Ф. Л. Зак, Структура отображений Гаусса, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 39–50

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 39—50.

УДК 512.763

СТРУКТУРА ОТОБРАЖЕНИЙ ГАУССА

Ф. Л. Зак

Введение

Классическое отображение Гаусса γ сопоставляет каждой точке неособой ориентированной гиперповерхности $H \subset \mathbf{R}^N$ вектор единичной внешней нормали к H в этой точке; таким образом, γ: $H \to S^{N-1}$, где S^{N-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^N$. Для комплексных гиперповерхностей и многообразий коразмерности, большей 1, отображением Гаусса естественно называть отображение, сопоставляющее точке x многообразия X точку в грассмановом многообразии, соответствующую касательному пространству к X в точке x. Многие результаты классической дифференциальной геометрии могут быть интерпретированы в терминах отображения Гаусса.

В алгебраической геометрии оказалось удобнее рассматривать отображения Гаусса не для аффинных, а для проективных многообразий; это связано, в частности, с тем, что, как мы увидим ниже, весьма важную роль играют особенности на бесконечности. Итак, отображение Гаусса γ: $X^n \to G(N, n)$ сопоставляет каждой точке x неособого проективного многообразия $X^n \subset \mathbf{P}^N$ точку в грассмановом многообразии $G(N, n)$ n-мерных проективных подпространств в $\mathbf{P}^N$, соответствующую (проективному) касательному пространству $T_{X, x}$ к X в точке x. Таким образом, слоем γ над n-мерным линейным подпространством $L^n \subset \mathbf{P}^N$ является множество точек (с кратностями), в которых вложенное касательное пространство к X совпадает с L. Аналогично, для всякого $n \leqslant m \leqslant N-1$ можно определить высшее отображение Гаусса γ_m, слой которого над m-мерным линейным подпространством $L^m \subset \mathbf{P}^N$ совпадает с множеством точек $x \in X$ таких, что $T_{X, x} \subset L^m$ (т. е. L касается X; точные определения, пригодные и в особом случае, даются в § 2).

Отображения Гаусса в алгебраической геометрии изучаются фактически с прошлого века и играют очень важную роль (особенно это относится к отображениям $\gamma = \gamma_n$ и γ_{N-1}). Достаточно сказать, что в их терминах определялись все важнейшие инварианты алгебраических многообразий, включая канонический класс. Однако структура гауссовых отображений до последнего времени была исследована очень слабо. В простейшем случае, когда $m = n$, основной вопрос заключается в выяснении того, насколько «искажается» X при отображении γ. Классическая гипотеза, доказываемая в настоящей статье, утверждает, что для комплексных многообразий отображение γ конечно (т. е. все слои γ конечны) и бирационально (т. е. γ почти всюду является изоморфизмом), так что искажение минимально. До сих пор наибольшее продвижение в направлении доказательства этой гипотезы давала теорема Гриффитса и Харриса [3], утверждающая, что если $X \subsetneq \mathbf{P}^N$ — комплексное многообразие, то поле мероморфных функций на X является конечным расширением поля мероморфных функций на $\gamma(X)$ (т. е. *почти все* слои γ состоят из конечного числа точек). Что касается высших отображений Гаусса γ_m, то мы даем точную оценку размерности их слоев и описываем структуру общего слоя. В частности, мы доказываем следующую *теорему о касательных*:

Пусть $L^m \underset{\neq}{\subset} \mathbf{P}^N$ — линейное подпространство, касающееся многообразия $X^n \subset \mathbf{P}^N$ вдоль подмногообразия $Y \underset{\neq}{\subseteq} X$. Тогда $\dim Y \leqslant m - n$.

Например, при $m = N - 1$ мы видим, что гиперплоскость не может касаться многообразия $X^n \subset \mathbf{P}^N$ вдоль подмногообразия размерности, большей или равной $N - n$. Отсюда вытекает другая классическая гипотеза, согласно которой для неособого многообразия $X^n \underset{\neq}{\subseteq} \mathbf{P}^N$ $\dim X^* \geqslant \dim X$, где $X^* \subset \mathbf{P}^{N*}$ — двойственное многообразие, состоящее из точек $\mathbf{P}^{N*}$, соответствующих гиперплоскостям в $\mathbf{P}^N$, касающимся X.

Теорема о касательных является следствием следующего результата. Пусть Y — неприводимое r-мерное подмногообразие неприводимого n-мерного многообразия $X \subset \mathbf{P}^N$, $S(Y, X)$ — замыкание множества точек $\mathbf{P}^N$, лежащих на хордах, соединяющих точки Y с точками X, а $T'(Y, X)$ — многообразие, заметаемое пределами хорд $\langle x, x'\rangle$, когда $x, x' \to y \in Y$ (здесь $\langle x, x'\rangle$ — прямая, проходящая через точки x и $x' \neq x$; в случае, если X неособо, $T'(Y, X)$ совпадает с объединением вложенных касательных пространств к X в точках Y). Тогда либо $T'(Y, X) = S(Y, X)$, либо $\dim T'(Y, X) = r + n$, $\dim S(Y, X) = r + n + 1$. Например, при $Y = X$ мы получаем, что неособое многообразие $X \subset \mathbf{P}^N$ можно изоморфно спроектировать в $\mathbf{P}^M$, $M < 2n$, тогда и только тогда, когда X можно неразветвленно спроектировать в $\mathbf{P}^M$ (частный случай последнего утверждения при $N \leqslant 2n$ был доказан Джонсоном [6]; см. также [2]); этот результат резко контрастирует с недавно доказанной Коэном гипотезой Масси о погружениях топологических многообразий.

В статье рассматриваются приложения указанных выше результатов к геометрии многообразий малой коразмерности, циклам ветвления и двойных точек проекций и другим вопросам. В [12] показано, как из теоремы о касательных выводится гипотеза Хартсхорна о линейной нормальности. Другие приложения результатов статьи даны Фалтингсом, Фуджитой, Баллико и Кьянтини, Айном и др. Следует отметить, что, в отличие от Фалтингса и других авторов, применявших методы формальной геометрии, а также Гриффитса и Харриса, проводивших дифференциально-геометрические вычисления, мы используем чисто геометрические соображения, которые в этой ситуации не только являются более простыми, но и приводят к гораздо более точным результатам.

Полное описание структуры отображений Гаусса возможно и для аналитических подмногообразий комплексных торов. Соответствующие результаты, также имеющие приложения к подмногообразиям малой коразмерности и плюриканоническим системам, будут опубликованы в отдельной статье.

§ 1. Относительные многообразия секущих и локальные свойства проекций

Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — неприводимое невырожденное (т. е. не содержащееся ни в какой гиперплоскости) n-мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем K и пусть $Y^r \subset X^n$ — непустое неприводимое r-мерное подмногообразие X. Положим $\Delta_Y = (Y \times X) \cap \Delta_X = \{(y, x) \in Y \times X \mid x = y\}$, где Δ_X — диагональ в $X \times X$, и пусть $S^0_{Y, X} \subset ((Y \times X) \setminus \Delta_Y) \times \mathbf{P}^N$, $S^0_{Y, X} = \{(y, x, z) \mid z \in \langle x, y\rangle\}$, где через $\langle x, y\rangle$ обозначена хорда, соединяющая точки x и y. Обозначим через $S_{Y, X}$ замыкание $S^0_{Y, X}$ в $Y \times X \times \mathbf{P}^N$, через p^Y_i $(i = 1, 2)$ — проектирование $S_{Y, X}$ на i-й сомножитель $Y \times X \times \mathbf{P}^N$, а через $\varphi^Y\colon S_{Y, X} \to \mathbf{P}^N$ — проектирование на третий сомножитель, и пусть $p^Y_{12} = p^Y_1 \times p^Y_2\colon S_{Y, X} \to Y \times X$, $S(Y, X) = \varphi^Y(S_{Y, X})$,

$T'_{Y,X} = (p_{12}^Y)^{-1}(\Delta_Y)$, $\psi^Y = \varphi^Y |_{T'_{Y,X}}$, $T'(Y, X) = \psi^Y(T'_{Y,X})$. При $Y = X$ $S_{Y,X} = S_X$, $S(Y, X) = SX$ — обычное многообразие секущих, а $T'(X, X) = T'X$ — многообразие касательных звезд (см. [12]), а морфизмы p_i^Y, p_{12}^Y, φ^Y и ψ^Y — ограничения морфизмов p_i, p_{12}, φ и ψ на подмногообразия $S_{Y,X} \subset S_X$ и $T'_{Y,X} \subset T'_X$ (см. [12]).

Определение 1. Конус $T'_{Y,X,y} = \psi^Y((p_{12}^Y)^{-1}(y \times y))$ назовем (проективной) касательной звездой к X в y по отношению к Y. Многообразие $T'(Y, X) = \bigcup_{y \in Y} T'_{Y,X,y}$ назовем многообразием (проективных) касательных звезд к X относительно Y.

Ясно, что $T'_{Y,X,y} \subset T'_{X,y} \subset T_{X,y}$, где $T'_{X,y}$ — (проективная) касательная звезда к X в y [12], а $T_{X,y}$ — (проективное) касательное пространство к X в y. Если X неособо вдоль Y, т. е. $Y \cap \operatorname{Sing} X = \varnothing$ и $Y \subset \operatorname{Sm} X = X \setminus \operatorname{Sing} X$, то $T'(Y, X) = T(Y, X) = \bigcup_{y \in Y} T_{X,y}$.

Следующее предложение обобщает на относительный случай предложение 1 из [12] и доказывается совершенно аналогично.

Предложение 1. а) *Пусть* $y \in Y$, $x \in X$, $x \neq y$, $z \in \langle y, x \rangle$. *Тогда* $T_{S(Y,X),z} \supset \langle T_{Y,y}, T_{X,x} \rangle$, *где* $\langle A \rangle$ *обозначает наименьшее линейное подпространство* $\mathbf{P}^N$, *содержащее* A.

б) *Предположим дополнительно, что* $\operatorname{char} K = 0$. *Тогда для общих точек* $y \in Y$, $x \in X$, $z \in \langle y, x \rangle$ $T_{S(Y,X),z} = \langle T_{Y,y}, T_{X,x} \rangle$.

Пусть $\mathcal{T}_Y$ — *идеал* Δ_Y *в* $Y \times X$, $\Theta'_{Y,X} = \mathcal{S}pec \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}^j/\mathcal{T}^{j+1}$, $y \in Y$, $\Theta'_{Y,X,y} = \Theta'_{Y,X} \otimes k(y)$.

Определение 2. Назовем $\Theta'_{Y,X,y}$ (аффинной) касательной звездой к X в y по отношению к Y.

Нетрудно видеть, что $\Theta'_{Y,X,y}$ содержит касательный конус и содержится в касательной звезде к X в y (см. [6; 12]), которая в свою очередь содержится в касательном пространстве Зариского $\Theta_{X,y}$. При этом $\overline{\Theta'_{Y,X,y}} = T'_{Y,X,y}$ (здесь мы считаем, что X вложено в $\mathbf{P}^N$, а черта обозначает проективное замыкание).

Определение 3. Пусть f: $X \to X'$ — морфизм алгебраических многообразий и пусть $Y \subset X$ — неприводимое подмногообразие. Мы скажем, что f J-неразветвлен по отношению к Y в точке $y \in Y$, если морфизм $d_y f |_{\Theta'_{Y,X,y}}$ квазиконечен. Если f J-неразветвлен по отношению к Y во всех точках $y \in Y$, то мы будем говорить, что f J-неразветвлен по отношению к Y.

Определение 4. В обозначениях определения 3 мы скажем, что f является J-вложением по отношению к Y, если f J-неразветвлен по отношению к Y и взаимно однозначен на $f^{-1}(f(Y))$.

Замечание 1. Если X неособо вдоль Y, то f является J-вложением по отношению к Y тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности Y в X f — замкнутое вложение.

Следующая теорема обобщает теорему 1 из [12] и доказывается совершенно аналогично.

Теорема 1. *Пусть* Y — *неприводимое подмногообразие* X. *Рассмотрим следующие условия*:

а) *Для общего линейного подпространства* $L \subset \mathbf{P}^N$, $\operatorname{codim} L = m + 1$, *проектирование* $X \to \mathbf{P}^m$ *с центром в* L *является* J-*вложением по отношению к* Y.

б) *Существует* $L^{N-m-1} \subset \mathbf{P}^N$ *такое, что проектирование* $X \to \mathbf{P}^m$ *с центром в* L *является* J-*вложением по отношению к* Y.

в) $\dim S(Y, X) \leqslant m$.

г) *Существует открытое по Зарискому подмножество* $U \subset Y \times X$ *такое, что при* $y \times x \in U$ $\dim \langle T_{Y,y}, T_{X,x}\rangle \leqslant m$.

д) *Пусть* $y \in \operatorname{Sm} Y$, $x \in \operatorname{Sm} X$. *Тогда* $\dim \langle T_{Y,y}, T_{X,x}\rangle \leqslant m$.

Тогда а) $\Leftrightarrow$ б) $\Leftrightarrow$ в) $\Rightarrow$ г) $\Leftrightarrow$ д). *Если вдобавок* $\operatorname{char} K = 0$, *то все условия* а) — д) *эквивалентны между собой.*

Следующая теорема является обобщением на относительный случай теоремы 2 из [12] и доказывается по существу тем же способом.

Теорема 2. *Для произвольного неприводимого подмногообразия* $Y^r \subset X^n$ *выполняется ровно одно из следующих условий*:

а) $\dim T'(Y, X) = r + n$, $\dim S(Y, X) = r + n + 1$.

б) $T'(Y, X) = S(Y, X)$.

Доказательство. Пусть $t = \dim T'(Y, X)$. Ясно, что $t \leqslant r + n$. В случае $t = r + n$ теорема очевидна, поскольку $S(Y, X)$ — неприводимое многообразие, $S(Y, X) \supset T'(Y, X)$ и $\dim S(Y, X) \leqslant r + n + 1$.

Предположим, что $t < r + n$, и пусть L^{N-t-1} — линейное подпространство $\mathbf{P}^N$ такое, что $L \cap T'(Y, X) = \varnothing$. Обозначим через $\pi\colon \mathbf{P}^N \setminus L \to \mathbf{P}^t$ проектирование с центром в L, и пусть $X' = \pi(X)$, $Y' = \pi(Y)$. Поскольку $\pi|_X$ — конечный морфизм, $\dim Y' \times X' = r + n > t$ и из теоремы 3.1 работы [2] следует, что $Y_{X'} \times X = (\pi|_Y \times \pi|_X)^{-1}(\Delta_{\mathbf{P}^t})$ — связная схема.

Покажем, что $\operatorname{Supp}(Y_{X'} \times X) = \Delta_{Y}$. Предположим противное. Тогда по определению для всех $y \times x \in (Y_{X'} \times X) \setminus \Delta_Y$ $\varphi^Y((p_{12}^Y)^{-1}(y \times x)) \cap L \neq \varnothing$ и, следовательно, для каждой точки $y \times y \in \Delta_Y \cap \overline{((Y_{X'} \times X) \setminus \Delta_Y)}$ $T'(Y, X) \cap L \supset T_{Y,X,y} \cap L = \varphi^Y((p_{12}^Y)^{-1}(y \times y)) \cap L \neq \varnothing$ вопреки выбору L.

Итак, $\operatorname{Supp} Y_{X'} \times X = \Delta_Y$ и, следовательно, $L \cap S(Y, X) = \varnothing$, так что $t \leqslant \dim S(Y, X) \leqslant N - \dim L - 1 = t$ и $S(Y, X) = T'(Y, X)$, т. е. выполнено условие б). Теорема 2 доказана.

Как и в [12], мы получаем следующие следствия.

Следствие 1. $\operatorname{codim}_{S(Y,X)} T'(Y, X) \leqslant 1$.

Следствие 2. *Пусть* $\pi\colon X^n \to \mathbf{P}^m$ — *проектирование с центром в подпространстве* $L^{N-m-1} \subset \mathbf{P}^N$. *Предположим, что* π J*-неразветвлен по отношению к неприводимому подмногообразию* $Y^r \subset X^n$ *и что* $m < r + n$ *(т. е.* $\dim L \geqslant N - n - r$*). Тогда* π — J*-вложение по отношению к* Y.

Доказательство. Нетрудно видеть, что из наших предположений вытекает, что $L \cap T'(Y, X) = \varnothing$. Следовательно, $\dim L + \dim T'(Y, X) < N$ и $\dim T'(Y, X) < N - \dim L = m + 1 \leqslant n + r$. Поэтому теорема 2 показывает, что $T'(Y, X) = S(Y, X)$. Таким образом, $L \cap S(Y, X) = \varnothing$, что и требовалось.

Следствие 2′. *В условиях следствия 2 предположим, что* π *неразветвлен во всех точках* Y. *Тогда в окрестности* Y π *является изоморфизмом*.

Замечание 2. Совершенно аналогично следствия 2, 2′ и 2″ доказываются для произвольных морфизмов $X \to \mathbf{P}^m$ (а не только для проекций). Соответствующие результаты обобщают результаты § 5 работы [2].

Теорема 3. *Пусть* $Y^r \subset X^n$ — *подмногообразие проективного многообразия* $X^n \subset \mathbf{P}^N$. *Предположим, что существует точка* $u \in \mathbf{P}^N \setminus X$ *такая, что проектирование* $X \to \mathbf{P}^{N-1}$ *с центром в* u *является* J*-вложением по отношению к* Y. *Тогда* $\operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} X = N - n \geqslant \frac{r-b}{2} + 1$, *где* $b = \dim(Y \cap \operatorname{Sing} X)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда Y неприводимо. Пусть $s = \dim S(Y, X)$ и пусть z — общая точка $S(Y, X)$. Положим $L = T_{S(Y, X), z}$, $Q_z = p_1^Y((\psi^Y)^{-1}(z))$. Из теоремы 2 следует, что либо $T'(Y, X) = S(Y, X)$, либо $s = n + r + 1$. В последнем случае $N \geqslant s + 1 = n + r + 2$ и $\operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} X = N - n \geqslant r + 2 > \frac{r-b}{2} + 1$. Следовательно, мы можем считать, что $T'(Y, X) = S(Y, X)$, $Q_z \neq \varnothing$ и $\dim Q_z = r + n - s$. Очевидно, что $L \supset T_{X,x}$ для всех точек $x \in Q_z \setminus \operatorname{Sing} X$.

Пусть $M \subset \mathbf{P}^N$ — общее линейное подпространство коразмерности $b + 1$, $X' = X \cap M$, $Y' = Y \cap M$, $Q'_z = Q_z \cap M$, $L' = L \cap M$. Тогда многообразие X' неособо вдоль Y' и $T(Q'_z, X') \subset L'$. С другой стороны, $X' \not\subset L'$. Поэтому $S(Q'_z, X') \neq T'(Q'_z, X')$ и из теоремы 2 следует, что $\dim S(Q'_z, X') = \dim Q'_z + \dim X' + 1 = (r + n - s - b - 1) + (n - b - 1) + 1 = 2n + r - s - 2b - 1$.

С другой стороны,

$$\dim S(Q'_z, X') \leqslant \dim (S(Y, X) \cap M) = s - b - 1.$$

Следовательно, $2n + r - s - 2b - 1 \leqslant s - b - 1$, $2s \geqslant 2n + r - b$ и $2N \geqslant 2s + 2 \geqslant 2n + r - b + 2$, т. е. $\operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} X = N - n \geqslant \frac{r - b}{2} + 1$. Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть Y^r — подмногообразие многообразия $X^n \subset \mathbf{P}^N$, причем X неособо в окрестности Y. Предположим, что существует точка $u \in \mathbf{P}^N \setminus X$ такая, что проектирование $\pi\colon X \to \mathbf{P}^{N-1}$ с центром в u является изоморфизмом в окрестности Y (согласно следствию 2" теоремы 2 при $N \leqslant n + r$ это эквивалентно неразветвленности π во всех точках Y). Тогда $N \geqslant n + \frac{r+3}{2}$.*

Замечание 3. При $Y = X$ теорема 3 дает $n \leqslant \frac{2N + b - 2}{3}$, что несколько слабее, чем оценка $n \leqslant \frac{2N + b}{3} - 1$, доказанная в теореме 3а) статьи [12]. Объясняется это тем, что при $Y = X$ подмногообразие Q_z можно заменить подмногообразием $Y_z = p_1(\varphi^{-1}(z))$ на единицу большей размерности. Однако при $Y \neq X$ оценка в теореме 3 является точной. Продемонстрируем это на следующих примерах.

Пример 1 (для упрощения рассуждений мы предположим, что $\operatorname{char} K = 0$). а) Пусть $X \subset \mathbf{P}^4$ — рациональная поверхность $\mathbf{F}_1$ степени 3. Тогда X является образом $\mathbf{P}^2$ при рациональном отображении, задаваемом линейной системой квадрик, проходящих через фиксированную точку $\mathbf{P}^2$, т. е. проекцией поверхности Веронезе $v_2(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^5$ из некоторой ее точки. Обозначим через Y минимальное сечение $\mathbf{F}_1$ (так что Y — исключительная кривая первого рода на $\mathbf{F}_1$). Тогда Y — прямая и вложение $X \hookrightarrow \mathbf{P}^4$ задается полной линейной системой $|Y + 2F|$, где F — слой $\mathbf{F}_1$. Поскольку касательная плоскость в произвольной точке X содержит слой, проходящий через эту точку, и, следовательно, пересекает Y, из предложения 1б) следует, что $\dim S(Y, X) = r + n = n + \frac{r+1}{2} = 3$, так что $S(Y, X) = T(Y, X) \neq \mathbf{P}^4$ и существует проектирование $\pi\colon X \to \mathbf{P}^3$, являющееся изоморфизмом в окрестности Y (в подходящей системе координат $\pi(X)$ задается уравнением $u_0 u_3^2 = u_1 u_2^2$). При этом $N = 4 = n + \frac{r+3}{2}$.

б) Пусть $X^6 = G(4, 1) \subset \mathbf{P}^9$ и пусть $Y = \mathbf{P}^3$ — линейное подпространство прямых, проходящих через фиксированную точку $\mathbf{P}^4$. Тогда для общих точек $y \in Y$, $x \in X$ $T_{Y,y} \cap T_{X,x}$ — прямая, соответствующая прямым в $\mathbf{P}^4$, проходящим через фиксированную точку и пересекающим фиксированную прямую. Из предложения 1б) следует, что $\dim S(Y, X) = \dim T(Y, X) = 8 = r + n - 1 = n + \frac{r+1}{2} = N - 1$.

Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — неособое многообразие и пусть D_m (соответственно R_m) — множество двойных точек (соответственно множество ветвления) относительно общего проектирования $\mathbf{P}^N \to \mathbf{P}^m$, $m \geqslant n$. Другими словами, если

L^{N-m-1} — общее линейное подпространство $\mathbf{P}^N$, то

$$D_m = \overline{\{x \in X \mid \exists x' \in x,\ x' \neq x,\ \langle x, x'\rangle \cap L \neq \varnothing\}},$$

$$R_m = \{x \in X \mid T_{X,x} \cap L \neq \varnothing\}.$$

Следствие 4. *Пусть* $2(m-n) \leqslant r \leqslant n-1$. *Тогда для всякого подмногообразия* $Y^r \subset X^n$ $Y^r \cap D_m \neq \varnothing$. *Если вдобавок* $r > 0$, *то для всякого подмногообразия* $Y^r \subset X^n$ $Y^r \cap R_m \neq \varnothing$.

Доказательство. Поскольку $R_m \subset D_m$, достаточно доказать утверждение относительно R_m. Предположим, что $Y^r \cap R_m = \varnothing$. Тогда для общего линейного подпространства $L^{N-m-1} \subset \mathbf{P}^N$ $T(Y, X) \cap L = \varnothing$ и, следовательно, $\dim T(Y, X) \leqslant m$. С другой стороны, из теоремы 3 вытекает, что при $r>0$ $\dim T(Y, X) \geqslant n + \frac{r+1}{2}$. Итак, при наших предположениях $m \geqslant n + \frac{r+1}{2}$, т. е. $r \leqslant 2(m-n)-1$. Следовательно, при $r \geqslant \max\{1, 2(m-n)\}$ $Y^r \cap R_m \neq \varnothing$.

Следствие 4 доказано.

Замечание 4. Утверждение следствия 4 содержательно только при $m \leqslant \frac{3n-1}{2}$. Ясно, что для справедливости следствия 4 достаточно потребовать, чтобы X было неособо в окрестности Y (мы ограничились неособым случаем, чтобы не вводить определения циклов ветвления и кратных точек в общей ситуации). Предшествующие примеры показывают, что оценка в следствии 4 является точной.

Замечание 5. При $m = n$ из следствия 4 нетрудно вывести, что дивизор R_n обилен на X (ср. предложение 3 из § 2).

§ 2. Теорема о касательных. Структура отображений Гаусса

Определение 5. Пусть $L \subset \mathbf{P}^N$ — линейное подпространство. Мы скажем, что L касается многообразия $X \subset \mathbf{P}^N$ вдоль подмногообразия $Y \subset X$ (соответственно L J-касается X вдоль Y, соответственно L J-касается X по отношению к Y), если $L \supset T_{X,y}$ (соответственно $L \supset T'_{X,y}$, соответственно $L \supset T'_{Y,X,y}$) для всех точек $y \in Y$.

Ясно, что если L касается X вдоль Y, то L J-касается X вдоль Y, а если L J-касается X вдоль Y, то L J-касается X по отношению к Y.

Теорема 4. *Пусть* $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — *невырожденное многообразие,* $Y^r \subset X^n$ *и* $Z^b \subset Y^r$ — *замкнутые подмногообразия и пусть* $L^m \subset \mathbf{P}^N$, $n \leqslant m \leqslant N-1$, — *линейное подпространство,* J-*касающееся* X *по отношению к* Y *вдоль* $Y \setminus Z$ (*т. е.* $L \supset T'_{Y,X,y}$ *для всех точек* $y \in Y \setminus Z$). *Тогда* $r \leqslant m - n + b + 1$.

Доказательство. Пусть M — общее линейное подпространство $\mathbf{P}^N$ коразмерности $b+1$. Положим $X' = X \cap M$, $Y' = Y \cap M$, $L' = L \cap M$. Ясно, что $n' = \dim X' = n - b - 1$, $r' = \dim Y' = r - b - 1$, $m' = \dim L' = m - b - 1$ и L' J-касается X' по отношению к Y' вдоль Y'. Другими словами, $T'(Y', X') \subset L'$. С другой стороны, из невырожденности X вытекает, что многообразие $S(Y', X')$, содержащее X', не лежит в подпространстве L'. Следовательно, $S(Y', X') \neq T'(Y', X')$, и из теоремы 2 вытекает, что $\dim T'(Y', X') = r' + n' = r + n - 2(b+1)$. Поскольку $L' \supset T'(Y', X')$, $m' \geqslant r' + n'$, т. е. $r' \leqslant m' - n' = m - n$ и $r \leqslant m - n + b + 1$. Теорема 4 доказана.

Следствие 5. *Если линейное подпространство* $L^m \subset \mathbf{P}^N$ *касается невырожденного многообразия* $X^n \subset \mathbf{P}^N$ *вдоль замкнутого подмногообразия* $Y^r \subset X^n$, *то* $r \leqslant m - n$.

Следствие 5 носит название теоремы о касательных (см. [2]).

Замечание 6. Ясно, что если Z не содержит компонент Y, то можно считать, что $Z \subset Y \cap \operatorname{Sing} X$.

Приведем пример, показывающий, что оценка в теореме 4 является точной.

Пример 2. Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $N = 2n - b - 2$,— конус с вершиной $\mathbf{P}^b$ над неособым проективным многообразием $X' = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{n-b-2} \subset \mathbf{P}^{2n-2b-3}$. Тогда $X^* = (X')^* = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{n-b-2} \subset (\mathbf{P}^b)^* = \mathrm{P}^{2n-2b-3}$ (здесь и в дальнейшем звезда обозначает двойственное многообразие) и подпространство $L^m \subset \subset \mathbf{P}^N$, $n \leqslant m \leqslant N - 1$, касается X в точке $x \in \operatorname{Sm} X$ (и всех точках из $\langle x, \mathbf{P}^b \rangle \setminus \mathbf{P}^b$, где $\langle x, \mathbf{P}^b \rangle$ — $(b + 1)$-мерное линейное подпространство, порожденное x и $\mathbf{P}^b$), если и только если $(N - m - 1)$-мерное подпространство L^* лежит в $(N - n - 1)$-мерном подпространстве $T^*_{X,x} \subset X^*$. Нетрудно видеть, что произвольное $(n - b - 3)$-мерное линейное подпространство, лежащее в X^*, совпадает с $(T_{X,x})^*$ при некотором $x \in X$. Пусть $\mathbf{P}^{n-b-2} \subset X^*$ и пусть L^* — произвольное $(N - m - 1)$-мерное подпространство $\mathbf{P}^{n-b-2}$. Тогда m-мерное подпространство $L = (L^*)^*$ касается X во всех точках из $Y \setminus \mathbf{P}^b$, где $Y = \mathbf{P}^{m-n+b+1} \supset \mathbf{P}^b$, $Y = \{x \in X \mid L^* \subset (T_{X,x})^* \subset \mathbf{P}^{n-b-2}\}$. Таким образом, для подпространства L, многообразия $Y = \mathbf{P}^{m-n+b+1} \subset \subset \mathbf{P}^{n-1} \subset X$ и подмногообразия $Z = \operatorname{Sing} X = \mathbf{P}^b$ в теореме 4 имеет место равенство.

Предложение 2. *Пусть* $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — *невырожденное многообразие, обладающее свойством* R_k (*см.* [4, ch. IV_2, (5.8.2)], *т. е.* X *регулярно в коразмерности* $\leqslant k$ (*иными словами,* $b = \dim(\operatorname{Sing} X) < n - k$), *и пусть* L — m-*мерное линейное подпространство* $\mathbf{P}^N$. *Положим* $X' = X \cdot L$, *и пусть* $b' = \dim(\operatorname{Sing} X')$. *Тогда* $b' \leqslant 2N - m - n + b - 1 = c + \varepsilon + b - 1$, *т. е.* X' *обладает свойством* $R_{k-c-2\varepsilon+1}$, *где* $c = \operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} X$, $\varepsilon = \operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} L$.

Доказательство. Для произвольной точки λ $(\varepsilon - 1)$-мерного линейного подпространства $L^* \subset \mathbf{P}^{N*}$ положим $X_\lambda = X \cdot \lambda^*$, где λ^* — гиперплоскость, соответствующая λ. Ясно, что $X' = \bigcap_{\lambda \in L^*} X_\lambda$. Пусть $Y = \operatorname{Sing} X'$, $Y_\lambda = \operatorname{Sing} X_\lambda$, $\lambda \in L^*$. Нетрудно видеть, что $Y \subset \bigcup_{\lambda \in L^*} Y_\lambda$, так что $b' = \dim Y \leqslant \max_{\lambda \in L^*} b_\lambda + \varepsilon - 1$, где $b_\lambda = \dim Y_\lambda$. Очевидно, что гиперплоскость λ^* касается X во всех точках $Y_\lambda \setminus \operatorname{Sing} X$. Поэтому из теоремы 4 следует, что $b_\lambda \leqslant c + b$. Следовательно, $b' \leqslant c + \varepsilon + b - 1$. Предложение 2 доказано.

Следующий простой пример показывает, что оценка в предложении 2 является точной.

Пример 3. Пусть $X^{N-1} \subset \mathbf{P}^N$ — квадратичный конус с вершиной $\mathbf{P}^b$ и пусть $\left[\frac{N+b}{2}\right] + 1 \leqslant m \leqslant N - 1$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Тогда X^*— неособая квадрика в $(N - b - 1)$-мерном подпространстве $\mathbf{P}^{b*} \subset \mathbf{P}^{N*}$. Как известно, X^* содержит проективное подпространство размерности $\left[\frac{N-b-2}{2}\right]$. Пусть L^* — его произвольное $(N - m - 1)$-мерное линейное подпространство. Положим $L = (L^*)^*$, $X' = X \cdot L$. Тогда $\dim L = m$, и нетрудно видеть, что $Y = \operatorname{Sing} X'$ — $(N - m + b)$-мерное линейное подпространство.

Следующие два следствия немедленно вытекают из предложения 2, предложения 5.8.5 и теоремы 5.8.6 из [4, ch. IV_2].

Следствие 6. *Если многообразие* $X^n \subset \mathbf{P}^N$ *обладает свойствами* $S_{\varepsilon+1} = S_{N-m+1}$ *и* $R_{c+2\varepsilon-1} = R_{3N-2m-n-1}$, а $L^m \subset \mathbf{P}^N$ — *линейное подпространство, для которого* $\dim(X^n \cdot L^m) = m + n - N$, *то схема* $X \cdot L$ *приведена. В частности, если* X *неособо,* $N < \frac{2}{3}(m + n + 1)$ *и* $\dim(X \cdot L) = m + n - N$, *то* $X \cdot L$ — *приведенная схема.*

Следствие 7. *Если многообразие $X^n \subset \mathbf{P}^N$ обладает свойствами $S_{\varepsilon+2} = S_{N-m+2}$ и $R_{c+2\varepsilon} = R_{3N-2m-n}$, то для произвольного линейного подпространства $L^m \subset \mathbf{P}^N$ такого, что* $\dim (X^n \cdot L^m) = n + m - N$, *схема* $X \cdot L$ *нормальна (и, следовательно, неприводима и приведена). В частности, если X неособо, $N \leqslant \frac{2}{3}(m+n)$ и $\dim (X \cdot L) = m + n - N$, то $X \cdot L$ — нормальная схема.*

Для приложений особенно важен случай, когда L — гиперплоскость. Сформулируем наши результаты специально для этого случая.

Следствие 8. а) *Если многообразие $X^n \subset \mathbf{P}^N$ нормально и $N < 2n - b - 1$, где $b = \dim (\mathrm{Sing}\, X)$, то все гиперплоские сечения X приведены. В частности, при $N < 2n$ все гиперплоские сечения неособого многообразия приведены.*

б) *Если многообразие $X^n \subset \mathbf{P}^N$ обладает свойствами S_3 и R_{N-n+2}* (*последнее означает, что $N < 2n - b - 2$*), *то все гиперплоские сечения X нормальны* (*и, следовательно, неприводимы и приведены*). *В частности, если X неособо и $N \leqslant 2n - 1$, то все гиперплоские сечения X нормальны.*

Замечание 7. Отметим, что следствие 7 дает гораздо более точную информацию, чем теоремы типа Бертини, в которых говорится об общих гиперплоских сечениях, однако, как показывают нижеследующие примеры 4 и 5, для его справедливости необходимо наложить некоторые условия на коразмерность X в $\mathbf{P}^N$.

Замечание 8. Если $K = \mathbf{C}$, а $b = -1$, то неприводимость гиперплоских сечений X вытекает из теоремы Барта — Ларсена, согласно которой при $N < 2n - 1$ $\mathrm{Pic}\, X \simeq Z$ порождается классом гиперплоского сечения X (см. [9]).

Приведем примеры, показывающие, что оценки в следствии 8 нельзя улучшить.

Пример 4. Пусть $X_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{n-b-1} \subset \mathbf{P}^{2n-2b-1}$ и пусть $Y_0 = x \times \mathbf{P}^{n-b-2} \subset X_0$ — линейное подпространство. Обозначим через $X_1 \subset \mathbf{P}^{2(n-b-1)}$ сечение X_0 общей гиперплоскостью, проходящей через Y_0. Нетрудно видеть, что X_1 — неособое проективно нормальное многообразие. Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $N = 2n - b - 1$, — проективный конус с вершиной $\mathbf{P}^b$ и основанием X_1. Ясно, что X — нормальное многообразие, причем $\dim (\mathrm{Sing}\, X) = b$, так что X обладает свойствами S_2 и R_{N-n}. Однако у X имеется неприведенное гиперплоское сечение, соответствующее гиперплоскости в $\mathbf{P}^{2n-2b-1}$, касающейся X_0 вдоль Y_0 (см. пример 2).

Пример 5. Пусть $X_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{n-b-2} \subset \mathbf{P}^{2n-2b-3}$ и пусть X — проективный конус с вершиной $\mathbf{P}^b$ и основанием X_0. Тогда $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $N = 2n - b - 2$,— многообразие Коэна — Маколея, причем $\dim (\mathrm{Sing}\, X) = b$, так что X обладает свойствами S_3 и R_{N-n+1}. Однако для всякой гиперплоскости L такой, что $L^* \in X^* = X_0^*$, $L \cdot X = H_1 \cup H_2$ — приводимое и, следовательно, не нормальное многообразие (здесь $\mathrm{Sing}\,(L \cdot X) = H_1 \cap H_2 = \mathbf{P}^{n-2}$; ср. пример 2).

Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — невырожденное многообразие. Для $n \leqslant m \leqslant N - 1$ положим

$$\mathscr{P}_m = \overline{\{(x, \alpha) \in \mathrm{Sm}\, X \times G(N, m) \mid L_\alpha \supset T_{X, x}\}},$$

где $G(N, m)$ — грассманово многообразие m-мерных линейных подпространств $\mathbf{P}^N$, L_α — линейное подпространство, соответствующее точке $\alpha \in G(N, m)$, а черта обозначает замыкание в $X \times G(N, m)$, и обозначим через $p_m\colon \mathscr{P}_m \to X$ (соответственно $\gamma_m\colon \mathscr{P}_m \to G(N, m)$) отображение проектирования на первый (соответственно второй) сомножитель.

Определение 6. Отображение γ_m называется *m-м отображением Гаусса*, а его образ $X_m^* = \gamma_m(\mathscr{P}_m)$ — *многообразием m-мерных касательных подпространств к многообразию X.*

З а м е ч а н и е 9. Особого внимания заслуживают два экстремальных случая: $m = n$ и $m = N - 1$. При $m = n$ мы по существу получаем обычное отображение Гаусса γ: $X \dashrightarrow G(N, n)$, а при $m = N - 1$ $X^*_{N-1} = X^* \subset \mathbf{P}^{N*}$ — двойственное многообразие.

Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — невырожденное многообразие, $\dim(\mathrm{Sing}\, X) = b \geqslant -1$.

Т е о р е м а 5. а) *Для всякой точки* $\alpha \in \gamma_m(p_m^{-1}(\mathrm{Sm}\, X))$ $\dim \gamma_m^{-1}(\alpha) \leqslant m - n + b + 1$.

а′) $\dim X^*_m \geqslant (m - n)(N - m - 2) + (m - b - 1)$.

б) *Для общей точки* $\alpha \in X^*_m$ $\dim \gamma_m^{-1}(\alpha) \leqslant \max\{b + 1, m + n - N - 1\}$.

б′) $\dim X^*_m \geqslant \min\{(m - n)(N - m) + (n - b - 1),\ (m - n + 1)(N - m) + 1\}$.

в) *Пусть* $\mathrm{char}\, K = 0$ *и пусть* $\gamma_m = \nu_m \circ \tilde{\gamma}_m$ — *разложение Штейна. Тогда* ν_m — *бирациональный изоморфизм, а общий слой морфизма* γ_m (*и* $\tilde{\gamma}_m$) — *линейное подпространство* $\mathbf{P}^N$ *размерности* $\dim \mathcal{P}_m - \dim X^*_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а) немедленно вытекает из теоремы 4, а утверждение а′) — из а) (поскольку $\dim \mathcal{P}_m = \dim X + \dim G(N - n - 1, m - n - 1) = n + (m - n)(N - m)$).

б) Предположим сначала, что $m = N - 1$. Ясно, что $\dim \gamma_{N-1}^{-1}(\alpha) \leqslant n - 1$, и достаточно проверить, что если $n - 1 \geqslant b + 2$, т. е. $n \geqslant b + 3$, то $\dim \gamma_{N-1}^{-1}(\alpha) \neq n - 1$. Предположим противное, и пусть x — общая точка X. Поскольку $n - 1 > b + 1$, из теоремы 4 следует, что система дивизоров $Y_\alpha = p_{N-1}(\gamma_{N-1}^{-1}(\alpha))$, $\alpha \in (T_{X,x})^*$, подвижна и, следовательно, $X = \overline{\bigcup_\alpha Y_\alpha}$, где α пробегает множество общих точек $(T_{X,x})^*$. Следовательно, для общей точки $y \in X$ существует гиперплоскость $\Lambda_y \subset (T_{X,x})^*$ такая, что для общей точки $\beta \in \Lambda_y$ $L_\beta \supset T_{X,y}$. Но тогда $\langle T_{X,x}, T_{X,y}\rangle \subset (\Lambda_y)^* = \mathbf{P}^{n+1}$, т. е. для общей пары точек $x, y \in X$ $\dim(T_{X,x} \cap T_{X,y}) = n - 1$. Отсюда следует, что либо все n-мерные линейные пространства из $\gamma_n(X)$ содержатся в некотором линейном подпространстве $\mathbf{P}^{n+1} \subset \mathbf{P}^N$, либо все они проходят через общее $(n - 1)$-мерное линейное подпространство $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^N$. Но в первом случае X — гиперповерхность и $\dim Y_\alpha = n - 1 \leqslant b + 1$ вопреки нашему предположению, а во втором случае $X^* = \mathbf{P}^{N-n}$, и нетрудно убедиться, что пересечение X с общим линейным подпространством $\mathbf{P}^{N-n+1} \subset \mathbf{P}^N$ — неособая странная кривая, так что $\mathrm{char}\, K = 2$, а X — квадрика, и мы опять приходим к противоречию. Итак, утверждение б) справедливо в случае $m = N - 1$ (если $\mathrm{char}\, K = 0$, то доказательство заметно упрощается).

Предположим теперь, что утверждение б) доказано при $m = k + 1$, и докажем его при $m = k$. Ясно, что для общих точек $\alpha_k \in X^*_k$, $\alpha_{k+1} \in X^*_{k+1}$ $\dim Y_{\alpha_k} \leqslant \dim Y_{\alpha_{k+1}}$. Поэтому, если $b + 1 \geqslant k + n - N$, то $\dim Y_{\alpha_k} \leqslant \dim Y_{\alpha_{k+1}} \leqslant b + 1$. Предположим, что $\dim Y_{\alpha_{k+1}} \leqslant k + n - N$, $k + n - N > b + 1$. Если $\dim Y_{\alpha_k} < \dim Y_{\alpha_{k+1}}$, то утверждение б), очевидно, справедливо. Предположим противное. Тогда для общей точки $x \in X$ и общей точки $\alpha_{k+1} \in X^*_{k+1}$ такой, что $Y_{\alpha_{k+1}} \ni x$, каждая гиперплоскость в $L_{\alpha_{k+1}}$, содержащая $T_{X,x}$, касается X во всех неособых на X точках некоторой $\dim Y_{\alpha_{k+1}}$-мерной компоненты $Y_{\alpha_{k+1}}$, и из теоремы 4 следует, что $\dim Y_{\alpha_{k+1}} \leqslant b + 1$. Но тогда $\dim Y_{\alpha_k} = \dim Y_{\alpha_{k+1}} \leqslant b + 1$, так что снова $\dim Y_{\alpha_k} \leqslant \max\{b + 1, k + n - N - 1\}$. Утверждение б) доказано.

Утверждение б′) немедленно следует из б).

в) Пусть α_m — общая точка X^*_m. Линейное подпространство $L^m_{\alpha_m} \subset \mathbf{P}^N$ касается X во всех точках подмногообразия $Y_{\alpha_m} \cap \mathrm{Sm}\, X$, где $Y_{\alpha_m} =$

$= p_m (\gamma_m^{-1} (\alpha_m))$, причем нетрудно видеть, что $Y_{\alpha_m} \cap \operatorname{Sm} X = \bigcap (Y_\alpha \cap \cap \operatorname{Sm} X)$, где α пробегает множество точек X^*, для которых $L_\alpha \supset L_{\alpha_m}$. Из классической теоремы рефлексивности К. Сегре (см., например, [8]) следует, что если $\operatorname{char} K = 0$, то для общей точки $\alpha \in X^*$ подмногообразие $Y_\alpha = p_{N-1} (\gamma_{N-1}^{-1} (\alpha))$ совпадает с линейным подпространством $(T_{X^*,\alpha})^*$. Следовательно, $Y_{\alpha_m} = \overline{Y_{\alpha_m} \cap \operatorname{Sm} X} = \bigcap_{L_\alpha \supset L_{\alpha_m}} (T_{X^*,\alpha})^*$ также является линейным подпространством $\mathbf{P}^N$. Поскольку $\operatorname{char} K = 0$, морфизм γ_m сепарабелен и, следовательно, гладок в общей точке. Поэтому поле функций $K (X_m^*)$ алгебраически замкнуто в $K (\mathscr{P}_m)$ и ν_m — бирациональный изоморфизм.

Теорема 5 доказана.

Следствие 9. *Если* $\operatorname{char} K = 0$, $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — *неособое многообразие*, $N - n + 1 \leqslant m \leqslant N - 1$, *то общее* m-*мерное касательное подпространство касается* X *вдоль не более чем* $(m + n - N - 1)$-*мерного линейного подпространства (при* $N \geqslant 2n$ *эта оценка лучше, чем оценка, данная в теореме* 4). *При* $n \leqslant m \leqslant N - n + 1$ *общее* m-*мерное касательное подпространство касается* X *в одной-единственной точке.*

Следствие 10. *Пусть* $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $X^n \neq \mathbf{P}^n$, $n^* = \dim X^*$, $b = \dim (\operatorname{Sing} X)$. *Тогда* $n^* \geqslant n - b - 1$. *В частности, для неособого многообразия* X $n^* \geqslant n$. *Если* $n \geqslant b + 3$, *то* $n^* \geqslant N - n + 1$ *(эта оценка лучше предыдущей при* $N \geqslant 2n - b - 1$).

Обе оценки в следствии 10 являются точными: например, для многообразия Сегре $X^n = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^{2n-1} = \mathbf{P}^N$ $X^* \simeq X$ и $n^* = n = N - n + 1$.

Замечание 10. В случае $\operatorname{char} K = 0$, $b = -1$ неравенство $n^* \geqslant N - n + 1$ было независимо доказано А. Ландманом (см. [7]). Другое доказательство в этом случае было ранее дано автором (см. [11], где рассмотрен случай $n = 2$; общий случай совершенно аналогичен).

Следствие 11. *Пусть* $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $X^n \neq \mathbf{P}^n$, $b = \dim (\operatorname{Sing} X)$. *Тогда* $\dim \gamma_n (X) \geqslant n - b - 1$. *В частности, для неособого многообразия* X^n $\dim \gamma_n (X) = \dim X$ *и* γ_n — *конечный морфизм. Если вдобавок* $\operatorname{char} K = 0$, *то* γ_n — *бирациональный изоморфизм (т. е.* γ_n — *морфизм нормализации).*

Замечание 11. В случае $K = \mathbf{C}$, $b = -1$ Гриффитс и Харрис [3] доказали, что $\dim \gamma_n (X) = \dim X$. После появления сообщения о результатах автора [2] Айн [1] и Ран [10] дали другие доказательства конечности γ_n в этом случае. Наше первоначальное доказательство следствия 11 (а также общей теоремы 5) использовало методы формальной геометрии. Приведем набросок этого доказательства следствия 11.

Ясно, что мы можем предположить, что $b = -1$. Предположим, что, вопреки утверждению следствия 11, n-мерное подпространство L, соответствующее точке $\alpha_L \in G (N, n)$, касается X вдоль неприводимого подмногообразия Y, $\dim Y > 0$, т. е. $Y \subset \gamma_n^{-1} (\alpha_L)$. Пусть $\mathfrak{X} = X_{/Y}$ — пополнение X вдоль Y и пусть $\mathfrak{G} = \gamma_n (X)_{/\alpha_L}$ — формальная окрестность точки α_L в проективном многообразии $\gamma_n (X) \subset G (N, n)$. Поскольку $\dim \gamma_n (X) > 0$ (ибо $X \neq \mathbf{P}^n$) и $H^0 (\mathfrak{G}, \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}) \hookrightarrow H^0 (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, $H^0 (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ — бесконечномерное векторное пространство над K. С другой стороны, пусть $M \subset \mathbf{P}^N$ — линейное подпространство такое, что $\dim M = N - n - 1$, $L \cap M = \varnothing$, и пусть $\pi\colon X \to \mathbf{P}^n$ — проектирование с центром в M. Тогда $\pi_{/Y}\colon \mathfrak{X} \to \mathbf{P}^n_{/\pi(Y)}$ — изоморфизм формальных пространств и, следовательно, $H^0 (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \simeq H^0 (\mathfrak{L}, \mathcal{O}_{\mathfrak{L}})$, где $\mathfrak{L} = L_{/Y} \simeq \mathbf{P}^n_{/\pi(Y)}$ — пополнение подпространства L вдоль Y. Но по известной теореме о формальных функциях [5] при $\dim Y > 0$ $H^0 (\mathfrak{L}, \mathcal{O}_{\mathfrak{L}}) = K$. Полученное противоречие и доказывает следствие 11.

Помимо интерпретации, данной в определении 6, отображение Гаусса $\gamma_n\colon X \to G (N, n)$, где $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $X^n \neq \mathbf{P}^n$,— неособое многообразие, допускает и другие интерпретации. Прежде всего, γ_n — отображение, соответствующее векторному расслоению $\mathcal{N}(-1)$ (где $\mathcal{N}$ — нормальное расслоение к X в $\mathbf{P}^N$) с выделенным $(N+1)$-мерным векторным пространством сечений, отвечающих точкам K^{N+1} (где $\mathbf{P}^N = (K^{N+1} \setminus 0)/K^*$).

Далее, пусть $L \subset \mathbf{P}^N$, $\lim L = N - n - 1$,— общее линейное подпространство и пусть $\pi_L \colon X \to \mathbf{P}^n$ — проектирование с центром в L. Обозначим через R_L дивизор ветвления конечного накрытия π_L, $R_L = \{x \in X \mid L \cap T_{X,x} \neq \varnothing\}$. Линейная система $|R_L|$, порожденная дивизорами R_L, $L \in G(N, N-n-1)$, задает отображение Гаусса γ_n. При этом $|R_L|$ не имеет базисных точек, а дивизоры ветвления R_L, отвечающие всевозможным линейным подпространствам $L^{N-n-1} \subset \mathbf{P}^N$, являются прообразами дивизоров Шуберта на $G(N, n)$.

Предложение 3. *Линейная система $|R_L|$ обильна.*

Доказательство. Предложение 3 немедленно вытекает из следствия 11 ввиду [4, ch. II, cor. (6.6.3)].

Замечание 12. В случае char $K = 0$ Эйн [1] доказал, что полная линейная система, порожденная дивизорами ветвления, обильна для произвольного неособого конечного накрытия $\mathbf{P}^n$.

Точные последовательности

$$0 \to \mathcal{T}_X \to \mathcal{O}^{N+1} \to \mathcal{N}(-1) \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{T}_X \to \Theta_X(-1) \to 0,$$

где Θ_X — касательное расслоение к X, а $\mathcal{T}_X$ — векторное расслоение ранга $n+1$, проективизации слоев которого естественно соответствуют проективным касательным пространствам к X, показывают, что $\gamma_n^*(\mathcal{O}_{G(N,n)}(1)) \simeq \det \mathcal{T}_X^* \simeq K_X(n+1) = K_X \otimes \mathcal{O}_X(n+1)$, где K_X — каноническое расслоение. Отметим, что именно тот факт, что сечение линейного расслоения $K_X(n+1)$ обращается в нуль вдоль R_L, лежит в основе классического определения канонического класса. Из предложения 3 немедленно вытекает

Следствие 12. *Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$, $X^n \neq \mathbf{P}^n$,— неособое многообразие. Тогда $K_X(n+1)$ — обильное линейное расслоение.*

Замечание 13. На самом деле в условиях следствия 12 расслоение $K_X(n+1)$ является даже очень обильным, по крайней мере если char $K = 0$ (ср. [1]). Это нетрудно доказать индукцией по n, воспользовавшись тем, что у X существует достаточно много неособых гиперплоских сечений, причем по теореме Кодаиры об исчезновении для такого сечения $H^{n-1} \subset X^n$ полная линейная система $|K_H + nH^2| = |K_X + (n+1)H \cdot H|$ высекается линейной системой $|K_X + (n+1)H|$ (здесь K_H — канонический класс на H).

Предложение 4. *Пусть $X^n \subset \mathbf{P}^N$ — невырожденное многообразие, $b = \dim(\operatorname{Sing} X)$, $c = \operatorname{codim}_{\mathbf{P}^N} X$ и пусть $Y^r \subset X$ — подмногообразие X, для которого $m - r = \operatorname{codim}_L Y < c = N - n$, где $L^m = \langle Y \rangle$ — линейная оболочка Y. Тогда $r \leqslant \min\left\{n-1, \left[\frac{N+b}{2}\right]\right\}$, где квадратные скобки обозначают целую часть.*

Доказательство. Без ущерба для общности мы можем считать, что $Y \not\subset \operatorname{Sing} X$. Из условия вытекает, что для произвольной точки $y \in Y$ $\dim(T_{X,y} \cap L) \geqslant \dim T_{Y,y} \geqslant r$. Следовательно,

$$\gamma_X(Y) = \overline{\gamma_X(Y \cap \operatorname{Sm} X)} \subset \{\alpha \in G(N, n) \mid \dim L_\alpha \cap L \geqslant r\} = S(L, r) \subset G(N, n),$$

где $S(L, r)$ — клетка Шуберта. Поскольку по условию $m - r < N - n$, $n + m - r < N$, так что для всякой точки $y \in Y \cap \operatorname{Sm} X$ существует гиперплоскость M, содержащая L и касающаяся X в y. Положим

$$S(M, L, r) = \{\alpha \in G(N, n) \mid L_\alpha \subset M, \ \dim L_\alpha \cap L \geqslant r\}.$$

Тогда $S(M, L, r) \subset S(L, r)$, $\dim S(M, L, r) = (r+1)(m-r) + (n-r)(N-n-1)$, $\dim S(L, r) = (r+1)(m-r) + (n-r)(N-n)$ и $\operatorname{codim}_{S(L,r)} S(M, L, r) = n - r = \operatorname{codim}_X Y$. Заменив, если необходимо, r на $\min\limits_{y \in Y} (\dim T_{X,y} \cap L)$, мы можем считать, что $\gamma_X(Y) \cap S(M, L, r) \cap \operatorname{Sm}(S(L, r)) \neq \varnothing$. Тогда

$$\dim(\gamma_X(Y) \cap S(M, L, r)) \geqslant \dim \gamma_X(Y) - \operatorname{codim}_{S(L,r)} S(M, L, r) = (r-f) - (n-r) = 2r - n - f,$$

где f — размерность общего слоя $\gamma_X|_Y$. С другой стороны,

$$\gamma_X(Y) \cap S(M, L, r) = \overline{\gamma_X(\{y \in Y \cap \operatorname{Sm} X \mid T_{X,y} \subset M\})},$$

и из теоремы 4 вытекает, что

$$\dim(\gamma_X(Y) \cap S(M, L, r)) \leqslant N - n + b - f.$$

Объединяя последние две формулы, мы видим, что $2r - n - f \leqslant N - n + b - f$, т. е. $r \leqslant \left[\frac{N+b}{2}\right]$, что и требовалось.

Замечание 14. При $K = \mathbf{C}$, $b = -1$ предложение 4 можно вывести также из теоремы Барта — Ларсена [9].

Замечание 15. Нетрудно построить примеры, показывающие, что оценка в предложении 4 является точной (особые многообразия, для которых в теореме 6 имеет место равенство, строятся как конусы с вершиной $\mathbf{P}^b$ над неособыми).

Замечание 16. Интересно сравнить предложение 4 с известным классическим результатом (впервые строго доказанным, по-видимому, Льюисом), в котором не накладывается условий на r, но вместо этого предполагается, что L — общее линейное подпространство.

Следствие 13. *Если $X \neq \mathbf{P}^n$, то X не содержит линейных подпространств размерности, большей $\left[\frac{N+b}{2}\right]$. Если X не является гиперповерхностью, то X не содержит проективных гиперповерхностей размерности, большей $\left[\frac{N+b}{2}\right]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ein L.* The ramification divisors for branched coverings of $\mathbf{P}^n_k$ // Math. Ann.—1982. Bd. 261.— S. 483—485.
2. *Fulton W.*, *Lazarsfeld R.* Connectivity and its applications in algebraic geometry // Lecture Notes in Math.— 1981. № 862.— P. 26—92. Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York.
3. *Griffiths Ph.*, *Harris J.* Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.— 1979. T. 12.— P. 355—432.
4. *Grothendieck A.* Eléments de géométrie algébrique. Ch. II // Publ. Math. IHES.— 1961. № 8. Ch. IV_2; ibid.— 1965. № 24.
5. *Hironaka H.*, *Matsumura H.* Formal functions and formal embeddings // J. Math. Soc. Japan.— 1968. V. 20.— P. 52—82.
6. *Johnson K.* Immersion and embedding of projective varieties // Acta Math.— 1978. V. 140.— P. 49—74.
7. *Клейман С. Л.* Численная теория особенностей // УМН.— 1980. Т. 35, № 6.— С.69—148.
8. *Kleiman S. L.* Concerning the dual variety // Proc. 18th Scand. Congr. Math. Aarhus.— 1981.— P. 386—396. Birkhäuser Verlag, Basel — Boston — Stuttgart.
9. *Larsen M. E.* On the topology of complex projective manifolds // Invent. Math.— 1972. V. 19.— P. 251—260.
10. *Ran Z.* The structure of Gauss-like maps // Compos. Math.— 1984. V. 52.— P. 171—177.
11. *Зак Ф. Л.* О поверхностях с нулевыми циклами Лефшеца // Мат. заметки.— 1973. Т. 13.— С. 869—880.
12. *Зак Ф. Л.* Проекции алгебраических многообразий // Мат. сб.— 1981. Т. 116.— С. 593—602.

Центральный экономико-математический институт АН СССР

Поступило в редакцию 3 июня 1985 г.