G. Pfeiffer, Les propriétés des opérateurs d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre,
Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 1931, Issue 4, 467–478

https://www.mathnet.ru/eng/im5213

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Взаимоотношение между задачами S. Lie и A. Buhl'я *

Г. В. ПФЕЙФФЕРА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Возьмем линейное однородное уравнение:

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

с независимыми интегралами:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}. \tag{2}$$

Оператором уравнения (1) называется бесконечно малое преобразование:

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{3}$$

которое перемещает его интегралы: если φ-интеграл уравнения (1), то $Y(\varphi)$ — его же интеграл.

S. Lie ** показал, что операторы (3) определяются соотношением:

$$XY(f) - XY(f) = \lambda X(f), \tag{4}$$

где λ — произвольная функция независимых переменных.

Операторы уравнения (1) необходимо разделить на два класса:

* G. Pfeiffer. Quelques additions au problème de M. Buhl Atti del congresso internazionale dei matematici. Bologna, 1928.

** S. Lie u. Fr. Engel. Theorie der Transformationsgruppen. Lpz., 1888, B.I, SS. 138—143.

a) операторы:

$$X(f),\quad \rho X(f), \tag{5}$$

ρ — произвольная функция независимых переменных,

обращающиеся для интегралов (2) в нуль, и

b) операторы:

$$Y(f), \tag{6}$$

которые для интегралов (2) могут быть нулями, но не для всех.

Операторы (5) по своим свойствам существенно отличны от операторов (6). S. Lie * называет их тривиальными; тем не менее, как увидим далее, роль их в теории операторов значительна.

Оператор:

$$Z(f) = X(f) \tag{7}$$

удовлетворяет тождеству:

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0. \tag{8}$$

Если умножим $X(f)$ на интеграл уравнения (1), то получим оператор:

$$Z(f) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) X(f), \tag{9}$$

Φ — произвольная функция аргументов,

обладающий тем же свойством (8).

Умножив $X(f)$ на ρ, составим оператор:

$$Z(f) = \rho X(f), \tag{10}$$

удовлетворяющий соотношению (4) при $\lambda = X(\rho)$:

$$XZ(f) + ZX(f) = X(\rho) X(f). \tag{11}$$

Оператор:

$$Z(f) = Y(f) \tag{12}$$

удовлетворяет тождеству:

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda X(f). \tag{13}$$

Если умножим $Y(f)$ на интеграл уравнения (1), то получим оператор:

$$Z(f) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) Y(f), \tag{14}$$

Φ — произвольная функция аргументов,

* Ibidem, S. 143.

обладающий свойством:

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda\Phi X(f). \tag{15}$$

Умножив $Y(f)$ на ρ, составим бесконечно малое преобразование:

$$Z(f) = \rho Y(f), \tag{16}$$

для которого имеет место тождество:

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda\rho X(f) + X(\rho)Y(f) = \lambda\rho X(f) + X(\log\rho)Z(f). \tag{17}$$

Операторы, отличающиеся множителями, представляющими интегралы уравнения (1), следует считать несущественно различными.

Нами показано,* что на основании тождества:

$$XH(f) - HX(f) \equiv pX(f) + qH(f), \quad p \neq 0, \ q \neq 0, \tag{18}$$

розыскав решение σ уравнения:

$$X(\log\sigma) = -q, \tag{19}$$

можно написать оператор уравнения (1):

$$Z(f) = \sigma H(f), \tag{20}$$

обладающий свойством:

$$XZ(f) - ZX(f) = lX(f), \quad l = \lambda\sigma \neq 0. \tag{21}$$

Подставив в соотношение (18) интеграл φ уравнения (1), для которого:

$$H(\varphi) \neq 0, \tag{22}$$

получим:

$$X\log\frac{1}{H(\varphi)} = -q. \tag{23}$$

Отсюда находим решение σ уравнения (19):

частное:

$$\sigma = \frac{1}{H(\varphi)} \tag{24}$$

* Г. Пфейффер. Теоремы, выясняющие ряд вопросов в задаче о перестановке решений линейного уравнения с частными производными первого порядка. ДАН-А, 1929, стр. 177—182; id.: Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений. ДАН-А, 1930, стр. 405—409.

и общее:

(25) $$\sigma = \frac{\Phi(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1})}{H(\varphi)},$$

Φ — произвольная функция аргументов.

Выражение:

(26) $$\frac{H(f)}{H(\varphi)}$$

оператор уравнения (1).

Применив полученное заключение к зависимости (17), построим оператор:

(27) $$\frac{Z(f)}{Z(\varphi)} = \frac{Y(f)}{Y(\varphi)}.$$

Но $Y(\varphi)$ — интеграл уравнения (1), поэтому за оператор можно взять:

(28) $$Y(f).$$

По соотношениям (11), (15) видно, что если возьмем $m+1 \leqslant n$ независимых между собою операторов уравнения (1):

(29) $$Y_1(f),\ Y_2(f), \ldots Y_m(f),\ X(f),$$

(30) $$XY_i(f) - Y_i X(f) \equiv \lambda_i X(f), \qquad i = 1, 2, \ldots m.$$

то выражение:

(31) $$Z(f) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) Y_i(f) + \rho X(f),$$

Φ_i — произвольная функция аргументов,

ρ — произвольная функция независимых переменных,

— оператор уравнения (1), обладающий свойством:

(32) $$XZ(f) - ZX(f) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i \{XY_i(f) - Y_i X(f)\} + X(\rho) X(f) =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i + X(\rho)\right\} X(f).$$

Положим, что максимальное число независимых операторов уравнения (1) равно m, и что они таковы:

$$Y_1(f),\ Y_2(f),\ \ldots\ Y_{m-1}(f),\ Y_m(f), \tag{33}$$

$$XY_i(f) - Y_i X(f) = \lambda_i X(f), \qquad i = 1, 2, \ldots m, \tag{34}$$

тогда операторы:

$$Y_{m+1}(f), \tag{35}$$

$$XY_{m+1}(f) - Y_{m+1} X(f) = \lambda_{m+1} X(f) \tag{36}$$

и

$$X(f) \tag{37}$$

линейные функции операторов (33):

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m} \rho_j Y_j(f) = \rho_1 Y_1(f) + \tag{38}$$
$$+ \rho_2 Y_2(f) + \cdots + \rho_{m-1} Y_{m-1}(f) + \rho_m Y_m(f),$$

$$X(f) = \sum_{j=1}^{m} \pi_j Y_j(f) = \pi_1 Y_1(f) + \tag{39}$$
$$+ \pi_2 Y_2(f) + \cdots + \pi_{m-1} Y_{m-1}(f) + \pi_m Y_m(f).$$

Приняв:

$$\pi_m \neq 0, \tag{40}$$

мы допускаем, что операторы:

$$X(f),\ Y_1(f),\ \ldots\ Y_{m-2}(f),\ Y_{m-1}(f) \tag{41}$$

независимы.

На основании тождеств (38), (39) имеем:

$$\lambda_{m+1} X(f) = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k\right) X(f) + \sum_{j=1}^{m} X(\rho_j)\, Y_j(f), \tag{42}$$

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \pi_k\right) X(f) + \sum_{j=1}^{m} X(\pi_j)\, Y_j(f); \tag{43}$$

$$(44)\qquad \left(\lambda_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k\right)\sum_{j=1}^{m}\pi_j Y_j(f)=\sum_{j=1}^{m}X(\rho_j)\,Y_j(f),$$

$$(45)\qquad -\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\pi_k\right)\sum_{j=1}^{m}\pi_j Y_j(f)=\sum_{j=1}^{m}X(\pi_j)\,Y_j(f);$$

$$(46)\qquad \left(\lambda_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k\right)\pi_j=X(\rho_j),\qquad j=1,2,\dots m,$$

$$(47)\qquad X(\log\pi_j)=-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\pi_k.\qquad j=1,2,\dots m.$$

Равенства (47) дают зависимости:

$$(48)\qquad X(\log\pi_1)=X(\log\pi_2)=\cdots=X(\log\pi_{m-1})=$$
$$=X(\log\pi_m)=-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\pi_k;$$

$$(49)\qquad \begin{aligned}\rho_0\pi_1&=\Phi_1(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_{n-1}),\\ \rho_0\pi_2&=\Phi_2(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_{n-1}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_0\pi_{m-1}&=\Phi_{m-1}(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_{n-1}),\end{aligned}$$

Φ_i — некоторые функции аргументов

(они определенные, ибо оператор $X(f)$ определенный),

$$(50)\qquad \rho_0=\frac{1}{\pi_m};$$

$$(51)\qquad X(\rho_0)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\lambda_\nu\Phi_\nu+\lambda_m.$$

Тождество (39) принимает форму:

$$(52)\qquad \rho_0X(f)=\sum_{j=1}^{m-1}\Phi_j Y_j(f)+Y_m(f)=$$
$$=\Phi_1Y_1(f)+\Phi_2Y_2(f)+\cdots+\Phi_{m-1}Y_{m-1}(f)+Y_m(f).$$

Считаясь с тем обстоятельством, что некоторые коэфициенты π_i строки (39) могут быть нулями, мы, в силу равенства (52), приходим к следующего рода заключению: существует не менее двух и не более m множителей ρ_0, вообще говоря, функций независимых переменных, при которых операторы:

$$\rho_0 X(f) \tag{53}$$

линейные выражения операторов (33) с коэфициентами — функциями интегралов (2) (один из коэфициентов равен единице); отношения множителей ρ_0 — функции интегралов (2).

При любом множителе ρ оператор $\rho X(f)$ указанным свойством не обладает.

Из равенств (46), (49), (50) вытекают соотношения:

$$\frac{\rho_0 X(\rho_1)}{\Phi_1} \cdots = \frac{\rho_0 X(\rho_{m-1})}{\Phi_{m-1}} = \frac{\rho_0 X(\rho_m)}{1} = \lambda_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k; \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 - \omega\Phi_1 - \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \\ \rho_2 - \omega\Phi_2 = \Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{m-1} = \omega\Phi_{m-1} = \Psi_{m-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \end{aligned} \tag{55}$$

Ψ_i — некоторые функции аргументов

(они произвольные, поскольку оператор $Y_{m+1}(f)$ произволен),

$$\omega = \rho_m; \tag{56}$$

$$\lambda_{m+1} = \rho_0 X(\omega) + \omega X(\rho_0) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \Psi_\nu,$$

$$\lambda_{m+1} = X(\rho_0 \omega) + \sum_{\nu-1}^{m-1} \lambda_\nu \Psi_\nu. \tag{57}$$

Тождество (38) принимает формы:

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega\Phi_j + \Psi_j) Y_j(f) + \omega Y_m(f) \tag{58}$$

и на основании (52):

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j Y_j(f) + \omega\rho_0 X(f). \tag{59}$$

Коэфициент ω может быть нулем.

Когда $\rho_m = \omega = 0$:

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j Y_j(f). \tag{60}$$

Положим далее, что максимальное число независимых операторов уравнения (1) то же самое m, независимые же операторы таковы:

$$J_1(f),\ J_2(f), \ldots J_{m-1}(f),\ X(f) \tag{61}$$

$$XJ_i(f) - J_i X(f) = \lambda_i X(f), \qquad i = 1, 2, \ldots (m-1), \tag{62}$$

тогда операторы:

$$J_m(f),\ J_{m+1}(f), \tag{63}$$

$$XJ_m(f) - J_m X(f) = \lambda_m X(f),\ XJ_{m+1}(f) - J_{m+1} X(f) = \lambda_{m+1} X(f) \tag{64}$$

линейные функции операторов (61):

$$J_m(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j J_j(f) + \sigma X(f), \tag{65}$$

$$J_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \tau_j J_j(f) + \tau X(f). \tag{66}$$

Приняв:

$$\sigma \neq 0, \tag{67}$$

мы допустим, что операторы:

$$J_1(f),\ J_2(f), \ldots J_{m-1}(f),\ J_m(f) \tag{68}$$

независимы.

На основании тождеств (65), (66) имеем:

$$\lambda_m X(f) = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \sigma_k + X(\sigma) \right\} X(f) + \sum_{j=1}^{m-1} X(\sigma_j) J_j(f), \tag{69}$$

(70) $$\lambda_{m+1} X(f) = \left\{\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \tau_k + X(\tau)\right\} X(f) + \sum_{j=1}^{m-1} X(\tau_j) J_j(f);$$

(71) $$X(\sigma_j) = 0, \quad X(\tau_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots (m-1)$$

(72) $$\sigma_j = \Theta_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \quad \tau_j = \vartheta_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \quad j = 1, 2, \ldots (m-1);$$

(73) $$J_m(f) = \Theta_1 J_1(f) + \Theta_2 J_2(f) + \cdots + \Theta_{m-1} J_{m-1}(f) + \sigma X(f),$$

(74) $$J_{m+1}(f) = \vartheta_1 J_1(f) + \vartheta_2 J_2(f) + \cdots + \vartheta_{m-1} J_{m-1}(f) + \tau X(f).$$

Если введем обозначения:

(75) $$\Theta_j = -\Phi_j, \quad \vartheta_j = \Psi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots (m-1);$$

(76) $$\sigma = \rho_0 \neq 0, \quad \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tau}{\rho_0} = \omega,$$

то зависимости (73), (74) перейдут в соотношения:

(77) $$\rho_0 X(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Phi_j J_j(f) + J_m(f),$$

(78) $$J_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j J_j(f) + \omega\rho_0 X(f),$$

(79) $$J_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega\Phi_j + \Psi_j) J_j(f) + \omega J_m(f),$$

аналогичные соотношениям (52), (59), (58).

Коэфициент ω может быть нулем.

Положим, что даны любые два оператора:

(80) $$Y_1(f),\ Y_2(f)$$

уравнения (1):

(81) $$\begin{aligned} XY_1(f) - Y_1 X(f) &= \lambda_1 X(f), \\ XY_2(f) - Y_2 X(f) &= \lambda_2 X(f). \end{aligned}$$

Покажем, что бесконечно малое преобразование:

(82) $$Z(f) = Y_1 Y_2(f) - Y_2 Y_1(f)$$

тоже оператор уравнения (1).*

* Это положение находится у S. Lie в более общей формулировке (ibid., S. 144), **но** строки (85) у него нет.

Действительно:

$$XZ(f) - ZX(f) = XY_1 Y_2(f) - XY_2 Y_1(f) - Y_1 Y_2 X(f) + Y_2 Y_1 X(f), \tag{83}$$

но:

$$XY_1(f) = Y_1 X(f) + \lambda_1 X(f), \quad XY_2(f) = Y_2 X(f) + \lambda_2 X(f), \tag{84}$$

поэтому:

$$\begin{aligned} XZ(f) - ZX(f) = Y_1 \{XY_2(f) - Y_2 X(f)\} - Y_2 \{XY_1(f) - Y_1 X(f)\} + \\ + \lambda_1 XY_2(f) - \lambda_2 XY_1(f) = \{Y_1(\lambda_2) - Y_2(\lambda_1)\} X(f). \end{aligned} \tag{85}$$

Если составим выражение (82) из операторов (5):

$$\begin{aligned} &Y_1(f) = \rho_1 X(f), \quad Y_2(f) = \rho_2 X(f); \\ &Y_1(f) = X(f), \quad Y_2(f) = \rho X(f) \end{aligned} \tag{86}$$

или из операторов (5), (6):

$$\begin{aligned} &Y_1(f) = X(f), \quad Y_2(f) = Y(f); \\ &Y_1(f) = \rho X(f), \quad Y_2(f) = Y(f), \end{aligned} \tag{87}$$

то новых операторов не получим, ибо:

$$\begin{aligned} &Z_1(f) = \{\rho_1 X(\rho_2) - \rho_2 X(\rho_1)\} X(f); \\ &Z_2(f) = X(\rho) X(f); \\ &Z_3(f) = \lambda X(f); \\ &Z_4(f) = \{\lambda\rho - Y(\rho)\} X(f); \end{aligned} \tag{88}$$

только комбинация операторов (6) может дать новый оператор.

Назовем множитель λ в соотношении (4) определяющим множителем операторов (3) по отношению к уравнению (1): операторы (3) с определяющим множителем $\lambda = 0$ будем называть определенными операторами.

Разыскав решение ρ уравнения:

$$X(\rho) = \lambda, \tag{89}$$

частное:

$$\rho = r_0 \tag{90}$$

и общее:

$$(91)\qquad \rho = r_0 + \Theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}),$$

Θ — произвольная функция аргументов,

получим из операторов (3), удовлетворяющих соотношению (4), определенные операторы по формуле:

$$(92)\qquad Z(f) = Y(f) - \rho X(f),$$

$$(93)\qquad XZ(f) - ZX(f) = \{\lambda - X(\rho)\} X(f) = 0.$$

Определенные операторы (92) дают возможность строить операторы (3) любого определяющего множителя λ:

$$(94)\qquad Y(f) = Z(f) + \rho X(f),$$

$$(95)\qquad X(\rho) = \lambda,$$

$$(96)\qquad XY(f) - YX(f) = \lambda X(f).$$

Из сказанного вытекает, что между задачами A. Buhl'я и S. Lie, о которых мы говорили на международном конгрессе математиков в Болонье,* существует простое взаимоотношение.

Задача A. Buhl'я. Найти бесконечно малые преобразования:

$$(97)\qquad Z(f),$$

удовлетворяющие тождеству:

$$(98)\qquad XZ(f) - ZX(f) \equiv 0.$$

Задача S. Lie. Разыскать бесконечно малые преобразования:

$$(99)\qquad Y(f),$$

определяемые соотношением:

$$(100)\qquad XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f),$$

λ — произвольная функция независимых переменных.

Ясно, что:

$$(101)\qquad \begin{cases} Z(f) = Y(f) - \rho X(f), \\ X(\rho) = \lambda. \end{cases}$$

* См. прим. 1 на стр. 467.

Возвращаясь к тождеству (18):

$$XY(f) - YX(f) \equiv pX(f) + qY(f), \tag{102}$$
$$p \neq 0, \quad q \neq 0,$$

замечаем, что решения уравнений:

$$\begin{cases} X(\log \sigma) = -\mu, \\ X(\rho) = \lambda\sigma \end{cases} \tag{103}$$

позволяют строить инволюционную систему:

$$X(f) = 0, \quad Z(f) = \sigma Y(f) - \rho X(f) = 0; \tag{104}$$

решения уравнений:

$$\begin{cases} Y(\log \tau) = -\lambda, \\ Y(\pi) = \mu\tau \end{cases} \tag{105}$$

приводят к инволюционной системе:

$$\tau X(f) - \pi Y(f) = 0, \quad Y(f) = 0. \tag{106}$$