Дискретная математика

том 25 выпуск 2 * 2013

УДК 519.714 DOI 10.4213/dm1239

О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов

© 2013 г. Д. С. Романов

В работе предлагается метод синтеза схем из функциональных элементов в специальном базисе, допускающих полные проверяющие тесты длины не более 4 при произвольных константных неисправностях на выходах функциональных элементов.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B, реализующая функцию f (все отсутствующие в данной работе определения можно найти в монографии [1]). Введем связанные с тестированием схем определения, незначительно отличающиеся от классических (см., например, [1]). Пусть на схему S действует источник неисправностей U, способный вызывать какие-то поломки функциональных элементов (под поломкой или неисправностью элемента подразумевается функционирование элемента в режиме работы, отличном от исправного; при задании источника неисправностей количество вызываемых им поломок элементов может быть ограничено). *Неисправностью схемы* при этом называется любая совокупность поломок ее элементов. Считается, что действие источника неисправностей является единовременным, и в процессе исследования схемы на предмет анализа ее неисправности характер поломок элементов схемы не меняется. *Константной* называется такая неисправность на выходе функционального элемента, при которой функция, реализуемая на его выходе, заменяется на константу. (Источник неисправностей, вызывающий произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов, обозначим через U^c). *Инверсной* называется неисправность на выходе функционального элемента, при которой функция, реализуемая на его выходе, заменяется на ее отрицание. *Тривиальной* будем называть такую неисправность схемы S, при которой значение на выходе любого элемента E неисправной схемы на всяком входном наборе равно значению на выходе этого же элемента E исходной схемы S (при отсутствии в ней неисправности). Неисправности, не являющиеся тривиальными, будем называть *нетривиальными*. Примерами тривиальной неисправности являются а) отсутствие неисправностей в схеме, б) неисправность типа „константа σ“ на выходе функционального элемента, на выходе которого на всех входных наборах при исправной работе схемы возникает значение σ. Поскольку любую тривиальную неисправность схемы S нельзя обнаружить даже введением дополнительных контрольных точек в схеме, в дальнейшем будут рассматриваться только исходная схема и схемы, полученные из исходной под действием нетривиальных неисправностей. Множество всех схем, полученных из схемы S под действием нетривиальных неисправностей (вызванных источником U), обозначим через $V^U(S)$. *Схемной целью контроля* (для схемы S и источника неисправностей U) называется некоторое множество Z неупорядоченных пар различных схем из множества $\{S\} \cup V^U(S)$.

Множество T наборов значений входных переменных схемы S называется *тестом для схемы S относительно источника неисправностей U и схемной цели контроля Z* тогда и только тогда, когда для любой пары схем $(S',\ S'')$ из Z выполняется условие: если реализуемые схемами S', S'' функции f' и f'' не равны, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T, для которого $f'(\tilde{\alpha}) \neq f''(\tilde{\alpha})$. Количество различных наборов в тесте T называется его *длиной* и обозначается через $l(T)$ или через $|T|$. Тест минимальной длины называется *минимальным*.

Тест относительно источника неисправностей, одновременно производящего не более одной поломки элемента в схеме (соответственно, производящего в схеме произвольное количество поломок элементов), называется *единичным* (соответственно *полным*).

Тест для схемы S относительно источника неисправностей U и схемной цели контроля $Z^{\mathrm{detect}} = \{(S,\ S') \mid S' \in V^U(S)\}$ называется *проверяющим*. Тест для схемы S относительно источника неисправностей U и схемной цели контроля $Z^{\mathrm{diagn}} = \{(S',\ S'') \mid S', S'' \in V^U(S) \cup \{S\},\ S' \neq S''\}$ называется *диагностическим*.

Схема S называется *тестопригодной (относительно источника неисправностей U и схемной цели контроля Z)* тогда и только тогда, когда любые две схемы, образующие пару из Z, реализуют разные функции. Схема S, тестопригодная относительно единичного источника неисправностей и схемной цели контроля Z^{detect}, называется *неизбыточной* (см., например, [1]). При указании типа теста (проверяющий, диагностический) цель контроля для тестопригодной схемы определяется типом теста в дальнейшем указываться не будет.

Пусть $\hat{P}_2^n$ — множество всех булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящих от каждой своей переменной ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, при $n = 0$ множество $\hat{P}_2^n$ состоит из двух констант).

Обозначим через $D_U^{\mathrm{detect}}(S)$ длину минимального полного проверяющего теста относительно источника неисправностей U в схеме S, через $D_{B,\ U}^{\mathrm{detect}}(f(\tilde{x}^n))$ — минимум величины $D_U^{\mathrm{detect}}(S)$ по всем тестопригодным реализующим $f(\tilde{x}^n)$ схемам S в базисе B. Через $D_{B,\ U}^{\mathrm{detect}}(n)$ обозначим *функцию Шеннона длины полного проверяющего теста относительно источника неисправностей U*, т. е. функцию

$$D_{B,\ U}^{\mathrm{detect}}(n) = \max_{f(\tilde{x}^n) \in \hat{P}_2^n} D_{B,\ U}^{\mathrm{detect}}(f(\tilde{x}^n)).$$

Аналогично определяются функции Шеннона длины единичного проверяющего теста ($D_{B,\ U_1}^{\mathrm{detect}}(n)$), полного диагностического теста ($D_{B,\ U}^{\mathrm{diagn}}(n)$) и единичного диагностического теста $D_{B,\ U_1}^{\mathrm{diagn}}(n)$.

Замечание 1. Отметим, что для некоторых булевых функций f, базисов B и источников неисправностей U тестопригодные схемы в базисе B, реализующие функцию f, могут не существовать. В таких случаях исключим все эти функции из перебора в определении функции Шеннона длины теста. Задача анализа поведения функции

Шеннона длины теста в предложенной постановке может считаться корректной, если с ростом n доля таких булевых функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые существенно зависят от n переменных и допускают реализацию тестопригодными схемами, стремится к единице. В ином случае следует отказаться от использования тестопригодных схем и рассматривать задачу тестирования в более слабой постановке.

Приведем обзор известных оценок функций Шеннона длин тестов при неисправностях на выходах элементов. В работе С. М. Редди [2] (1972) было доказано, что в базисе Жегалкина $B_1 = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста не превосходит $n+3$. Н. П. Редькиным были получены следующие результаты:

1) для произвольного полного конечного базиса B была найдена верхняя оценка $D^{\mathrm{detect}}_{B,\,U^c}(n) \leqslant 2(2^{\lceil n/2\rceil} + 2^{\lfloor n/2\rfloor} + n)$ [3] (1986), [4] (1989);

2) в стандартном базисе $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ функция Шеннона длины полного проверяющего теста относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов не превосходит n [5] (1988);

3) в стандартном базисе B_0 функция Шеннона длины единичного диагностического теста относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов не превосходит $2n+1$ [6] (1992);

4) в бесконечном базисе, состоящем из конъюнкторов и дизъюнкторов с произвольными количествами входов и из инвертора, возможно построение неизбыточных схем (для произвольной функции n переменных), допускающих при однотипных константных неисправностях на выходах элементов единичный диагностический тест длины, не превосходящей $2\log_3\lceil n+1\rceil + 1$ [7] (2007).

Кроме того, Н. П. Редькиным, С. В. Ковааценко, Ю. В. Бородиной и П. А. Бородиным были получены константные верхние оценки функций Шеннона длин проверяющих тестов при различных однотипных неисправностях на выходах функциональных элементов, когда для каждого функционального элемента имеется не более одного режима неисправной работы. В [8] установлено, что в случае $B = \{x\&y, x\oplus y, 1\}$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов равна 1 (в той же работе для того же класса схем и такого же источника неисправностей получена верхняя оценка $n+1$ для функции Шеннона длины единичного диагностического теста и верхняя оценка 2^{n-2} для функции Шеннона длины полного диагностического теста). В [9] доказано, что в произвольном полном базисе функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов не превосходит 3. В [10] получено, что в стандартном базисе B_0 функция Шеннона длины полного проверяющего теста относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов равна 2. В [11] показано, что функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов в базисе Жегалкина равна 1. В [12] найдено точное значение 1 функции Шеннона длины полного проверяющего теста относительно константных неисправностей типа 0 на выходах элементов в базисе Жегалкина.

В данной работе устанавливается, что функция Шеннона длины полного проверяющего теста относительно произвольных (не однотипных) константных неисправностей на выходах элементов в некотором специальном полном базисе $\hat{B}$, содержащем элементы с числом входов от одного до семи, не превосходит 4. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует такой схемный базис* $\hat{B}$*, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, что для него при* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *для любой булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$ $(f(\tilde{x}^n) \in \hat{P}_2^n)$ *имеет место неравенство* $D^{\mathrm{detect}}_{\hat{B},\ U^c}(f(\tilde{x}^n)) \leqslant 4$.

Доказательство. Прежде чем перейти к формальному доказательству теоремы, изложим его основную идею.

Тестопригодная схема для нелинейной функции $f(\tilde{x}^n)$ при $n \geqslant 3$ (остальные случаи — простые) будет строиться следующим образом.

В двух ее блоках (S_1, S_2) реализуется полином Жегалкина этой функции так, что на некоторых четырех наборах (образующих множество $\hat{T}$, которое и составит полный проверяющий тест относительно константных неисправностей на выходах элементов всей схемы) на выходах каждого элемента будет появляться как нулевое, так и единичное значение. Для каждого набора значений переменных (x_1, x_2, x_n) в множестве $\hat{T}$ имеется не более одного набора.

На входы каждого из остальных элементов обязательно будут подаваться переменные (из множества $\{x_1,\ x_2,\ x_n\}$) для вычисления значений так называемых „детекторных функций“, передаваемых по цепям функциональных элементов и используемых как сигналы о распознавании тех или иных событий. Четыре набора из $\hat{T}$ образуют шесть сочетаний по одной паре в каждом. Для каждой пары строится цепь из функциональных элементов так, что принадлежность входного набора к данной паре распознается на выходе этой цепи. В графе K_4 с вершинами из $\hat{T}$ выделяется два различных простых цикла длины 4. Выходы тех из шести цепей, которые соответствуют ребрам одного из этих циклов, подаются на входы своего „результирующего“ функционального элемента, распознающего, принадлежит ли входной набор множеству $\hat{T}$ (количество „результирующих“ функциональных элементов равно двум — по одному для каждого цикла). Данные шесть цепей и два „результирующих“ элемента составляют блок S_3 схемы с двумя выходами. Отметим, что информация о том, что принадлежность входного набора к данной паре наборов из $\hat{T}$ не опровергнута, передается вдоль соответствующей этой паре цепи из S_3 с помощью такой из двух „детекторных функций“ $x_1 \oplus x_n$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$, у которой на двух наборах данной пары значения различны (информация о том, что принадлежность опровергнута, передается отрицанием данной детекторной функции). Аналогично дело обстоит и с „результирующими“ элементами, но в качестве детекторных функций выбираются $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ и x_2.

Еще один блок — S_4 — осуществляет контроль правильности работы всех элементов из блоков S_1, S_2, S_3 на множестве $\hat{T}$. В блоке S_4 для каждого элемента из S_1, S_2, S_3 имеется „собственный“ проверяющий элемент (на один из входов которого подается выход „проверяемого“ им элемента); элементы из S_4 организованы в цепь, вдоль которой передается либо сигнал о том, что хотя бы один из элементов в блоках S_1, S_2, S_3 на данном входном наборе (из $\hat{T}$) сработал неверно (не так, как в исходной схеме при отсутствии неисправностей), либо что ошибка не обнаружена (для этого используются „детекторные функции“ $\bar{x}_2$ и x_2, соответственно; информация о всех значениях „проверяемого“ элемента на множестве $\hat{T}$ „зашита“ в „проверяющем“ элементе как функция от (x_1, x_2, x_n), при этом переменные x_1, x_2, x_n подаются на входы каждого элемента из S_4). На входы выходного элемента всей схемы подаются переменные x_1, x_2, x_n и выходы блоков S_2, S_3, S_4. Логика работы выходного элемента схемы следующая: если поступила информация, что или входной набор не лежит в множестве $\hat{T}$, или что входной набор лежит в множестве $\hat{T}$ и при этом выходной элемент блока S_2 сработал правильно (как при отсутствии неисправностей) и ошибки блоком S_4 не обнаружены, или что входной набор лежит в множестве $\hat{T}$ и при этом выходной элемент блока S_2 сработал неправильно, и ошибки блоком S_4 обнаружены, то на выходе схемы появляется значение с выхода блока S_2; в иных случаях на выходе схемы появляется отрицание значения с выхода блока S_2.

Легко проверить, что данная схема в исправном состоянии реализует функцию f.

При наличии поломки выходного элемента схемы ошибка будет обнаружена, поскольку на наборах из $\hat{T}$ функция f принимает оба значения. Оказывается, при „правильном“ выборе детекторных функций на четырех наборах из $\hat{T}$ на выходах каждого из элементов блока S_3 как нулевые, так и единичные значения появляются по два раза. Более того, при произвольных константных неисправностях в блоке S_3 (и при исправной работе всех элементов этого блока) не менее чем три набора из $\hat{T}$ распознаются (выходным элементом схемы) как принадлежащие $\hat{T}$. При отсутствии поломки выходного элемента, но при наличии поломок в S_4 ошибка будет обнаружена на том наборе из $\hat{T}$, который распознался как принадлежащий $\hat{T}$ и у которого значение переменной x_2 отлично от константы неисправности последнего неисправного элемента из S_4. При отсутствии поломок в S_4, но при наличии их в S_3 хотя бы на одном из трех наборов из $\hat{T}$, которые распознались как принадлежащие $\hat{T}$, значение на выходе неисправного элемента при отстутствии неисправностей в схеме отличается от значения константы его неисправности (ибо при исправной работе этого элемента на его выходе на четырех наборах из $\hat{T}$ как нулевые, так и единичные значения появляются по два раза). При отсутствии поломок элементов в S_3, но при наличии их в S_1 и/или в S_2 информация о неисправности передастся по цепи S_4 на тот из наборов $\hat{T}$, на котором (отличное от константы) функционирование неисправного элемента в исходной схеме (при отсутствии неисправностей) на $\hat{T}$ отличается от константы неисправности выхода этого элемента.

Приступим к формальному доказательству теоремы.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, существенно зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Запишем полином Жегалкина функции f в виде $P_f = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus a_0$, где K_i — конъюнкции различных переменных или переменные ($i = \overline{1, t}$), $a_0 \in \{0, 1\}$.

Случай 1. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ — нелинейная, $n \geqslant 3$. Пусть, далее, K_1 — самое короткое слагаемое в полиноме Жегалкина функции f, отличное от константы и переменной. Будем, не ограничивая общности, считать, что $K_1 = x_1 x_2 \cdots x_s$ ($2 \leqslant s \leqslant n$) и что слагаемые K_1, $K_2, \ldots,$ K_q — нелинейные ($1 \leqslant q \leqslant t$), а слагаемые K_{q+1}, $K_{q+2}, \ldots,$ K_t — переменные. Будем, далее, считать, что все переменные, не входящие в K_1 в качестве множителей, но входящие в P_f в качестве слагаемых, образуют слагаемые K_{q+1}, K_{q+2}, $\ldots$, K_{t-k} ($q \leqslant t - k$). Если имеются переменные, входящие в K_1 в качестве множителей и входящие в P_f в качестве слагаемых, то пусть это будут (не ограничивая общности) переменные x_1, x_2, $\ldots$, x_k, образующие слагаемые K_{t-k+1}, K_{t-k+2}, $\ldots$, K_t (соответственно). Здесь $0 \leqslant k \leqslant s$. Пусть b, b_0, b_1, b_2 лежат в множестве $\{0, 1\}$, $b \equiv t \pmod 2$, $b_0 \equiv q \pmod 2$, $b_1 \equiv t - k - q \pmod 2$, $b_2 \equiv k \pmod 2$.

Обозначим через $\hat{T}$ следующее множество, состоящее из четырех наборов: $\hat{T} = \{\tilde{\alpha}_1^n = (\tilde{0}^n),\ \tilde{\alpha}_2^n = (1, \tilde{0}^{n-1}),\ \tilde{\alpha}_3^n = (\tilde{1}^s, \tilde{0}^{n-s}),\ \tilde{\alpha}_4^n = (\tilde{1}^n)\}$ (при $s = n$ положим $\tilde{\alpha}_3^n = (\tilde{1}^{n-1}, 0)$).

Построим тестопригодную схему S в некотором базисе, реализующую f и допускающую полный проверяющий тест длины 4 (а именно, тест $\hat{T}$) относительно константных неисправностей на выходах элементов.

Схема S составлена из блоков S_1, S_2, S_3, S_4 и специального семивходового элемента $\check{E}$, как показано на рисунках 1 (общий вид схемы) и 2 (пример схемы для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$).

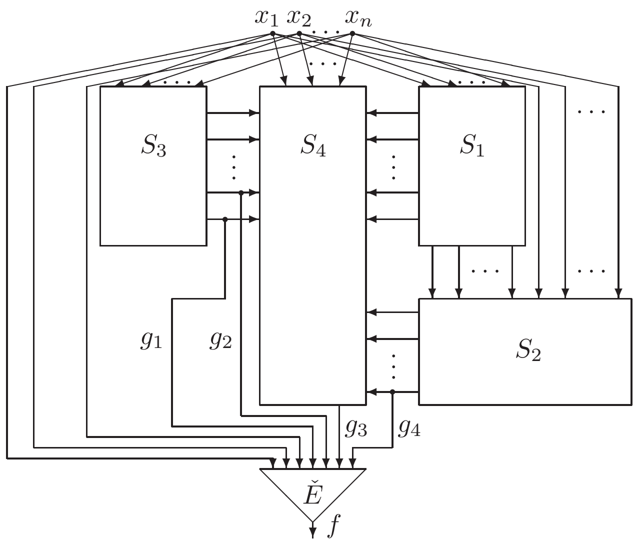

Рис. 1. Схема S.

В блоках S_1, S_2 моделируется полином Жегалкина функции f.

Блок S_1 представляет собой q цепочек конъюнкторов C_1, $C_2, \ldots$, C_q, моделирующих все нелинейные слагаемые K_1, $K_2, \ldots$, K_q (соответственно) полинома Жегалкина P_f функции f. При этом на входы первого элемента каждой цепочки подаются переменные (в частности, на входы первого элемента цепочки C_1 подаются переменные x_1, x_2); на левый вход каждого конъюнктора цепочки, начиная со второго, подается выход предыдущего конъюнктора; на правые входы конъюнкторов цепочки, начиная со второго, подаются входные переменные. Так как K_1 — самая короткая конъюнкция (отличная от переменной), то для любого $i \in \{2, 3, \ldots, q\}$ в конъюнкции K_i имеется переменная x_{j_i}, не входящая в K_1. Потребуем, чтобы на правый вход первого конъюнктора цепочки C_i подавалась бы переменная x_{j_i}, а на левый вход первого конъюнктора цепочки C_i — переменная x_1, если она входит в K_i, и любая переменная конъюнкции K_i, отличная от x_{j_i}, если x_1 не входит в K_i. Отметим также, что переменные x_2, $\ldots$, x_k подаются последовательно на правые входы первых $(k-1)$ конъюнкторов цепочки C_1.

Блок S_2 при $t = 1$ и $a_0 = 0$ пуст и представляет собой выход цепочки C_1 блока S_1. Блок S_2 при $t = 1$ и $a_0 = 1$ есть инвертор, на который подается выход цепочки C_1 блока S_1. При $t > 1$ блок S_2 состоит из цепочки C двухвходовых элементов сложения по модулю 2 и (только при $a_0 = 1$) одного инвертора, являющегося последним элементом цепочки. При этом на левый вход самого первого элемента цепочки C подается выход цепочки C_1 блока S_1; на левый вход каждого элемента сложения по модулю 2 в цепочке, начиная со второго, подается выход предыдущего элемента сложения по модулю 2; на правые входы первых $(q-1)$ элементов цепочки C подаются выходы цепочек $C_2, \ldots$, C_q блока S_1; на правые входы группы следующих

$t-q$ элементов цепочки C подаются переменные, являющиеся линейными слагаемыми в P_f. При этом на правые входы первых $t-k-q$ элементов из этой группы подаются переменные, представляющие собой слагаемые K_{q+1}, K_{q+2}, ..., K_{t-k} в P_f и не встречающиеся в K_1. Если $k \neq 0$, то на правые входы остальных k элементов из этой группы подаются слагаемые $K_{t-k+1} = x_1$, $K_{t-k+2} = x_2$, ..., $K_t = x_k$ (в указанном порядке), представляющие собой переменные, встречающиеся в K_1. Обозначим через D_1 последовательность всех элементов цепочки C (в порядке следования в цепочке), у которых хотя бы на один вход подается выход цепочки из блока S_1 или переменная из множества $\{x_{s+1}, \ldots, x_n\}$. Пусть, далее, D_2 — последовательность всех элементов цепочки C (в порядке следования в цепочке), у которых на правый вход подается переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$ (при $k > 0$). Заметим, что общих элементов у D_1 и D_2 нет при $t-k>1$ и есть ровно один общий элемент при $t-k=1$, $k>0$; последовательности D_1, D_2 могут не содержать элементов. Выход последнего элемента цепочки C при $t>1$ объявим выходом блока S_2. Легко видеть, что при правильной работе элементов на выходе блока S_2 реализуется функция f. Обозначим этот выход через g_4.

Блок S_3 некоторым специальным образом распознает принадлежность входного набора множеству $\hat{T}$. Блок S_3 состоит из принадлежащих базису $\hat{B}$ элементов, реализующих функции $\xi_{i,j}$, ζ_k, Φ_1, Φ_2 ($1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant 6$). При описании этих функций (и в дальнейшем) будем учитывать, что в схеме S на некоторые входы элементов будут подаваться только входы схемы (переменные от x_1 до x_n), а на некоторые — только выходы других элементов. Поэтому произвольные значения конкретных входных переменных x_1, x_2, ..., x_n будут обозначаться через α_1, α_2, ..., α_n соответственно, произвольные значения каких-то (различающихся от случая к случаю) входных переменнных будут обозначаться через β, β_1 или β_2; через γ, γ_1, ..., γ_4 будут обозначаться произвольные значения переменных, вместо каждой из которых (за исключением отдельных особо оговоренных случаев) на вход реализующего функцию элемента будет подаваться выход какого-то элемента схемы. Функции будем задавать „кусочно“, следуя шаблону:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \ldots) = \begin{cases} \delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n), & \text{если выполнено условие } A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \ldots), \\ \bar{\delta}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $\delta(x_1, x_2, x_n)$ (как и ее отрицание) — „детекторная“ функция, значение которой передается от элемента к элементу как сигнал о наличии (отсутствии) в схеме некоторого события. Ясно, что при этом $\varphi(x_1, x_2, x_n, \ldots) = \delta(x_1, x_2, x_n) \sim A(x_1, x_2, x_n, \ldots)$. В дальнейшем формулы, реализующие такие функции, приводиться не будут. Опишем функции $\xi_{i,j}$, ζ_k, Φ_1, Φ_2 ($1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant 6$):

$$\xi_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \{(0,0,0),\ (1,0,0)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

$$\xi_{2,3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \{(1,0,0),\ (1,1,0)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2}$$

$$\xi_{3,4}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \{(1,1,0),\ (1,1,1)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

$$\xi_{1,4}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \{(0,0,0),\ (1,1,1)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$\xi_{1,3}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, \text{ если } (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n) \in \{(0,0,0),\ (1,1,0)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

$$\xi_{2,4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \text{ если } (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n) \in \{(1,0,0),\ (1,1,1)\}, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{6}$$

$$\zeta_1(\alpha_1,\alpha_n,\gamma,\beta) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta = 0, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{7}$$

$$\zeta_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,\gamma,\beta) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta = 1, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{8}$$

$$\zeta_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,\gamma,\beta_1,\beta_2) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta_1 = \beta_2, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{9}$$

$$\zeta_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,\gamma,\beta) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta = 0, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\zeta_5(\alpha_1,\alpha_n,\gamma,\beta) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta = 1, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{11}$$

$$\zeta_6(\alpha_1,\alpha_n,\gamma,\beta_1,\beta_2) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_n, \text{ если } \gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ и } \beta_1 = \beta_2, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{12}$$

$$\Phi_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) = \begin{cases} \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \text{если } \gamma_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ или } \gamma_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \\ \qquad\qquad\qquad \text{или } \gamma_3 = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ или } \gamma_4 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \\ \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{13}$$

$$\Phi_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) = \begin{cases} \alpha_2, & \text{если } \gamma_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ или } \gamma_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \\ & \text{или } \gamma_3 = \alpha_1 \oplus \alpha_n \text{ или } \gamma_4 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n, \\ \alpha_2 \oplus 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{14}$$

Опишем теперь соединения элементов блока S_3 (здесь и далее верхний индекс в названии элемента указывает реализуемую им функцию, — в ряде случаев этот верхний индекс будет опускаться; порядок входов элемента соответствует порядку переменных реализуемой им функции). В состав блока S_3 входят цепочки $\hat{C}_{i,j}$ ($1 \leqslant i < j \leqslant 4$) и два элемента: E^{Φ_1} и E^{Φ_2}. Четыре набора $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$, $\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ из $\hat{T}$ образуют шесть сочетаний по одной паре в каждом. Для каждой пары $(\tilde{\alpha}_i^n, \tilde{\alpha}_j^n)$ ($1 \leqslant i < j \leqslant 4$) строится цепь $\hat{C}_{i,j}$ из функциональных элементов так, что принадлежность входного набора к данной паре распознается на выходе этой цепи.

Цепь $\hat{C}_{1,2}$ состоит из элементов $E^{\xi_{1,2}}_{(1,2),1}$, $E^{\zeta_1}_{(1,2),2}$, $E^{\zeta_1}_{(1,2),3}$, …, $E^{\zeta_1}_{(1,2),n}$ (здесь и далее в описании элементов цепей $\hat{C}_{i,j}$ скобка в нижнем индексе указывает тип цепи, а число после скобки — порядковый номер элемента в цепи; при соединении элементов в цепи выход $(d-1)$-го элемента подается на вход d-го элемента, $d \geqslant 2$). На входы элемента $E^{\xi_{1,2}}_{(1,2),1}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На первые два входа каждого элемента $E^{\zeta_1}_{(1,2),d}$ ($d = \overline{2,n}$) подаются переменные x_1, x_n (в указанном порядке). На четвертый вход каждого элемента $E^{\zeta_1}_{(1,2),d}$ подается переменная x_d ($d = \overline{2,n}$). На третий вход каждого элемента $E^{\zeta_1}_{(1,2),d}$ подается выход элемента $E_{(1,2),d-1}$ ($d = \overline{2,n}$). Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре $(\tilde{\alpha}_1^n,\ \tilde{\alpha}_2^n)$ не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{1,2}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{1,2}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Цепь $\hat{C}_{2,3}$ при $s \neq n$ и $s \neq 2$ состоит из элементов $E^{\xi_{2,3}}_{(2,3),1}$, $E^{\zeta_2}_{(2,3),2}$, $E^{\zeta_3}_{(2,3),3}$, $\ldots$, $E^{\zeta_3}_{(2,3),s}$, $E^{\zeta_4}_{(2,3),s+1}$, $\ldots$, $E^{\zeta_4}_{(2,3),n}$ при $s = n$ вместо s следует подставлять $n-1$ из-за особого вида набора $\tilde{\alpha}_3^n$; при $s = 2$ элементы, реализующие ζ_3, не нужны. На первые три входа каждого элемента цепи $\hat{C}_{2,3}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На пятый вход элемента $E^{\zeta_2}_{(2,3),2}$ подается переменная x_1. На пятый и шестой входы каждого элемента $E^{\zeta_3}_{(2,3),d}$ подаются соответственно переменные x_{d-1}, x_d ($d = \overline{3, s}$). На пятый вход каждого элемента $E^{\zeta_4}_{(2,3),d}$ подается переменная x_d ($d = \overline{s+1, n}$). На четвертый вход каждого элемента $E_{(2,3),d}$ подается выход элемента $E_{(2,3),d-1}$ ($d = \overline{2, n}$). Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре ($\tilde{\alpha}_2^n$, $\tilde{\alpha}_3^n$) не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{2,3}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}_2^n$, $\tilde{\alpha}_3^n$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{2,3}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Цепь $\hat{C}_{3,4}$ при $s \neq n$ состоит из элементов $E^{\xi_{3,4}}_{(3,4),1}$, $E^{\zeta_5}_{(3,4),2}$, $\ldots$, $E^{\zeta_5}_{(3,4),s+1}$, $E^{\zeta_6}_{(3,4),s+2}$, $\ldots$, $E^{\zeta_6}_{(3,4),n}$ при $s = n$ вместо s следует подставлять $n-1$, тогда элементы для ζ_6 не понадобятся. На входы элемента $E^{\xi_{3,4}}_{(3,4),1}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На первые два входа каждого элемента $E_{(3,4),d}$ ($d = \overline{2, n}$) подаются переменные x_1, x_n (в указанном порядке). На четвертый вход каждого элемента $E^{\zeta_5}_{(3,4),d}$ подается переменная x_{d-1} ($d = \overline{2, s+1}$). На четвертый и пятый входы каждого элемента $E^{\zeta_6}_{(3,4),d}$ подаются соответственно переменные x_{d-1}, x_d ($d = \overline{s+2, n}$). На третий вход каждого элемента $E_{(3,4),d}$ подается выход элемента $E_{(3,4),d-1}$ ($d = \overline{2, n}$). Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре ($\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$) не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{3,4}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{3,4}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Цепь $\hat{C}_{1,4}$ состоит из элементов $E^{\xi_{1,4}}_{(1,4),1}$, $E^{\zeta_3}_{(1,4),2}$, $\ldots$, $E^{\zeta_3}_{(1,4),n}$. На первые три входа каждого элемента цепи $\hat{C}_{1,4}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На пятый и шестой входы каждого элемента $E^{\zeta_3}_{(1,4),d}$ подаются соответственно переменные x_{d-1}, x_d ($d = \overline{2, n}$). На четвертый вход каждого элемента $E_{(1,2),d}$ подается выход элемента $E_{(1,2),d-1}$ ($d = \overline{2, n}$). Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре ($\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$) не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{1,4}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{1,4}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}_2^n$, $\tilde{\alpha}_3^n$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Цепь $\hat{C}_{1,3}$ состоит из элементов $E^{\xi_{1,3}}_{(1,3),1}$, $E^{\zeta_6}_{(1,3),2}$, $\ldots$, $E^{\zeta_6}_{(1,3),s}$, $E^{\zeta_1}_{(1,3),s+1}$ $\ldots$, $E^{\zeta_1}_{(1,3),n}$. На входы элемента $E^{\xi_{1,3}}_{(1,3),1}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На первые два входа каждого элемента $E_{(1,3),d}$ ($d = \overline{2, n}$) подаются переменные x_1, x_n (в указанном порядке). На четвертый и пятый входы каждого элемента $E^{\zeta_6}_{(1,3),d}$

подаются соответственно переменные x_{d-1}, x_d $(d = \overline{2, s})$. На четвертый вход каждого элемента $E^{\zeta_1}_{(1,3),d}$ $(d = \overline{s+1, n})$ подается переменная x_d. На третий вход каждого элемента $E_{(1,3),d}$ подается выход элемента $E_{(1,3),d-1}$ $(d = \overline{2, n})$. Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре $(\tilde{\alpha}^n_1,\ \tilde{\alpha}^n_3)$ не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{1,3}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}^n_1$, $\tilde{\alpha}^n_3$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{1,3}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}^n_2$, $\tilde{\alpha}^n_4$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Цепь $\hat{C}_{2,4}$ состоит из элементов $E^{\xi_{2,4}}_{(2,4),1}$, $E^{\zeta_5}_{(2,4),2}$, $E^{\zeta_6}_{(2,4),3}$, $\ldots$, $E^{\zeta_6}_{(2,4),n}$. На входы элемента $E^{\xi_{2,4}}_{(2,4),1}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n (в указанном порядке). На первые два входа каждого элемента $E_{(2,4),d}$ $(d = \overline{2, n})$ подаются переменные x_1, x_n (в указанном порядке). На четвертый вход элемента $E^{\zeta_5}_{(2,4),2}$ подается переменная x_1. На четвертый и пятый входы каждого элемента $E^{\zeta_6}_{(2,4),d}$ подаются соответственно переменные x_{d-1}, x_d $(d = \overline{3, n})$. На третий вход каждого элемента $E_{(2,4),d}$ подается выход элемента $E_{(2,4),d-1}$ $(d = \overline{2, n})$. Детекторной функцией, соответствующей тому, что принадлежность набора паре $(\tilde{\alpha}^n_2,\ \tilde{\alpha}^n_4)$ не отвергнута (соответственно, отвергнута), является функция $x_1 \oplus x_n$ (соответственно, $x_1 \oplus x_n \oplus 1$). Выход последнего элемента цепи обозначим через $v_{2,4}$. Отметим, что на наборах $\tilde{\alpha}^n_2$, $\tilde{\alpha}^n_4$ вдоль всей цепи $\hat{C}_{2,4}$ передается значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n$, а на наборах $\tilde{\alpha}^n_1$, $\tilde{\alpha}^n_3$ — значение $\alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1$.

Замечание 2. Информация о том, что принадлежность входного набора данной паре наборов из $\hat{T}$ не опровергнута, передается вдоль соответствующей этой паре цепи из S_3 с помощью такой из двух „детекторных функций“ $x_1 \oplus x_n$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$, у которой на двух наборах данной пары значения различны. Этим обеспечивается следующее важное свойство каждой цепи $\hat{C}_{i,j}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$: при любых константных неисправностях элементов цепи один набор из пары $(\tilde{\alpha}^n_i, \tilde{\alpha}^n_j)$ „распознается“ на выходе цепи как набор из этой пары.

В графе K_4 с вершинами из $\hat{T}$ выделяются два различных простых цикла длины 4: $Z_1 = (\tilde{\alpha}^n_1,\ \tilde{\alpha}^n_2,\ \tilde{\alpha}^n_3,\ \tilde{\alpha}^n_4)$ и $Z_2 = (\tilde{\alpha}^n_3,\ \tilde{\alpha}^n_1,\ \tilde{\alpha}^n_4,\ \tilde{\alpha}^n_2)$. Выходы тех четырех из шести цепей, которые соответствуют ребрам одного из этих циклов Z_ν $(\nu \in \{1, 2\})$, подаются на входы своего „результирующего“ функционального элемента E^{Φ_ν}, распознающего, принадлежит ли входной набор множеству $\hat{T}$. Уточним: на входы элемента E^{Φ_1} подаются переменные x_1, x_2, x_n и выходы цепей $v_{1,2}$, $v_{2,3}$, $v_{3,4}$, $v_{1,4}$; на входы элемента E^{Φ_2} подаются переменные x_1, x_2, x_n и выходы цепей $v_{1,3}$, $v_{1,4}$, $v_{2,4}$, $v_{2,3}$. Выход элемента E^{Φ_1} обозначим через g_1, выход элемента E^{Φ_2} обозначим через g_2.

В нижеследующей таблице приведены всевозможные поведения выходов элементов блоков S_1, S_2, S_3 на наборах множества $\hat{T}$ при правильной работе схемы.

$\tilde{x}^n$	x_1	x_2	x_n	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}
$\tilde{\alpha}^n_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$\tilde{\alpha}^n_2$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
$\tilde{\alpha}^n_3$	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
$\tilde{\alpha}^n_4$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0

Здесь каждый столбец Q_j $(j = \overline{1, 14})$ можно считать булевой функцией от переменных x_1, x_2, x_n (вообще говоря, частичной). В дальнейшем будет предполагаться, что булева функция $Q_j(x_1, x_2, x_n)$ получена из соответствующего столбца данной таблицы произвольным (если не оговорено противное) доопределением.

Утверждения о том, каким элементам в построенной части схемы какие поведения Q_j присущи, легко доказываются индукцией по номеру элемента в той или иной цепочке из блоков S_1, S_2 или S_3. При этом сначала следует рассмотреть элементы блока S_1, затем — элементы блока S_2, затем — элементы блока S_3. В качестве базиса индукции отметим, что:

1) на выходах первого элемента цепочки C_1 из S_1 на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$ возникают нули, а на наборах $\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ — единицы (т. е. реализуется поведение Q_1);

2) на выходах всех первых элементов цепочек $C_2, \ldots, C_q$ из S_1 на наборах $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$ и $\tilde{\alpha}_3^n$ возникают нули, а на наборе $\tilde{\alpha}_4^n$ — единица (т. е. реализуется поведение Q_2);

3) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{1,2}$ блока S_3 реализуется поведение Q_5;

4) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{2,3}$ блока S_3 реализуется поведение Q_8;

5) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{3,4}$ блока S_3 реализуется поведение Q_{11};

6) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{1,4}$ блока S_3 реализуется поведение Q_1;

7) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{1,3}$ блока S_3 реализуется поведение Q_1;

8) на выходе первого элемента цепи $\hat{C}_{2,4}$ блока S_3 реализуется поведение Q_8.

Поведение на выходе каждого следующего элемента E нужно вычислить как результат суперпозиции на наборах из $\hat{T}$ (с внешней функцией, реализуемой самим этим элементом) поведений элементов и переменных, подаваемых на входы этого элемента E.

Приведем итоговую классификацию поведений элементов из блоков S_1, S_2, S_3.

Начнем с описания поведений выходов элементов блоков S_1, S_2 при $s < n$. Поведение Q_1 присуще выходам всех конъюнкторов цепи C_1 блока S_1, а также выходам всех элементов сложения по модулю 2 с четными номерами в цепи D_1 блока S_2 при $t-k > 1$. Поведение Q_2 присуще выходам всех конъюнкторов цепей $C_2, \ldots, C_q$ блока S_1. Поведение Q_3 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с нечетными номерами в цепи D_1 блока S_2 при $t-k > 1$. Поведение Q_4 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с нечетными номерами в цепи D_2 блока S_2 при $b_0 \oplus b_1 = 1$ и $t-k > 1$ или при $t-k = 1$. Поведение Q_5 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с нечетными номерами в цепи D_2 блока S_2 при $b_0 \oplus b_1 = 0$ и $t-k > 1$. Поведение Q_6 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с четными номерами в цепи D_2 блока S_2 при $b_0 \oplus b_1 = 1$ и $t-k > 1$ или при $t-k = 1$. Поведение Q_7 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с четными номерами в цепи D_2 блока S_2 при $b_0 \oplus b_1 = 0$ и $t-k > 1$. Поведения $Q_8 - Q_{13}$ являются отрицаниями поведений Q_1, $Q_3 - Q_7$ и присущи выходу инвертора блока S_2 при $a_0 = 1$.

Опишем поведения выходов элементов блоков S_1, S_2 при $s = n$. Поведение Q_1 присуще выходам всех конъюнкторов цепи C_1 блока S_1, кроме последнего. Поведение Q_2 присуще выходу последнего конъюнктора цепи C_1 блока S_1. Поведение Q_4 присуще выходу n-го элемента сложения по модулю 2 при нечетном n. Поведение Q_5 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с четными меньшими n номерами в цепи C блока S_2. Поведение Q_6 присуще выходу n-го элемента сложения по модулю 2 при четном n. Поведение Q_7 присуще выходам всех элементов сложения по модулю 2 с нечетными меньшими n номерами в цепи C блока S_2. Поведения Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14} являются отрицаниями поведений Q_5, Q_6, Q_7, Q_2 соответственно и присущи выходу инвертора из блока S_2

Завершим классификацию описанием поведений выходов элементов блока S_3. Поведение Q_1 присуще выходам всех элементов цепей $\hat{C}_{1,3}$, $\hat{C}_{1,4}$ и выходу элемента E^{Φ_2}. Поведение Q_5 присуще выходам всех элементов цепи $\hat{C}_{1,2}$ и выходу элемента

E^{Φ_1}. Поведение Q_8 присуще выходам всех элементов цепей $\hat{C}_{2,3}$, $\hat{C}_{2,4}$. Поведение Q_{11} присуще выходам всех элементов цепи $\hat{C}_{3,4}$.

Как видно, приведенный перебор исчерпывает все возможные случаи поведения выхода элемента из блока S_1, S_2 или S_3 на наборах множества $\hat{T}$. Заметим, что некоторые рассмотренные здесь типы элементов в конкретной схеме S могут отсутствовать.

На основании введенных функций $Q_j(x_1, x_2, x_n)$ определим функции $\Psi_j(x_1, x_2, x_n, u_1, u_2)$ $(j = \overline{1, 14})$:

$$\Psi_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} \alpha_2, & \text{если } \gamma_1 = \alpha_2 \text{ и } \gamma_2 = Q_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n), \\ \bar{\alpha}_2, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$

Включим в базис $\hat{B}$ пятивходовые функциональные элементы E^{Ψ_j} $(j = \overline{1, 14})$, реализующие функции $\Psi_j(x_1, x_2, x_n, u_1, u_2)$ (входы x_1, x_2, x_n, u_1, u_2 элемента E^{Ψ_j} располагаются слева направо).

Пусть общее число элементов в блоках S_1, S_2, S_3 равно H. Присвоим всем этим элементам различные обозначения (без повторов): $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\ldots$, $\hat{E}_H$. Пусть поведение элемента $\hat{E}_h$ на наборах из $\hat{T}$ есть $Q_{\nu_h}(x_1, x_2, x_n)$ $(\nu_h \in \{1, 2, \ldots, 14\}$, $h = \overline{1, H})$. Построим контролирующий блок S_4 схемы S следующим образом. Для каждого элемента $\hat{E}_h$ из блока S_1, S_2 или S_3 $(h = \overline{1, H})$ включим в блок S_4 элемент $\check{E}_h$, представляющий собой пятивходовый элемент $E^{\Psi_{\nu_h}}$, на первые три входа которого подаются переменные x_1, x_2, x_n, на пятый его вход подается выход элемента $\hat{E}_h$. Все элементы $\check{E}_1$, $\check{E}_2$, $\ldots$, $\check{E}_H$ организованы в цепь $\check{C}$, при этом на четвертый вход элемента $\check{E}_1$ подается переменная x_2, а на четвертый вход элемента $\check{E}_h$ подается выход элемента $\check{E}_{h-1}$ (здесь $h = \overline{2, H}$). Выход элемента $\check{E}_H$ обозначим через g_3. Цепь $\check{C}$ играет роль цепи, контролирующей правильность работы элементов из блоков S_1, S_2, S_3 на наборах из $\hat{T}$. На каждом таком наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ при выдаче всеми элементами блоков S_1, S_2, S_3 „правильных“ значений (то есть значений, которые выдаются при правильной работе этих элементов и указаны в таблице поведений выходов этих элементов на $\hat{T}$) на выходах всех элементов цепи $\check{C}$ (и на выходе всей цепи) окажется значение переменной α_2, что означает „ошибки не обнаружены“. При выдаче же хотя бы одним элементом блоков S_1, S_2, S_3 „неправильного“ на наборе из $\hat{T}$ значения (то есть значения, отличного от указанного в таблице поведений выхода этого элемента на этом наборе из $\hat{T}$) на выходах всех элементов цепи $\check{C}$, начиная с первого получившего неверное значение элемента (а значит, и на выходе всей цепи), окажется значение $\bar{\alpha}_2$, что означает „ошибка обнаружена“.

Положим для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, 14\}$

$$\eta_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{cases} \gamma_4, & \text{если } ((\gamma_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1 \text{ и } (\gamma_2 = \alpha_2 \oplus 1)) \\ & \text{или } ((\gamma_4 = Q_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)) \text{ и } (\gamma_3 = \alpha_2)) \\ & \text{или } ((\gamma_4 \neq Q_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)) \text{ и } (\gamma_3 = \bar{\alpha}_2)), \\ \bar{\gamma}_4, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{16}$$

Включим в базис $\hat{B}$ семивходовые функциональные элементы E^{η_j} $(j = \overline{1, 14})$, реализующие функции $\eta_j(x_1, x_2, x_n, u_1, u_2, u_3, u_4)$ (входы $x_1, x_2, x_n, u_1, u_2, u_3, u_4$ элемента E^{η_j} располагаются слева направо).

Пусть последний функциональный элемент цепочки C блока S_2 (выход этого элемента обозначен через g_4) есть элемент $\hat{E}_{\hat{h}}$ $(\hat{h} \in \{1, 2, \ldots, H\})$ с поведением $Q_{\nu_{\hat{h}}}(x_1, x_2, x_n)$ $(\nu_{\hat{h}} \in \{1, 2, \ldots, 14\})$. Завершим построение схемы S, добавив выходной функциональный элемент $\check{E}$, являющийся семивходовым элементом $E^{\eta_{\nu_{\hat{h}}}}$. На первые три входа элемента $\check{E}$ подаются переменные x_1, x_2, x_n, на четвертый, пятый, шестой и седьмой его входы подаются значения g_1, g_2, g_3, g_4 (соответственно). Выход элемента $\check{E}$ является выходом всей схемы S.

Пример схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$, изображен на рисунке 2.

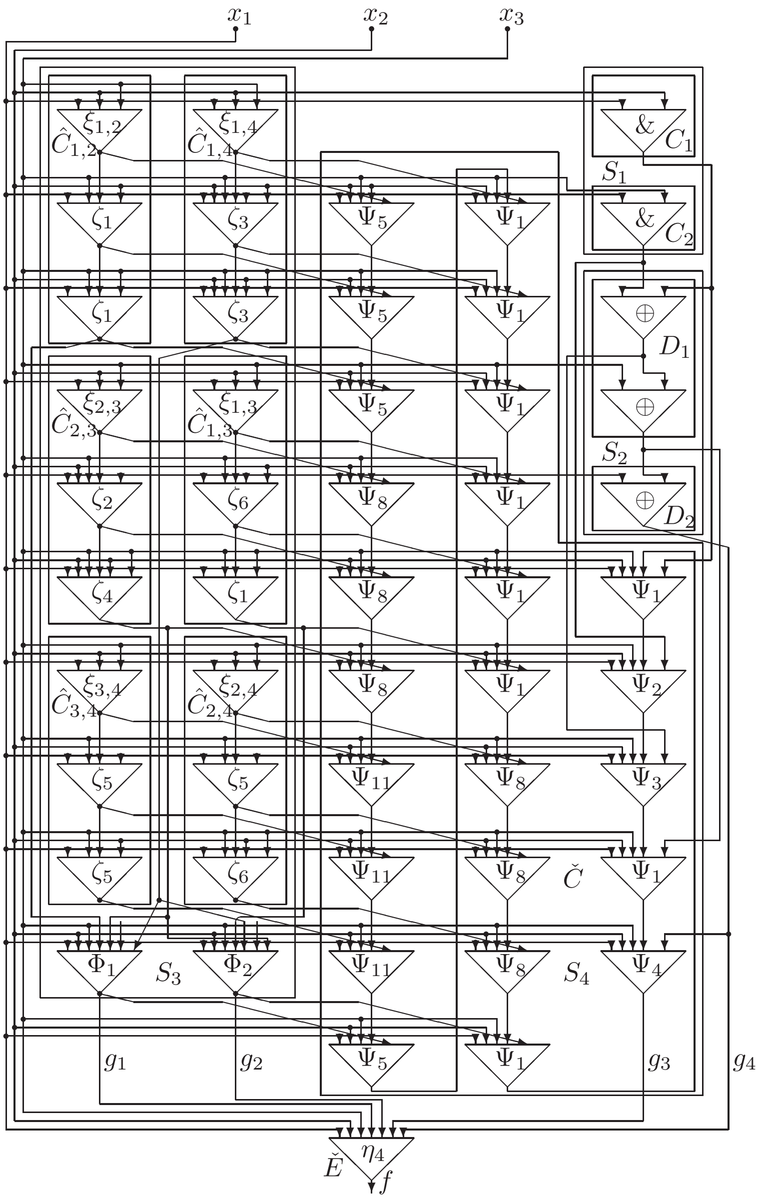

Рис. 2. Схема S, реализующая функцию $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$. Жирными точками отмечены входы схемы и ветвления проводников (ветвления выходов функциональных элементов), символами указаны входы схемы, выходы блоков и схемы, типы функциональных элементов (по реализуемым ими функциям), названия цепей и блоков схемы, а также название выходного элемента.

Покажем, что схема S в исправном состоянии реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$.

Рассмотрим сначала работу схемы на каком-то наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \hat{T}$. На этом наборе получим: $g_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n$, $g_2 = \alpha_2$, $g_3 = \alpha_2$, $g_4 = f(\tilde{\alpha})$. Значит, в соответствии с (16) имеем: $\eta_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, g_1, g_2, g_3, g_4) = g_4 = f(\tilde{\alpha})$, так как $g_4 = f(\tilde{\alpha}) = Q_{\nu_{\hat{h}}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)$ и $g_3 = \alpha_2$. Значит, в этом случае на выходе схемы будет $f(\tilde{\alpha})$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь работу схемы на наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \notin \hat{T}$. На этом наборе получим: $g_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n \oplus 1$, $g_2 = \alpha_2 \oplus 1$, $g_4 = f(\tilde{\alpha})$. Значит, в соответствии с (16) имеем: $\eta_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, g_1, g_2, g_3, g_4) = g_4 = f(\tilde{\alpha})$, так как $g_4 = f(\tilde{\alpha})$, $g_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_n \oplus 1$ и $g_2 = \alpha_2 \oplus 1$. Значит, и в этом случае на выходе схемы будет $f(\tilde{\alpha})$, что и требовалось.

Докажем, что наборы множества $\hat{T}$ образуют полный проверяющий тест для схемы S.

Пусть, для начала, неисправен выходной элемент $\check{E}$ схемы S (и, быть может, еще какие-то элементы). Тогда на выходе схемы на любом наборе будет одно и то же значение. Но функция f на наборах из $\hat{T}$ принимает оба значения. Действительно, если ни одна переменная из K_1 не входит в P_f в качестве линейного слагаемого, то $f(\tilde{\alpha}_1^n) \neq f(\tilde{\alpha}_3^n)$. А если какие-то переменные из K_1 входят в P_f в качестве линейных слагаемых, то среди них есть x_1 (на основании соглашения), и $f(\tilde{\alpha}_1^n) \neq f(\tilde{\alpha}_2^n)$. Значит, такая неисправность будет обнаружена на наборах из $\hat{T}$.

Теперь будем считать, что выходной элемент $\check{E}$ схемы S исправен.

Лемма 1. *При любых константных неисправностях элементов блока S_3 (как и при отсутствии неисправностей в S_3) найдутся хотя бы три различных набора $\tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}''$, $\tilde{\beta}'''$ из $\hat{T}$, на каждом из которых на выходе g_1 окажется значение функции $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ или на выходе g_2 окажется значение функции x_2 и которые поэтому будут распознаны (исправным) элементом $\check{E}$ как наборы множества $\hat{T}$.*

Доказательство. Пусть поломок элементов в блоке S_3 нет. Тогда на каждом наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из $\hat{T}$ имеем: $g_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_n$, $g_2 = \alpha_2$, то есть все четыре набора из $\hat{T}$ распознаются элементом $\check{E}$ как наборы множества $\hat{T}$.

Пусть в блоке S_3 неисправны оба выходных элемента E^{Φ_1}, E^{Φ_2} (остальные константные неисправности на выходах элементов из S_3 при этом не важны). Тогда, в зависимости от типа неисправности, элемент E^{Φ_1} распознает как принадлежащие множеству $\hat{T}$ либо два набора $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_3^n$ (при константной неисправности 0 на выходе E^{Φ_1}, ибо только на этих двух наборах из $\hat{T}$ значение $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ равно нулю), либо два набора $\tilde{\alpha}_2^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ (при константной неисправности 1 на выходе E^{Φ_1}). Аналогично, элемент E^{Φ_2} распознает как принадлежащие множеству $\hat{T}$ либо два набора $\tilde{\alpha}_1^n$, $\tilde{\alpha}_2^n$ (при константной неисправности 0 на выходе E^{Φ_2}, ибо только на этих двух наборах из $\hat{T}$ значение x_2 равно нулю), либо два набора $\tilde{\alpha}_3^n$, $\tilde{\alpha}_4^n$ (при константной неисправности 1 на выходе E^{Φ_2}). А так как выходной элемент $\check{E}$ распознаёт набор как принадлежащий множеству $\hat{T}$, если на его четвертом входе значение равно значению функции $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n$ или на его пятом входе значение равно значению функции x_2, то при любых константных неисправностях на выходах E^{Φ_1}, E^{Φ_2} элемент $\check{E}$ распозна́ет три набора из $\hat{T}$ как принадлежащие множеству $\hat{T}$.

Предположим теперь, что по крайней мере один из элементов E^{Φ_1}, E^{Φ_2} исправен.

По замечанию 2 каждая из цепей $\hat{C}_{i,j}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ при любых константных неисправностях ее элементов цепи распознаёт хотя бы один набор из пары $(\tilde{\alpha}_i^n, \tilde{\alpha}_j^n)$ на выходе цепи как набор из этой пары. Пусть исправен элемент E^{Φ_ν} $(\nu \in \{1, 2\})$. Если четыре цепи, выходы которых подаются на входы E^{Φ_ν}, распознают хотя бы три набора из $\hat{T}$ как принадлежащие множеству $\hat{T}$, то эти же три набора будут распознаны и исправным элементом $\check{E}$ как принадлежащие множеству $\hat{T}$.

Пусть теперь четыре цепи, выходы которых подаются на входы E^{Φ_ν}, распознают только два набора из $\hat{T}$ как принадлежащие множеству $\hat{T}$ (количество таких наборов не может быть меньше двух по замечанию 2, а также вследствие того, что четыре цепи, выходы которых подаются на входы E^{Φ_ν}, соответствуют ребрам простого цикла Z_ν длины 4 в графе K_4 с вершинами из $\hat{T}$). Тогда эти два набора могут соответствовать только противоположным вершинам цикла Z_ν. Значит, для цепей, подающихся на входы E^{Φ_1}, такими пáрами наборов могут быть либо $(\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_3^n)$, либо $(\tilde{\alpha}_2^n, \tilde{\alpha}_4^n)$, а для цепей, подающихся на входы E^{Φ_2}, такими пáрами наборов могут быть либо $(\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n)$, либо $(\tilde{\alpha}_3^n, \tilde{\alpha}_4^n)$, и в этих случаях ситуация аналогична ситуации с константными неисправностями на выходах обоих элементов E^{Φ_1}, E^{Φ_2}, рассмотренной выше. Лемма доказана.

Следствие 1. *Среди трех наборов $\tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}''$, $\tilde{\beta}'''$ из $\hat{T}$, распознанных (исправным) элементом $\check{E}$ как наборы множества $\hat{T}$, найдутся два с различными значениями переменной x_2.*

Продолжим доказательство теоремы.

Пусть не все элементы блока S_4 исправны, и пусть последний неисправный элемент цепи $\check{C}$ выдает константу σ. Тогда ошибка будет обнаружена на таком (распознанном как набор из $\hat{T}$) наборе $\tilde{\beta}$ из множества наборов $\{\tilde{\beta}', \tilde{\beta}'', \tilde{\beta}'''\} \subseteq \hat{T}$, на котором $x_2 = \bar{\sigma}$ (существование набора $\tilde{\beta}$ гарантируется следствием леммы), ибо сигнал $\bar{\sigma}$ дойдет до шестого входа элемента $\check{E}$ как сигнал о найденной неисправности, и в соответствии с (16) на выходе схемы появится значение, отличное от правильного значения $f(\tilde{\beta})$.

Пусть теперь все элементы блока S_4 исправны, но имеется хотя бы одна неисправность элемента в блоке S_3. Пусть, в частности, неисправен какой-то элемент E блока S_3. При отсутствии неисправностей на четырех наборах из $\hat{T}$ на выходе E два раза возникает ноль и два раза единица. В неисправном состоянии у этого элемента на всех наборах одинаковые значения. Значит, хотя бы на одном (распознанном как набор из $\hat{T}$) наборе $\tilde{\beta}$ из множества наборов $\{\tilde{\beta}', \tilde{\beta}'', \tilde{\beta}'''\} \subseteq \hat{T}$ значение на выходе элемента E будет отличаться от правильного, и на этом наборе вдоль цепи $\check{C}$ от того ее элемента, на правый вход которого подается выход E, до выхода g_3 дойдет значение функции $\bar{x}_2$ как сигнал о найденной неисправности. Далее, в соответствии с (16) на выходе схемы появится значение, отличное от правильного значения $f(\tilde{\beta})$.

Пусть теперь и все элементы блока S_3 исправны, но имеется хотя бы одна неисправность элемента в блоках S_1, S_2. Пусть, в частности, неисправен какой-то элемент E. При отсутствии неисправностей на четырех наборах из $\hat{T}$ поведение выхода элемента E было неконстантным (см. таблицу и пояснения к ней). В неисправном состоянии у этого элемента на всех наборах одинаковые значения. Значит, хотя бы на одном наборе $\tilde{\beta}$ из $\hat{T}$ значение на выходе элемента E будет отличаться от правильного, и на этом наборе вдоль цепи $\check{C}$ от того ее элемента, на правый вход которого подается выход E, до ее выхода g_3 дойдет значение функции $\bar{x}_2$ как сигнал о найденной неисправности. Далее, в соответствии с (16) на выходе схемы появится значение, отличное от правильного значения $f(\tilde{\beta})$.

Следовательно, множество наборов $\hat{T}$ образует полный проверяющий тест длины 4 относительно произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов в схеме S.

Случай 2. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ — линейная ($n \geqslant 3$) и имеет вид $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus a_0$. Реализуем ее цепочкой элементов сложения по модулю 2 (на входы первого элемента подаются x_1, x_2, на правый вход i-го — x_{i+1}, $i = \overline{2, n-1}$), к этой цепочке при $a_0 = 1$ подвешивается инвертор. Тогда для построенной схемы S полным проверяющим тестом будет множество наборов $\{\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n\}$ из случая 1.

Случай 3. Пусть f — функция, зависящая не более чем от двух переменных x_1, x_2. В этом случае все наборы образуют тест длины не более 4, и утверждение теоремы следует из того, что, как легко проверить, в базисе $\{\bar{x}, x\&y, x\oplus y\}$ возможно построение тестопригодной схемы для каждой из таких функций.

Таким образом, построен указанный в утверждении теоремы полный схемный базис $\hat{B}$; его элементы реализуют функции $\{\bar{x},\ x\&y,\ x \oplus y,\ x \sim y,\ \xi_{\nu,\mu},\ \zeta_i,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Psi_j,\ \eta_j \mid 1 \leqslant \nu < \mu \leqslant 4,\ i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,14}\}$ (см. (1)–(16)).

Теорема доказана.

Замечание 3. Из того, что каждую не равную константе функцию $f(\tilde{x}^n)$ следует отличать от обеих констант, из замечания 1 и существования тестопригодных схем в любом полном базисе B следует, что при $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $D^{\mathrm{detect}}_{\hat{B},\ U^c}(n) \geqslant 2$.

Теперь из теоремы и замечания 3 вытекает

Следствие 2. *Существует схемный базис $\hat{B}$, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, такой, что для него при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место неравенства $2 \leqslant D^{\mathrm{detect}}_{\hat{B},\ U^c}(n)) \leqslant 4$.*

Автор выражает глубокую благодарность профессору Сергею Андреевичу Ложкину за обсуждение работы и ценные замечания, а также рецензенту за большую работу, проведенную им по улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00964-а и № 13-01-00958-а.

Список литературы

1. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем.* МГУ, Москва, 1992.
2. Reddy S. M., Easily testable realization for logic functions. *IEEE Trans. Comput* (1972) **21**, №1, 124–141.
3. Редькин Н. П., О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика* (1986), № 1 72–74.
4. Редькин Н. П., О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов. *В сб.: Математические вопросы кибернетики* (1989), № 2 198–222.
5. Редькин Н. П., О схемах, допускающих короткие тесты. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика* (1988), № 2 17–21.
6. Редькин Н. П., О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика* (1992), № 5 43–46.
7. Редькин Н. П., О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика* (2007), № 3 29–33.

8. Коваценко С. В., Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей. *Вестник Моск. ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и киберн.* (2000), № 2 45–47.

9. Редькин Н. П., Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов. *В сб.: Математические вопросы кибернетики* (2003), № 12 217–230.

10. Бородина Ю. В., О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов. *Вестник Моск. ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и киберн.* (2008), № 1 40–44.

11. Бородина Ю. В., О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика* (2008), № 5 49–52.

12. Бородина Ю. В., Бородин П. А., Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа „0“ на выходах элементов. *Дискретная математика* (2010) **22**, №3, 127–133.

Статья поступила 02.03.2011.