению (2.1) линейное уравнение, которое получается из (2.1) подстановкой соответствующих решений системы Гамильтона — Эренфеста (1.12), (1.13) вместо средних значений операторов координат, импульсов и центрированных моментов второго порядка. В результате получим следующее уравнение:

$$\Big\{-i\hbar\partial_t + \mathfrak{H}(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) + \langle \mathfrak{H}_z(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})), \Delta\hat{z}\rangle + \frac{1}{2}\langle \Delta\hat{z}, \mathfrak{H}_{zz}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\Delta\hat{z}\rangle\Big\}\Phi = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\mathfrak{H}(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = \frac{P^2(t,\mathfrak{C})}{2m} + \frac{kX^2(t,\mathfrak{C})}{2} - eEX(t,\mathfrak{C})\cos\omega t + \rho X(t,\mathfrak{C})P(t,\mathfrak{C}) + \frac{\tilde{\varkappa}}{2}c\sigma_{xx}(t,\mathfrak{C}) + \frac{\tilde{\varkappa}}{2}(a+2b+c)X^2(t,\mathfrak{C}),$$

$$\mathfrak{H}_z(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}P(t,\mathfrak{C}) + \rho X(t,\mathfrak{C}) \\ m(\widetilde{\Omega}^2+\rho^2)X(t,\mathfrak{C}) - eE\cos\omega t + \rho P(t,\mathfrak{C}) \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{H}_{zz}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \rho \\ \rho & m(\Omega^2+\rho^2) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.2) будем называть *ассоциированным линейным уравнением Шрёдингера.*

Уравнение (2.2) является уравнением Шрёдингера с квадратичным гамильтонианом. Хорошо известно, что это уравнение (см., например, [21, 22]) допускает решения в виде гауссовых волновых пакетов. Построим фоковский базис решений уравнения (2.2) в виде, принятом в теории комплексного ростка [12, 13]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = N_\hbar\Big(\frac{1}{C(t)}\Big)^{1/2}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Big(S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) + P(t,\mathfrak{C})\Delta x + \frac{1}{2}\frac{B(t)}{C(t)}\Delta x^2\Big)\Big\} \tag{2.3}$$

является решением уравнения (2.2), где

$$S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = \int_0^t \big(P(t,\mathfrak{C})\dot{X}(t,\mathfrak{C}) - \mathfrak{H}(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big)\,dt, \tag{2.4}$$

а через $B(t)$ и $C(t)$ обозначены «импульсная» и «координатная» части решения системы в вариациях

$$\dot{a} = J\mathfrak{H}_{zz}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))a, \quad a(t) = (B(t), C(t))^\intercal, \tag{2.5}$$

отвечающей уравнению (2.2). Для системы (2.5) поставим задачу Флоке

$$a(t+T) = e^{i\Omega T}a(t). \tag{2.6}$$

Решение задачи Флоке (2.5), (2.6), нормированное условием

$$\{a(t), a^*(t)\} = 2i, \quad \{a_1, a_2\} = \langle a_1, J^\intercal a_2\rangle, \tag{2.7}$$

где J — единичная симплектическая матрица, имеет вид

$$a(t) = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{m\Omega}}(im\Omega - m\rho, 1)^\intercal. \tag{2.8}$$

Из условия нормировки $\big\|\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big\|^2 = 1$ найдем $N_\hbar = (1/\pi\hbar)^{1/4}$.

Обозначим

$$\hat{a}(t) = N_a(C(t)\Delta\hat{p} - B(t)\Delta x). \tag{2.9}$$

Если $C(t)$ и $B(t)$ являются решениями системы (2.5), то оператор $\hat{a}(t)$ коммутирует с оператором ассоциированного уравнения (2.2). Таким образом, функции

$$\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+(t))^n\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})), \quad n = \overline{0,\infty},$$

также будут решениями уравнения Шрёдингера (2.2). Прокоммутировав операторы $\hat{a}^+(t)$ с оператором умножения на функцию $\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))$, получим следующее представление для фоковского базиса решений ассоциированного линейного уравнения (2.2):

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) &= \frac{1}{\sqrt{n!}}N_a^n\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))(-i)^n[C^*(t)]^n\left[\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2m}{|C(t)|^2}\Delta x\right]^n 1\\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}N_a^n\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))i^n[C^*(t)]^n\left(\frac{\sqrt{\hbar m}}{|C(t)|}\right)^n H_n\left(\Delta x\frac{\sqrt{m}}{|C(t)|\sqrt{\hbar}}\right),\end{aligned}$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита. Определив $N_a = 1/\sqrt{2\hbar}$ из условия $[\hat{a}(t),\hat{a}^+(t)] = 1$ и представив координатную часть решения системы в вариациях в виде

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{m\Omega}}\exp\{i\Omega t\},$$

получим

$$\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})) = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}\exp\{-in\Omega t\}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\Delta x\right)\Phi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})). \tag{2.10}$$

Воспользовавшись свойствами полиномов Эрмита, найдем

$$\alpha^{(0,2)}_{\Phi_n^{(0)}}(t,\hbar) = \sigma_{xx}(t,\hbar,\mathfrak{C}) = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta x^2\big|\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big|^2\,dx = \frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}. \tag{2.11}$$

Мы уже отмечали, что функции $\big\{\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big\}_{n=0}^{\infty}$, хотя и являются решениями ассоциированного уравнения Шрёдингера (2.2), в общем случае (при произвольных параметрах $\mathfrak{C}$) не являются решениями уравнения типа Хартри (0.1). Функции (2.10) при фиксированном n будут решениями уравнения (0.1) только при специальном выборе параметров $\mathfrak{C}$, а именно по правилу (1.28).

Положим в (1.28) $\psi(x) = \Phi_n^{(0)}(x,0)$. С учетом (2.11) найдем

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}\big(\Phi_n^{(0)}(0)\big) = \left(\frac{p_0}{m\widetilde{\Omega}}, x_0, 0, 0, \frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}\right)^{\intercal}. \tag{2.12}$$

Справедлива

Теорема 2.1. *При каждом фиксированном* n, $n = \overline{0,\infty}$, *точными решениями уравнения* (0.1) *являются функции*

$$\Psi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)) = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\Omega t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\Delta x\right)\Psi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)), \tag{2.13}$$

$$\Psi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)) = \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}e^{-i\Omega t/2}$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)) + P(t,\mathfrak{C}_n)\Delta x) - \frac{m(\Omega - i\rho)}{2\hbar}\Delta x^2\right\}, \quad (2.14)$$

где $\Delta x = x - X(t,\mathfrak{C}_n)$, *а* $S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n))$ *определяется соотношением* (2.4), *в котором параметры* $\mathfrak{C}$ *надо заменить на* $\mathfrak{C}_n$.

Функции (2.13) *удовлетворяют начальным условиям*

$$\Psi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n))|_{t=0} = \Phi_n^{(0)}(x,0). \quad (2.15)$$

Назовем функции (2.13) *квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями уравнения типа Хартри* (0.1).

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 3.1.

Отметим, что если на решения системы Гамильтона — Эренфеста налагаются дополнительное условие периодичности, то они принимают вид

$$X\big(t,\mathfrak{C}_n^T\big) = \frac{eE}{m(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}\cos\omega t,$$
$$P\big(t,\mathfrak{C}_n^T\big) = -\frac{eE\omega}{(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}\sin\omega t - \frac{eE\rho}{(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}\cos\omega t$$
$$\sigma_{xx}\big(t,\mathfrak{C}_n^T\big) = \frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}, \quad \sigma_{xp}\big(t,\mathfrak{C}_n^T\big) = -m\rho\frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}, \quad (2.16)$$
$$\sigma_{pp}\big(t,\mathfrak{C}_n^T\big) = m^2(\Omega^2+\rho^2)\frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega},$$
$$\mathfrak{C}_n^T = \left(\frac{-eE\rho}{m\widetilde{\Omega}(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}, \frac{eE}{m(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)}, 0, 0, \frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}\right)^{\intercal}$$

и функции (2.13) удовлетворяют условию квазипериодичности

$$\Psi_n^{(0)}\big(x,t+T,\mathfrak{C}_n^T\big) = e^{-i\mathscr{E}_n T/\hbar}\Psi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{C}_n^T\big), \quad (2.17)$$

где $\mathscr{E}$ — квазиэнергии. В результате для квазиэнергетических уровней и фазы Ааронова — Анандана соответственно получим

$$\mathscr{E}_n = \left[-\frac{e^2E^2}{2m(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)} - \frac{e^2E^2\big[\omega^2+\rho^2-\omega_0^2-\zeta(a+2b+c)\omega_{\mathrm{nl}}^2(a+2b+c)\big]}{4m(\widetilde{\Omega}^2-\omega^2)^2}\right]$$
$$+\hbar\left(\Omega+\frac{\tilde{\varkappa}c}{2m\Omega}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right). \quad (2.18)$$

3. Оператор эволюции уравнения типа Хартри

Теорема 2.1 дает решение задачи Коши (0.1), (1.8) для специального класса начальных условий вида (2.15). Чтобы найти решение задачи Коши с произвольными начальными условиями в классе квазиклассически-сосредоточенных функций, построим оператор эволюции уравнения типа Хартри (0.1).

Система функций $\big\{\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big\}_{n=0}^{\infty}$ вида (2.10) образует полный набор решений линейного ассоциированного уравнения Шрёдингера (2.2) и позволяет построить оператор эволюции уравнения типа Хартри (0.1). Функцию Грина линейного уравнения (ядро оператора эволюции) можно разложить по полному набору решений линейного уравнения

$$G^{(0)}(x,y,t,s,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}),\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}))=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))\big(\Phi_n^{(0)}(y,s,\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}))\big)^*. \tag{3.1}$$

С учетом формулы Мелера [23]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n H_n(x)H_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\exp\left[\frac{2xy\lambda-(x^2+y^2)\lambda^2}{1-\lambda^2}\right]$$

из (2.10), (3.1) найдем

$$\begin{gathered}G(x,y,t,s,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}),\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}))=\sqrt{\frac{m\Omega}{2\pi i\hbar\sin[\Omega(t-s)]}}\\ \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}))-S(s,\hbar,\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}))+P(t,\mathfrak{C})\Delta x-P(s,\mathfrak{C})\Delta y\right]\right\}\\ \exp\left\{-\frac{im\Omega}{2\hbar}\left(\frac{2\Delta x\Delta y-(\Delta x^2+\Delta y^2)\cos[\Omega(t-s)]}{\sin[\Omega(t-s)]}\right)\right\}\\ \times\exp\left\{-\frac{im\rho}{2\hbar}(\Delta x^2-\Delta y^2)\right\}.\end{gathered}$$

Здесь $\Delta x=x-X(t,\mathfrak{C})$, $\Delta y=y-X(s,\mathfrak{C})$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор $\widehat{U}_\varkappa(t,s,\cdot)$ определен соотношением*

$$\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\varkappa\big(x,y,t,s,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi)),\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi))\big)\psi(y)\,dy, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered}G_\varkappa(x,y,t,s,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi),\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi)))=\sqrt{\frac{m\Omega}{2\pi i\hbar\sin[\Omega(t-s)]}}\\ \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi)))+P(t,\mathfrak{C}(\psi))\Delta x-S(s,\hbar,\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi)))-P(s,\mathfrak{C}(\psi))\Delta y]\right\}\\ \times\exp\left\{-\frac{im\Omega}{2\hbar}\left(\frac{2\Delta x\Delta y-(\Delta x^2+\Delta y^2)\cos[\Omega(t-s)]}{\sin[\Omega(t-s)]}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{im\rho}{2\hbar}(\Delta x^2-\Delta y^2)\right\}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $\Delta x=x-X(t,\mathfrak{C}(\psi))$, $\Delta y=y-X(s,\mathfrak{C}(\psi))$, функция $S(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}(\psi)))$ определена соотношением (2.4), а параметры $\mathfrak{C}(\psi)$ определяются уравнением

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})|_{t=s}=\mathfrak{g}_0(\psi)=\langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{3.4}$$

Тогда функция

$$\Psi(x,t)=\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x) \tag{3.5}$$

является точным решением задачи Коши для уравнения типа Хартри (0.1) с начальным условием $\Psi(x,t)|_{t=s}=\psi(x)$, а оператор $\widehat{U}_\varkappa(t,s,\cdot)$ — оператором эволюции нелинейного уравнения типа Хартри (0.1).

Доказательство можно провести непосредственной подстановкой.

Теорема 3.2. *Пусть оператор* $\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\cdot)$ *определен соотношением*

$$\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\psi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{\varkappa}^{-1}(x,y,t,s,\mathfrak{g}(t,(\psi)),\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi)))\psi(y)\,dy$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{\varkappa}(x,y,s,t,\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi)),\mathfrak{g}(t,(\psi)))\psi(y)\,dy. \quad (3.6)$$

Здесь функция $G_{\varkappa}(x,y,s,t,\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C}(\psi)),\mathfrak{g}(t,(\psi)))$ *определена соотношением* (3.2), *в котором переменную* t *необходимо заменить на* s, *переменную* s — *на* t, *а постоянные* $\mathfrak{C}$ *определяются из уравнения*

$$\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C})|_{s=t}=\mathfrak{g}_0(\psi)=\langle\psi|\widehat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \quad (3.7)$$

Тогда оператор $\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\cdot)$ (3.6) *является левым обратным для оператора* $\widehat{U}_{\varkappa}(t,s,\cdot)$ (3.2), *т. е.*

$$\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\widehat{U}_{\varkappa}(t,s,\psi))(x)=\psi(x),\quad \psi\in\mathscr{P}_{\hbar}^{0}. \quad (3.8)$$

Доказательство можно провести непосредственной подстановкой.

Следствие 3.1. *Если функция* $\Psi(x,t)$ *является частным решением уравнения типа Хартри* (0.1), *то справедливо соотношение*

$$\widehat{U}_{\varkappa}\big(t,s,\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\Psi(t))\big)(x)=\Psi(x,t). \quad (3.9)$$

Доказательство. Обозначим $\psi(x)=\Psi(x,t)|_{t=s}$, тогда по теореме 3.1 справедливо $\Psi(x,t)=\widehat{U}_{\varkappa}(t,s,\psi)(x)$. Следовательно, левую часть соотношения (3.9) можно представить в виде

$$\widehat{U}_{\varkappa}\big(t,s,\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\Psi(t))\big)(x)=\widehat{U}_{\varkappa}\big[t,s,\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,s,\widehat{U}_{\varkappa}(t,s,\psi))\big](x)$$
$$=\widehat{U}_{\varkappa}(t,s,\psi)(x)=\Psi(x,t).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.8). Таким образом, утверждение доказано.

4. Операторы симметрии уравнения типа Хартри

Решение задачи Коши для уравнения типа Хартри (0.1) в классе квазиклассически сосредоточенных функций $\mathscr{P}_{\hbar}^{0}$ и явный вид оператора эволюции (3.2) позволяют, в свою очередь, построить в явном виде общие выражения основных конструкций симметрийного анализа [4–9]. Этими конструкциями являются операторы симметрии, однопараметрическое семейство операторов симметрии, генераторы этого семейства (симметрии уравнения (0.1)).

Действительно, пусть $\hat{\mathbf{a}}$ — некоторый оператор, действующий в $\mathscr{P}_{\hbar}^{0}$, т. е. $\hat{\mathbf{a}}:\mathscr{P}_{\hbar}^{0}\to\mathscr{P}_{\hbar}^{0}$, и $\Psi(x,t)$ — произвольная функция из класса $\mathscr{P}_{\hbar}^{t}$. Определим оператор $\widehat{\mathbf{A}}(\,\cdot\,)$ соотношением

$$\Phi(x,t)=\widehat{\mathbf{A}}(\Psi(t))(x)=\widehat{U}_{\varkappa}\big(t,\hat{\mathbf{a}}\,\widehat{U}_{\varkappa}^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x), \quad (4.1)$$

где $\widehat{U}_{\varkappa}(t,\cdot)=\widehat{U}_{\varkappa}(t,0,\cdot)$.

Теорема 4.1. *Если функция* $\Psi(x,t)$ *есть решение уравнения типа Хартри* (0.1), *то* $\Phi(x,t)$ (4.1) *также является решением уравнения* (0.1).

Доказательство непосредственно следует из свойств оператора эволюции, доказанных в теоремах 3.1 и 3.2.

Таким образом, оператор $\widehat{\mathbf{A}}(\,\cdot\,)$, определенный соотношением (4.1), есть оператор симметрии уравнения (0.1).

Пусть оператор $\hat{\mathbf{b}}$ и его операторная экспонента $\exp(\alpha\hat{\mathfrak{b}})$ действуют в классе $\mathscr{P}_\hbar^0$, т. е. $\hat{\mathbf{b}}:\mathscr{P}_\hbar^0\to\mathscr{P}_\hbar^0$ и $\exp(\alpha\hat{\mathbf{b}}):\mathscr{P}_\hbar^0\to\mathscr{P}_\hbar^0$, где α — вещественный параметр. Для произвольной функции $\Psi(x,t)\in\mathscr{P}_\hbar^t$ определим однопараметрическое семейство операторов $\widehat{\mathbf{B}}(\alpha,\cdot)$ соотношением

$$\widehat{\mathbf{B}}(\alpha,\Psi(t))(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\exp\{\alpha\hat{\mathbf{b}}\}\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x). \tag{4.2}$$

По аналогии с предыдущим операторы $\widehat{\mathbf{B}}(\alpha,\cdot)$ образуют однопараметрическое семейство операторов симметрии уравнения (0.1).

Нетрудно убедиться, что для произвольной функции $\Psi(x,t)\in\mathscr{P}_\hbar^t$ справедливо групповое свойство

$$\widehat{\mathbf{B}}(\alpha+\beta,\Psi(t))(x)=\widehat{\mathbf{B}}(\alpha,\widehat{\mathbf{B}}(\beta,\Psi(t)))(x). \tag{4.3}$$

Продифференцировав соотношение (4.2) по параметру α в точке $\alpha=0$, получим

$$\widehat{\mathbf{C}}(\Psi(t))(x)=\frac{d}{d\alpha}\widehat{\mathbf{B}}(\alpha,\Psi(t))(x)|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\widehat{U}_\varkappa\big(t,\exp\{\alpha\hat{\mathbf{b}}\}\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x)|_{\alpha=0}. \tag{4.4}$$

Оператор $\widehat{\mathbf{C}}(\,\cdot\,)$, определенный соотношением (4.4), является генератором однопараметрического семейства операторов симметрии (4.3).

Отметим, что оператор $\widehat{\mathbf{C}}(\,\cdot\,)$ не является оператором симметрии уравнения (0.1). Это связано с тем, что параметры $\mathfrak{C}$, определяющие оператор эволюции $\widehat{U}_\varkappa(t,\cdot)$ в соотношении (4.4), зависят от α. Действительно, величины $\mathfrak{C}$ определяются из уравнения (3.4):

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})|_{t=0}=\langle\exp\{\alpha\hat{\mathbf{b}}\}\phi|\hat{\mathfrak{g}}|\exp\{\alpha\hat{\mathbf{b}}\}\phi\rangle,$$
$$\phi(x)=\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))(x),\quad \Psi(x,t)\in\mathscr{P}_\hbar^t,$$

которое содержит параметр α в явном виде. В результате выражение (4.4) будет содержать производные от оператора эволюции $\widehat{U}_\varkappa(t,\cdot)$ по параметрам $\mathfrak{C}$. Каждая из этих производных представляет собой оператор, отличающийся от оператора эволюции.

Пример. Подставим в соотношение (4.1) вместо оператора $\hat{\mathbf{a}}$ операторы $\hat{a}^+(t)$ и $\hat{a}(t)$ вида (2.9) при $t=0$, т. е.

$$\hat{a}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}[\Delta\hat{p}_0-im\Omega\Delta x_0],\quad \hat{a}^+(0)=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}[\Delta\hat{p}_0+im\Omega\Delta x_0],$$

где

$$\Delta\hat{p}_0=-i\hbar\partial_x-p_0,\quad \Delta x_0=x-x_0.$$

Тогда операторы $\widehat{A}^{(\pm)}(\,\cdot\,)$, определенные соотношениями

$$\widehat{A}^{(+)}(\Psi(t))(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\hat{a}^+(0)\,\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x),$$
$$\widehat{A}^{(-)}(\Psi(t))(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\hat{a}(0)\,\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x),$$

где $\Psi(x,t) \in \mathscr{P}_\hbar^t$, являются операторами симметрии уравнения (0.1), для которых, в частности, справедливо

$$\widehat{A}^{(+)}\big(\Psi_n^{(0)}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n))\big)(x) = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1}^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_{n+1})),$$
$$\widehat{A}^{(-)}\big(\Psi_n^{(0)}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n))\big)(x) = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_{n-1})).$$

Здесь $\Psi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n))$ — квазиклассические траекторно-когерентные состояния вида (2.13), где константы $\mathfrak{C}_n$ определены соотношением (2.12). Таким образом, операторы $\widehat{A}^{(+)}(\,\cdot\,)$ являются нелинейными аналогами операторов «рождения» и «уничтожения». С помощью операторов $\widehat{A}^{(\pm)}(\,\cdot\,)$ соотношения (2.13), (2.12) представим в виде

$$\Psi_n^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{A}^{(+)}(\,\cdot\,))^n\Psi_0^{(0)}(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_0)). \tag{4.5}$$

На функциях $\Psi(x,t) \in \mathscr{P}_\hbar^t$ определим однопараметрическое семейство операторов сдвига $\widehat{D}(\alpha,\cdot)$ соотношением

$$\widehat{D}(\alpha,\Psi(t))(x) = \widehat{U}_\varkappa\big(t,\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha)\,\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,\Psi(t))\big)(x), \tag{4.6}$$

где

$$\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha) = \exp\{\alpha\hat{a}^+(0) - \alpha^*\hat{a}(0)\}, \quad \Psi(x,t) \in \mathscr{P}_\hbar^t, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

Операторы $\widehat{D}(\alpha,\cdot)$ являются операторами симметрии уравнения (0.1), а функции

$$\Psi_\alpha(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_\alpha)) = \widehat{D}\big(\alpha,\Psi_0^{(0)}(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_0))\big)(x) \tag{4.8}$$

— решениями уравнения (0.1) для произвольных комплексных значений α. Здесь параметры $\mathfrak{C}_\alpha$ определяются уравнением (3.4), которое в данном случае имеет вид

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})|_{t=0} = \big\langle\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}(0)|\hat{\mathfrak{g}}|\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}(0)\big\rangle. \tag{4.9}$$

Запишем оператор $\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha)$ в виде

$$\widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha) = \exp\{\beta\Delta\hat{p}_0 + \gamma\Delta x_0\} = \exp\left\{-\frac{i\hbar}{2}\beta\gamma\right\}\exp\{\gamma\Delta x_0\}\exp\{\beta\Delta\hat{p}_0\}, \tag{4.10}$$

где $\beta = [\alpha-\alpha^*]/\sqrt{2\hbar m\Omega}$, $\gamma = [\alpha+\alpha^*](i\Omega-\rho)\sqrt{m/2\hbar\Omega}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)) &= \widehat{\mathscr{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_0))\\ &= \exp\left\{-\frac{i\hbar}{2}\beta\gamma\right\}\exp\{\gamma\Delta x_0 - p_0\beta\}\Psi_0^{(0)}(x-i\hbar\beta,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)),\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\Psi_0^{(0)}(x-i\hbar\beta,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)) &= \Psi_0^{(0)}(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha))\\ &\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-i\hbar p_0\beta - i\hbar Q(0)\Delta x_0\beta - \frac{\hbar^2}{2}Q(0)\beta^2\right]\right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что $Q(0) = im\Omega - m\rho$, следовательно,

$$\gamma + Q(0)\beta = 2(i\Omega-\rho)\alpha\sqrt{\frac{m}{2\hbar\Omega}}.$$

Аналогично находим

$$-\frac{i\hbar}{2}[\beta\gamma + Q(0)\beta^2] = \sqrt{\frac{\hbar m}{2}}\left(\frac{\Omega + i\rho}{\sqrt{\Omega}}\right)\alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{\Omega}\right)[\alpha^2 - |\alpha|^2]. \tag{4.12}$$

Подставив (4.12) в (4.11), получим

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x, 0, \mathfrak{g}(0, \mathfrak{C}_\alpha)) &= \Psi_0^{(0)}(x, 0, \mathfrak{g}(0, \mathfrak{C}_0))\\ &\times \exp\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{\Omega}\right)[\alpha^2 - |\alpha|^2] + (i\Omega - \rho)\sqrt{\frac{2m}{\hbar\Omega}}\alpha\Delta x_0\right\}\\ &= \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}\exp\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{\Omega}\right)[\alpha^2 - |\alpha|^2] + \frac{i}{\hbar}\left(p_0 + \left(1 + \frac{i\rho}{\Omega}\right)\sqrt{2m\Omega\hbar}\alpha\right)\Delta x_0\right.\\ &\left. - \frac{m\Omega}{2\hbar}\left(1 + \frac{i\rho}{\Omega}\right)\Delta x_0^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Обозначив

$$\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha, \quad \alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha,$$

запишем

$$|\Psi_\alpha(x, 0, \mathfrak{g}(0, \mathfrak{C}_\alpha))|^2 = \sqrt{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}\exp\left\{-\frac{m\Omega}{\hbar}\left(\Delta x_0 + \sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega}}\left(\alpha_2 + \frac{\rho}{\Omega}\alpha_1\right)\right)^2 + \frac{2\rho^2}{\Omega^2}\alpha_1^2\right\}. \tag{4.14}$$

Из уравнения (4.9) с учетом (4.14) найдем

$$\mathfrak{C}_\alpha = \left(\frac{1}{m\widetilde{\Omega}}p_\alpha, x_\alpha, 0, 0, \frac{\hbar}{2m\Omega}\right)^\intercal, \tag{4.15}$$

где

$$p_\alpha = p_0 + \sqrt{2m\Omega\hbar}\left(\alpha_1 - \frac{\rho}{\Omega}\alpha_2\right), \quad x_\alpha = x_0 - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega}}\left(\alpha_2 + \frac{\rho}{\Omega}\alpha_1\right).$$

В результате для соответствующего семейства (параметризованного α) решений нелинейного уравнения типа Хартри (0.1) найдем явный вид функций $\Psi_\alpha(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha))$. Тем самым с помощью прямого действия однопараметрического семейства операторов симметрии $\widehat{D}(\alpha, \cdot)$ найдены явные выражения

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)) &= \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}\\ &\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(S(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)) + P(t, \mathfrak{C}_\alpha)\Delta x) - \frac{m(\Omega - i\rho)}{2\hbar}\Delta x^2\right\},\end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\Delta x = x - X(t, \mathfrak{C}_\alpha)$, а

$$S(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)) = \int_0^t (P(t, \mathfrak{C}_\alpha)\dot{X}(t, \mathfrak{C}_\alpha) - \mathfrak{H}(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)))\,dt. \tag{4.17}$$

Для операторов (4.6) справедлив следующий закон умножения:

$$\widehat{D}(\alpha, \widehat{D}(\beta, \Psi(t)))(x) = \exp[\alpha\beta^* - \alpha^*\beta]\widehat{D}(\alpha + \beta, \Psi(t))(x). \tag{4.18}$$

Операторы $\exp(i\gamma)\widehat{D}(\alpha, \cdot)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, задают нелинейный аналог представления группы Гейзенберга — Вейля [21, 22]. Функции $\Psi_\alpha(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha))$ (4.16) в силу (1.20) и (4.15) минимизируют соотношение неопределенностей Шрёдингера (1.15) и, следовательно, являются сжатыми когерентными состояниями.

В заключение отметим, что построенные в работе точные выражения для оператора эволюции и основных объектов симметрийного анализа для уравнения типа Хартри (0.1) могут быть обобщены на случай уравнения типа Хартри в многомерном пространстве с гладкими коэффициентами общего вида. Это можно сделать на основе результатов работ [10, 11]. Однако данное обобщение будет справедливо лишь в приближенном смысле с точностью до $\widehat{O}(\hbar^{(M+1)/2})$, $\hbar \to 0$, где M — порядок системы Гамильтона — Эренфеста. В частности, это позволяет построить особый вид приближенных операторов симметрии (а также симметрий) для указанных выше уравнений типа Хартри, которые естественно назвать квазиклассическими операторами симметрии (симметриями).

Авторы признательны Л. В. Овсянникову, В. В. Пухначеву и А. П. Чупахину за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.

2. *Питаевский Л. П.* Конденсация Бозе — Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // Успехи физ. наук. 1988. Т. 168. С. 641–653.

3. *Во Хань Фук, Четвериков В. М.* Обобщенные солитоны уравнения Шрёдингера с унитарной нелинейностью // Теор. мат. физ. 1978. Т. 36, № 3. С. 345–351.

4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

5. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

6. *Ибрагимов Л. В.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

7. *Olver P. J.* Application of Lie groups to differential equations. New York: Springer-Verl., 1986.

8. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of Maxwell equations. Dordrecht: Reidel, 1987.

9. *Gaeta G.* Nonlinear symmetry and nonlinear equations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Press, 1994.

10. *Belov V. V., Trifonov, A. Yu., Shapovalov A. V.* The trajectory-coherent approximation and the system of moments for the Hartree type equation // Internat. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 32, N 6. P. 325–370.

11. *Белов В. В., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В.* Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри // Теор. мат. физика. 2002. Т. 130, № 3. С. 460–492.

12. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

13. *Белов В. В., Доброхотов С. Ю.* Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. мат. физика. 1988. Т. 92, № 2. С. 215–254.

14. *Bagrov V. G., Belov V. V., Trifonov A. Yu.* Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type // Ann. of Phys. (NY). 1996. V. 246, N 2. P. 231–280.

15. *Пухначев В. В.* Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. С. 535–538.

16. *Ehrenfest P.* Bemerkung über die angenherte Gültigkeit der klassishen Mechanik innerhalb der Quanten Mechanik // Zeits. f. Phys. 1927. V. 45. P. 455–457.

17. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

18. *Robertson H. P.* An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation // Phys. Rev. 1934. V. 46, N 9. P. 794–801.

19. *Додонов В. В., Манько В. И.* Обобщенное соотношение неопределенностей в квантовой механике // Тр. ФИАН. 1983. Т. 152. С. 145–193.

20. *Белов В. В. , Кондратьева М. Ф.* Гамильтоновы системы уравнений для квантовых средних // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 27–39.

21. *Малкин М. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
22. *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
23. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.. М.: Наука, 1966. Т. 2.

Статья поступила 1 декабря 2003 г.

Лисок Александр Леонидович, Трифонов Андрей Юрьевич
Томский политехнический университет, лаборатория математической физики кафедры высшей математики и математической физики,
пр. Ленина, 30, Томск 634034
lisok@mph.phtd.tpu.edu.ru, trifonov@phtd.tpu.edu.ru

Шаповалов Александр Васильевич
Томский гос. университет, кафедра теоретической физики,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
shpv@phys.tsu.ru