

*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ*

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С  
КИНЕТИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННОЙ  
ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ ДЛЯ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА  
НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ  
ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТКАХ**

© *А.Н.Павлов, А.С.Чайка, Б.Н.Четверушкин*

Институт Математического Моделирования РАН, Москва

Построены кинетически-согласованные разностные схемы на криволинейных ортогональных сетках для решения уравнений Навье- Стокса. Приведены результаты расчета обтекания эллипса сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа при числах Рейнольдса  $Re = 10^3$ , Маха  $M = 2$ . Расчеты выполнены на многопроцессорной транспьютерной вычислительной системе.

**A finite difference schemes with artificial  
kinetic-consistent viscosity for Navier-Stokes  
equations on curvilinear ortogonal grids**

*A.N.Pavlov, A.S.Chaika, B.N.Chetverushkin*

Institute for Mathematical Simulation Russian Academy of Science, Moscow.

Finite difference schemes with artificial kinetic-consistent viscosity for solution Navier-Stokes equations are constructed on curvilinear orthogonal grids. A supersonic heat-conducting gas flow about an elliptic cylinder is calculated at Reynolds number  $Re = 10^3$ , Mach number  $M = 2$ . Multiprocessor transputer system with MIMD architecture has been used for calculation.

## ВВЕДЕНИЕ

Расчеты сложных сверхзвуковых газодинамических течений [1-6] показали перспективность кинетически-согласованных разностных схем. В работах [7,8] построены кинетически-согласованные схемы для решения уравнений Навье-Стокса на произвольных криволинейных сетках, состоящих из выпуклых четырехугольников. В данной работе построены разностные схемы с кинетически-согласованной искусственной вязкостью для расчетов на криволинейных ортогональных сетках. Использован вид дифференциальных уравнений в произвольной криволинейной ортогональной системе координат. Использование ортогональной системы координат сужает класс допустимых разностных сеток. Но, вместе с тем, дает ряд существенных преимуществ. Проще решаются вопросы аппроксимации дифференциальных уравнений и граничных условий, решения разностных уравнений. Сокращается объем и время вычислений.

В данной работе ортогональная сетка генерируется численно, на основе простого и эффективного метода [9].

Расчеты выполнены на 32-х процессорной транспьютерной вычислительной системе.

## 1 Уравнения Навье-Стокса в криволинейной ортогональной системе координат с кинетически-согласованной искусственной вязкостью

1.1. Первоначально уравнения с кинетически-согласованной искусственной вязкостью были получены из физической кинетической модели газа типа "бесстолкновительный разлет - максвеллизация" [1-3].

Полученные из данной модели уравнения для макроскопических параметров газа являются моментными уравнениями для аналога уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i(\xi^i f) = \nabla_i \frac{\tau}{2} \nabla_j(\xi^i \xi^j f) + J_{st} \quad (1.1)$$

в предположении, что  $f$  имеет локально-максвелловский или локально-Навье-Стоксовский вид. В последнем случае имеем уравнения Навье-Стокса с дополнительными членами в правой части [6,7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho u^i) = \nabla_i \frac{\tau}{2} \left[ \nabla_j(\rho u^i u^j) + \nabla^i p \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho u^k}{\partial t} + \nabla_i(\rho u^i u^k) + \nabla^k p = \nabla_i \mu (\nabla^k u^i + \nabla^i u^k) - \frac{2}{3} \nabla^k (\mu \nabla_i u^i) +$$

$$\frac{\nabla_i \frac{\tau}{2} [\nabla_j (\rho u^i u^j u^k) + \nabla^k (p u^i) + \nabla^i (p u^k)] + \nabla^k \frac{\tau}{2} [\nabla_i (p u^i)]}{},$$

$$k = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_i ((E + p) u^i) = \nabla_i \mu u_j (\nabla^j u^i + \nabla^i u^j) - \frac{2}{3} \nabla_j (\mu u^j \nabla_i u^i) +$$

$$\nabla_i (\kappa \nabla^i T) + \nabla_i \frac{\tau}{2} \left[ \nabla_j ((E + 2p) u^i u^j) + \nabla^i \frac{p}{\rho} (E + p) \right] \tag{1.4}$$

$$E = \rho \left( \varepsilon + \frac{u_i u^i}{2} \right), \quad p = \rho (\gamma - 1) \varepsilon \tag{1.5}$$

Дополнительные члены подчеркнуты. Параметр  $\tau = \tau(\rho, T, l)$  - время бесстолкновительного разлета частиц газа. В уравнение энергии добавлен теплопроводный член.

В данной работе не будем касаться физического смысла дополнительных членов. Это является самостоятельной задачей. Будем рассматривать дополнительные члены как члены искусственной вязкости. При этом  $\tau$  приобретает смысл, связанный с постановкой дискретной задачи, а именно:  $\tau \approx h/c$ , где  $h$  - шаг сетки,  $c$  - характерная скорость.

Перечислим все сделанные в работе преобразования и упрощения членов искусственной вязкости.

Во-первых, в соответствии с предложенной в работе [15] модифицированной кинетической моделью в уравнениях опущены смешанные пространственные производные, относящиеся к искусственной вязкости.

Во-вторых, опущены члены искусственной вязкости, содержащие производные от  $\ln(H_i)$ . Расчеты показывают, что это не ухудшает устойчивости, при том, что уравнения упрощаются.

В-третьих, в уравнениях движения и энергии опущены члены искусственной вязкости, дающие вклад в формирование динамического и температурного пограничных слоев [10,12,13].

Все члены искусственной вязкости приведены к дивергентному виду.

Перечисленные выше преобразования искусственной вязкости выполнены с целью упростить и ускорить ее вычисление, не потеряв при этом ее

регуляризирующих свойств.

Отметим, что члены естественной вязкости и теплопроводности нами не упрощены и входят в рассматриваемые уравнения полностью.

1.2. Будем использовать уравнения Навье-Стокса, записанные в криволинейной ортогональной системе координат и содержащие в правой части члены кинетически-согласованной искусственной вязкости.

Введем обозначения:  $x, y, z$  - декартовы координаты;

$x^1, x^2, x^3$  - криволинейные ортогональные координаты;

$H_1, H_2, H_3$  - коэффициенты Ламэ, определяемые выражением:

$$H_i^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial x^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x^i} \right)^2 \quad (1.6)$$

В ортогональной системе координат составляющие фундаментального тензора выражаются через коэффициенты Ламэ следующим образом:

$$g_{ii} = H_i^2, \quad g = H_1^2 H_2^2 H_3^2, \quad g^{ii} = \frac{1}{H_i^2}, \quad g_{ik} = g^{ik} = 0 \quad (1.7)$$

Обозначим  $u_1, u_2, u_3$  физические составляющие вектора скорости в криволинейной системе координат. Физические составляющие  $(a_{\phi})_i$  вектора  $\mathbf{a}$ , ковариантные  $(a_{\kappa\sigma})_i$  и контрвариантные  $(a_{\kappa\kappa})^i$  составляющие связаны между собой формулами:

$$(a_{\phi})_i = H_i (a_{\kappa\kappa})^i = \frac{1}{H_i} (a_{\kappa\sigma})_i \quad (1.8)$$

Вид уравнений Навье-Стокса в ортогональной системе координат и переход к физическим составляющим векторов посредством формул (1.8) можно найти, например, в [14]. Преобразования членов искусственной вязкости, приведенных в тензорном виде в правых частях уравнений (1.2)-(1.4) выполняются с помощью формул тензорного анализа [14] с учетом выражений (1.7) и (1.8). В данной работе эти простые по сути, но громоздкие выкладки приводить не будем.

Рассмотрим случай плоской симметрии по  $x^3$ , то есть  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x^3} = 0$  и  $H_3 = 1$ .

Приведем уравнения в безразмерном виде. Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^1} (H_2 R_1) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (H_1 R_2) = 0 \quad (1.9)$$

где  $R_1, R_2$  - составляющие потока плотности  $\rho$  :

$$R_1 = \rho u_1 - \frac{\tau_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x^1} (\rho u_1^2 + p) \quad (1.10)$$

$$R_2 = \rho u_2 - \frac{\tau_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho u_2^2 + p) \quad (1.11)$$

Уравнение для составляющей импульса  $\rho u_1$  :

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^1} (H_2 U_1) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (H_1 U_2) = F \quad (1.12)$$

где  $U_1, U_2$  - составляющие потока компоненты импульса  $\rho u_1$  ,  $F$  - недивергентная часть уравнения:

$$U_1 = \rho u_1^2 - \frac{\tau_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x^1} (\rho u_1^3 + 3p u_1) - \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right) \right] \quad (1.13)$$

$$U_2 = \rho u_1 u_2 - \frac{\tau_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho u_2^2 u_1 + \beta p u_1) - \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right] \quad (1.14)$$

$$F = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial x^1} - \frac{\rho u_2}{H_1 H_2} \left( u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x^2} - u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right) + \frac{\mu}{Re_1} \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \left( \frac{4}{3} \left( \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) - \frac{4}{3} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{1}{3} \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right] \quad (1.15)$$

Уравнение для составляющей импульса  $\rho u_2$  :

$$\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^1} (H_2 V_1) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (H_1 V_2) = G \quad (1.16)$$

где  $V_1, V_2$ - составляющие потока компоненты импульса  $\rho u_2$  ,  $G$  - недивергентная часть уравнения:

$$V_1 = \rho u_1 u_2 - \frac{\tau_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x^1} (\rho u_1^2 u_2 + \beta p u_2) - \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right] \quad (1.17)$$

$$V_2 = \rho u_2^2 - \frac{\tau_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho u_2^3 + 3p u_2) - \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) \right] \quad (1.18)$$

$$G = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial x^2} - \frac{\rho u_1}{H_1 H_2} \left( u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\mu}{Re_1} \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \left( \frac{4}{3} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right)^2 \right) - \frac{4}{3} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} + \frac{2}{3} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right] \quad (1.19)$$

Уравнение для энергии  $E$  :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^1} (H_2 E_1) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (H_1 E_2) = 0 \quad (1.20)$$

где  $E_1, E_2$  - составляющие потока энергии:

$$E_1 = (E + p)u_1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Re_1 Pr} \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial T}{\partial x^1} - \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{2}{3} u_1 \left( \frac{2}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{u_1 u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} + u_2 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right) \right] - \frac{\tau_1}{H_1} \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} T \frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( p \frac{u_1^2 + \beta u_2^2}{2} + (E + 2p)u_1^2 \right) \right] \quad (1.21)$$

$$E_2 = (E + p)u_2 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Re_1 Pr} \frac{\mu}{H_2} \frac{\partial T}{\partial x^2} -$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{Re_1} \left[ \frac{2}{3} u_2 \left( \frac{2}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} \frac{u_1 u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} + u_1 \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) \right] - \\ & \frac{\tau_2}{H_2} \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} T \frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( p \frac{u_2^2 + \beta u_1^2}{2} + (E + 2p) u_2^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$p = \rho T, \quad E = \rho \left( \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{T}{\gamma-1} \right), \quad Re_1 = \frac{Re}{M\sqrt{\gamma}} \quad (1.23)$$

$\beta$  - коэффициент коррекции, в расчетах  $\beta = 0$ .

Для простоты ориентации члены искусственной вязкости подчеркнуты.

Обезразмеривание проведено следующим образом:

$$\begin{aligned} t &= \frac{L_o}{U_o} \tilde{t}, \quad H_i = L_o \tilde{H}_i, \quad u_i = U_o \tilde{u}_i, \quad i = 1, 2 \\ \rho &= \rho_o \tilde{\rho}, \quad p = \rho_o U_o^2 \tilde{p}, \quad T = T_o \tilde{T}, \quad E = E_o \tilde{E}, \quad \tau = \frac{L_o}{U_o} \tilde{\tau}, \quad U_o = M\sqrt{\gamma RT_o}, \\ \mu(T) &= \mu_o \tilde{\mu}(\tilde{T}T_o), \quad \kappa(T) = \kappa_o \tilde{\kappa}(\tilde{T}T_o). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь  $T_o, \rho_o, L_o$  - характерные значения температуры, плотности и размера области течения.

Здесь для обозначения безразмерных величин использован символ "˜".

В уравнениях (1.9)-(1.23) символ "˜" над безразмерными величинами опущен.

Задавая геометрическую форму области, граничные, начальные условия и величины:

$$L_o, \rho_o, T_o, M, R, \gamma, \mu(T), \kappa(T) \quad (1.25)$$

мы определяем течение. Через величины и функции (1.25) определяются числа Рейнольдса, Прандтля, а также константы и функции, связанные со свойствами газа:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho_o U_o L_o}{\mu_o}, \quad Pr = \frac{\mu_o c_p}{\kappa_o}, \\ U_o &= M\sqrt{\gamma RT_o}, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R, \quad c_v = \frac{1}{\gamma-1} R. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Далее везде будем использовать безразмерные величины, опуская символ " ~ "

## 2 Разностная схема

**2.1.** Получим явную консервативную разностную схему, аппроксимирующую уравнения (1.9)-(1.23) со вторым порядком по пространству (на равномерной сетке в криволинейной системе координат) и с первым порядком по времени.

Явные схемы обладают существенным недостатком, связанным с ограничением Куранта-Фридрихса-Леви на временной шаг. Однако, они обладают тем достоинством, что при их использовании вычисления распараллеливаются с максимальной простотой и эффективностью. Явные схемы легко адаптируются к многопроцессорным вычислительным системам MIMD архитектуры с распределенной памятью, к которым относятся и транспьютерные комплексы [16].

Предложенная в данной работе разностная схема была реализована на 32-ти процессорной транспьютерной системе [18]. Прямоугольная решетка процессоров накладывается на расчетную область так, что каждый процессор ведет расчет определенного числа пространственных точек. Тем самым вся расчетная область разбивается на подобласти, количество которых совпадает с числом процессоров.

На каждом шаге по времени процессоры обмениваются информацией о значениях газодинамических параметров. При использованном 9-ти точечном шаблоне информация из соседних подобластей необходима для выполнения вычислений только в ближайших к границам подобластей узлах. На Рис.2.1 приведен фрагмент области расчета, разбитой на четыре подобласти: А, В, С, D. В угловых узлах сетки для выполнения вычислений требуется информация от процессоров, расположенных по диагонали. Обмены по диагонали выполняются в два этапа.

Обмены второго этапа требуются только в угловых узлах, число которых много меньше общего числа узлов. Обмены первого этапа требуются только в ближайших к границам подобластей узлах, число которых мало по сравнению с числом внутренних в подобластях узлов. Этим обеспечивается малость временных затрат на обмены по сравнению с общим временем счета. Время, затрачиваемое на обмены, составляет 11 % от общего времени счета.

Возможно также одновременное выполнение расчетов процессорами и обмен информацией между процессорами (overlapping) [17].

2.2. Введем в области  $\Omega(x^1, x^2)$  равномерную по  $x^1$  и  $x^2$  сетку с шагом  $h$  (см.Рис.2.2):

$$\omega_h = \{(x^1, x^2) \mid x^1 = (x^1)_i = (i - 1)h, x^2 = (x^2)_j = (j - 1)h, \\ i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2\} \tag{2.1}$$

Все величины, а именно  $\rho_{i,j}, T_{i,j}, p_{i,j}, (u_1)_{i,j}, (u_2)_{i,j}, (H_1)_{i,j}, (H_2)_{i,j}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$ , с индексами  $i, j$  будем относить к центрам ячеек с координатами  $x^1 = (i - 1)h + 0.5h, x^2 = (j - 1)h + 0.5h$  ( см. Рис.2.3).

В работе для построения разностных схем использован интегро-интерполяционный метод (ИИМ) [11], приводящий к консервативным разностным схемам.

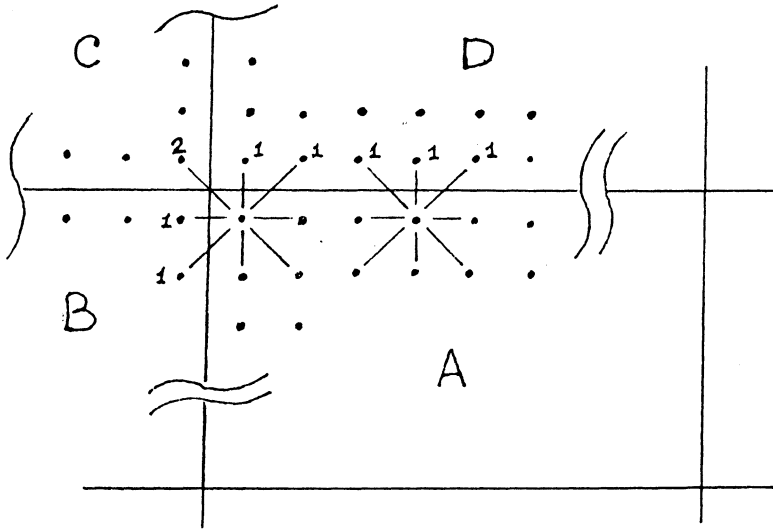


Рис. 2.1: Четыре соседних подобласти А, В, С, D области расчета. Показаны 9-точечные шаблоны двух узлов сетки. Цифрами 1 и 2 отмечены узлы, из которых информация передается в 1 и 2 этапа соответственно.

Приведем разностную схему в потоковом виде:

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{S_{i,j}} ((d_2 R1)_{i+0.5,j} - (d_2 R1)_{i-0.5,j} + \\ (d_1 R2)_{i,j+0.5} - (d_1 R2)_{i,j-0.5}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{(\rho u_1)_{i,j}^{n+1} - (\rho u_1)_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{S_{i,j}} ((d_2 U_1)_{i+0.5,j} - (d_2 U_1)_{i-0.5,j} + (d_1 U_2)_{i,j+0.5} - (d_1 U_2)_{i,j-0.5}) = F_{i,j} \quad (2.3)$$

$$\frac{(\rho u_2)_{i,j}^{n+1} - (\rho u_2)_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{S_{i,j}} ((d_2 V_1)_{i+0.5,j} - (d_2 V_1)_{i-0.5,j} + (d_1 V_2)_{i,j+0.5} - (d_1 V_2)_{i,j-0.5}) = G_{i,j} \quad (2.4)$$

$$\frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{S_{i,j}} ((d_2 E_1)_{i+0.5,j} - (d_2 E_1)_{i-0.5,j} + (d_1 E_2)_{i,j+0.5} - (d_1 E_2)_{i,j-0.5}) = 0 \quad (2.5)$$

$$p_{i,j} = \rho_{i,j} T_{i,j}, \quad E_{i,j} = \left( \rho \left( \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{T}{\gamma - 1} \right) \right)_{i,j} \quad (2.6)$$

Здесь:

$$S_{i,j} = (H_1 H_2)_{i,j} h^2 \quad (2.7)$$

$$(d_1)_{i,j+0.5} = (H_1)_{i,j+0.5} h, \quad (d_2)_{i+0.5,j} = (H_2)_{i+0.5,j} h \quad (2.8)$$

соответственно площадь и длины сторон криволинейных ячеек. Для аппроксимации  $\tau$  использованы выражения:

$$(\tau_1)_{i+0.5,j} = \frac{1}{\alpha} \frac{(d_2)_{i+0.5,j}}{\sqrt{T_{i+0.5,j}}}, \quad (\tau_2)_{i,j+0.5} = \frac{1}{\alpha} \frac{(d_1)_{i,j+0.5}}{\sqrt{T_{i,j+0.5}}} \quad (2.9)$$

где  $\alpha$  - числовой коэффициент; в расчетах  $\alpha = 4$ .

Здесь  $R_1, U_1, V_1, E_1$  - потоки плотности, составляющих импульса и энергии вдоль координатной линии  $x^1$ .  $R_2, U_2, V_2, E_2$  - соответствующие потоки вдоль координатной линии  $x^2$ .  $F, G$  - недивергентные части уравнений движения. В дифференциальном виде потоки и правые части уравнений приведены в формулах (1.10), (1.11), (1.13)-(1.15), (1.17)-(1.19), (1.21), (1.22).

Потоки аппроксимируем со вторым порядком  $O(h^2)$  на сетке  $\omega_h$ . Например, для уравнения неразрывности имеем:

$$(R_1)_{i+0.5,j} = (\rho u_1)_{i+0.5,j} - \frac{\tau_1}{d_2} (p_{i+0.5,j} - p_{i,j} + (\rho u_1^2)_{i+0.5,j} - (\rho u_1^2)_{i,j})$$

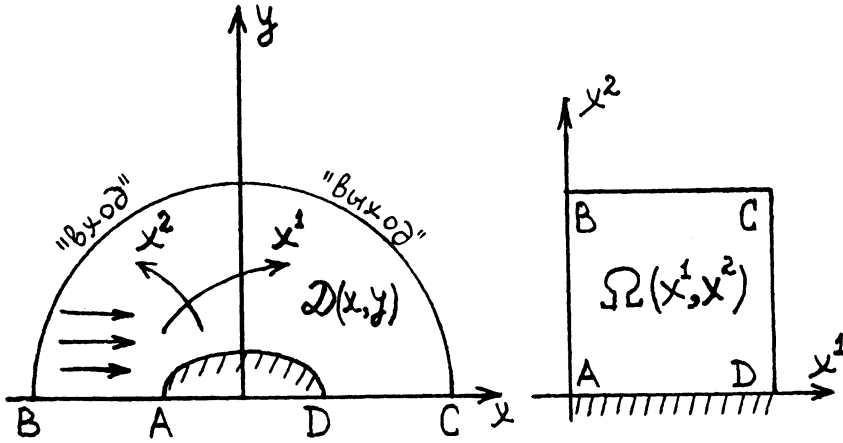


Рис. 2.2: Область расчета в декартовых координатах  $(x, y)$  и в криволинейных координатах  $(x^1, x^2)$ .

$$(R_2)_{i,j+0.5} = (\rho u_2)_{i,j+0.5} - \frac{\tau_2}{d_{1,i,j+0.5}} (p_{i,j+0.5} - p_{i,j} + (\rho u_2^2)_{i,j+0.5} - (\rho u_2^2)_{i,j})$$

При такой аппроксимации потоков конвективные члены аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком на сетке  $\omega_h$ .

Выражения с полуцелыми индексами определяются через полусуммы значений величин, которые входят в выражение и определены в центрах ячеек. Например:

$$(\rho u_1)_{i+0.5,j} = \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j}}{2} \frac{(u_1)_{i,j} + (u_1)_{i+1,j}}{2}$$

Аналогично аппроксимируются остальные потоки. В правых частях  $F, G$  все производные аппроксимируются центральными разностями.

Шаг по времени определяется выражением:

$$\Delta t = \delta \min_{i,j} \left\{ \frac{\min(d_1, d_2)}{\sqrt{(u_1^2)_{i,j} + (u_2^2)_{i,j} + \sqrt{T_{i,j}/M}}} \right\}$$

где  $\delta = 0.2 \div 0.8$ .

2.3. Сделаем замечания по поводу численной реализации граничных условий на твердой поверхности.

Считаем, что криволинейная сетка адаптирована к границе области так, что граница поверхности совпадает с координатной линией  $x^2 = 0$  (см. Рис.2.2, 2.3).

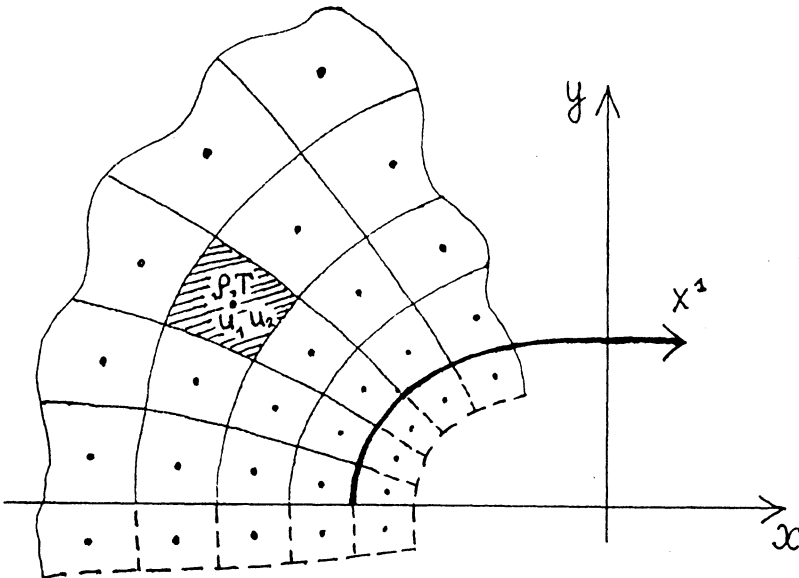


Рис. 2.3: Фрагмент разностной сетки и фиктивные ячейки у поверхности твердого тела и у плоскости симметрии.

В граничных ячейках потоки массы, импульса и энергии через грани ячеек, совпадающие с границей области, а также недивергентные члены в уравнениях движения, аппроксимируем с учетом граничных условий.

Для сохранения в области расчета баланса массы, энергии и импульса добавочные потоки (возникающие с появлением в уравнениях членов искусственной вязкости) на твердой поверхности и на плоскости симметрии будем задавать равными нулю.

Полученная система разностных уравнений (2.2)-(2.6) для задачи в области  $\Omega(x^1, x^2)$  не является замкнутой. Для ее замыкания необходимо добавить уравнение для давления (или плотности) на твердой поверхности.

Будем считать, что уравнение движения (1.16) выполняется на твердой поверхности. Проекция этого уравнения (без членов искусственной вязкости) на рассматриваемую границу области имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial x^2} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\mu}{Re_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) + \quad (2.10) \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ H_1 \frac{\mu}{Re_1} \left( \frac{4}{3} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right) \right) \right\} + \frac{\mu}{Re_1} \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Здесь использованы граничные условия  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  и следующие из них очевидные условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x^1} = 0.$$

Разностный аналог уравнения (2.10) будем использовать для замыкания разностной системы уравнений.

Для получения однородной разностной схемы можно использовать за границей области фиктивные ячейки.

### 3 Результаты численных расчетов

**3.1.** Рассмотрим плоскосимметричную задачу обтекания эллипса под нулевым углом атаки вязким теплопроводным газом. Предполагаем, что поток симметричен относительно плоскости симметрии  $Oxz$  эллипса (см. Рис.2.2).

Введем в области декартову систему координат  $(x, y)$  и криволинейную ортогональную систему координат  $(x^1, x^2)$ .

Соответствие между координатами устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = x(x^1, x^2), \\ y = y(x^1, x^2) \end{cases}$$

При численном решении задачи будем рассматривать течение в ограниченной области, представляющей собой криволинейный четырехугольник (см. Рис.2.2). В системе координат  $(x^1, x^2)$  область течения представляет собой квадрат:

$$\Omega = \{(x^1, x^2) \mid 0 \leq x^1, x^2 \leq 1\}$$

Граница обтекаемого тела совпадает с координатной линией  $x^2 = 0$ , внешняя граница области совпадает с координатной линией  $x^2 = 1$  (см. Рис.2.2).

Размерные координаты границы обтекаемого тела задаются формулой:

$$\begin{cases} x = aL_0 \cos(\pi(1 - x^1)), \\ y = L_0 \sin(\pi x^1), \quad 0 \leq x^1 \leq 1 \end{cases}$$

Для построения сетки использовались методы работы [9]. Численно решалась задача нахождения отображения области  $D(x, y)$  в область  $\Omega(x^1, x^2)$ :  $x = x(x^1, x^2)$ ,  $y = y(x^1, x^2)$ . По найденным сеточным функциям  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  вычислялись коэффициенты Ламэ из разностного аналога формулы (1.6).

Начальные условия во всей области одинаковы и равны параметрам газа в набегающем потоке.

На границах области ставились следующие граничные условия. На твердом теле:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0$$

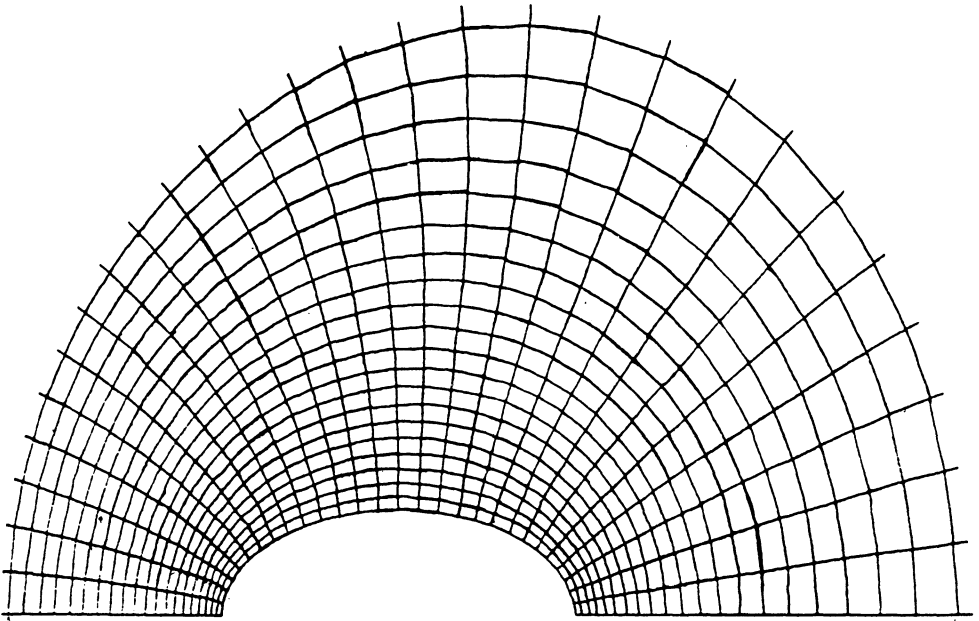


Рис. 3.1: Фрагмент использованной в расчете криволинейной сетки.

На плоскости симметрии:

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x^2} = 0$$

На "входе":

$$u_1 = M\sqrt{\gamma} \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{i}), \quad u_2 = -M\sqrt{\gamma} \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{i}), \quad \rho = 1, \quad T = 1.$$

"Вход" определяется условием:  $\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{i}) < 0$ , см. Рис.2.2. Здесь  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  - базис декартовой системы координат,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  - векторы базиса криволинейной системы координат.

На "выходе":

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0.$$

"Выход" определяется условием:  $\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{i}) \geq 0$ . Вообще говоря, постановка граничных условий на свободной границе области является самостоятельной задачей. Один из подходов к решению этой проблемы предложен в работах [19,20].

В качестве характерных значений  $\rho_0, T_0, M$  взяты значения плотности, температуры и числа Маха в невозмущенном набегающем потоке.

Число Рейнольдса определяется по формуле (1.26).

Для коэффициентов вязкости и теплопроводности будем использовать формулу Сатерленда:

$$\kappa(T) = \mu(T) = (T)^{3/2} \frac{1 + S_1}{T + S_1}, \quad S_1 = \frac{S}{T_0}, \quad S = 110 \text{ K}$$

В расчете задавались следующие параметры задачи:  $M = 2, Re = 10^3, Pr = 0.72, \gamma = 1.4, R = 286.91(J/kgK), a = 2$

Расчет по схеме (2.4)-(2.9) проводился методом установления.

Использовалась сетка с числом узлов  $N_1 = 31, N_2 = 31$ .

Расчет прекращался при выполнении условия:

$$\max \left\{ \max_{i,j} \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t}, \max_{i,j} \frac{(\rho u_1)_{i,j}^{n+1} - (\rho u_1)_{i,j}^n}{\Delta t}, \max_{i,j} \frac{(\rho u_2)_{i,j}^{n+1} - (\rho u_2)_{i,j}^n}{\Delta t}, \max_{i,j} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \right\} < \varepsilon$$

$\varepsilon = 10^{-4}$ . При таком значении  $\varepsilon$  невязка уменьшалась на пять порядков.

На рисунке 3.1 приведен фрагмент использованной в расчете сетки. На рисунках 3.2, 3.3 приведены изолинии плотности и температуры. На рисунке

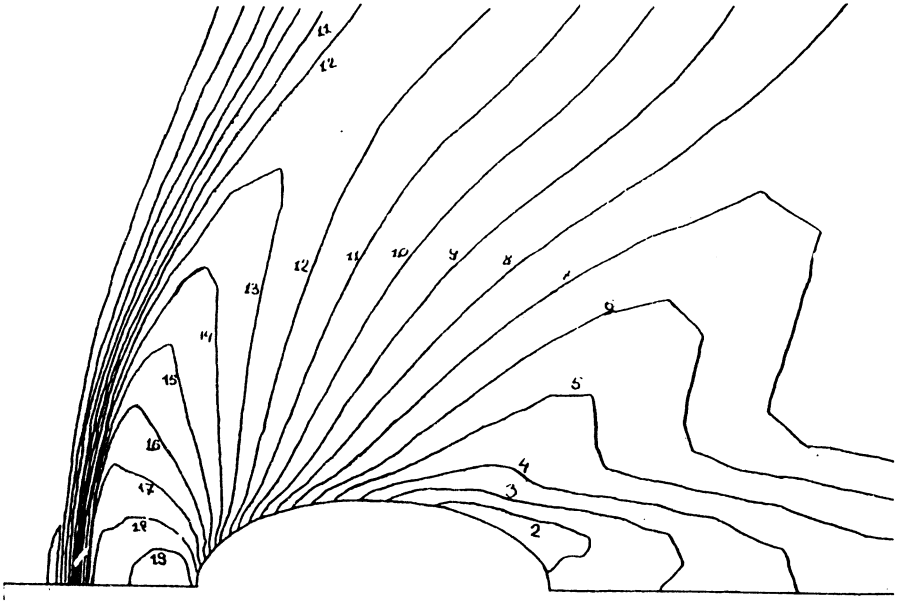


Рис. 3.2: Изолинии плотности. Изолинии расположены эквидистантно,  $\rho_1 = 0.48$ ,  $\rho_{20} = 2.95$ ,  $\Delta\rho = 0.13$ .

3.4 приведены распределения давления, плотности и температуры на поверхности обтекаемого тела в зависимости от длины дуги. Отсчет длины дуги ведется от носика эллипса. Приведено также значение тангенциальной составляющей скорости у поверхности тела (в узлах, отстоящих от поверхности тела на расстоянии половины пространственного шага).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена разностная схема с кинетически-согласованной искусственной вязкостью для расчета сверхзвуковых течений вязкого теплопроводного газа на криволинейных ортогональных сетках. Работоспособность схемы проверена путем решения задачи об обтекании эллипса. Расчеты выполнены на 32-х процессорной транспьютерной вычислительной системе.

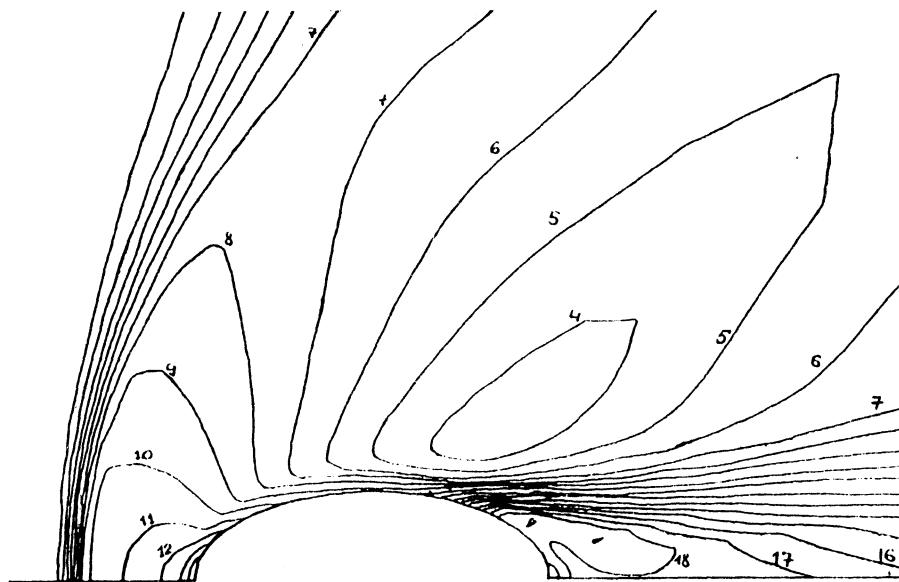


Рис. 3.3: Изолинии температуры. Изолинии расположены эквидистантно,  $T_1 = 1$ ,  $T_{20} = 2.41$ ,  $\Delta T = 0.074$ .

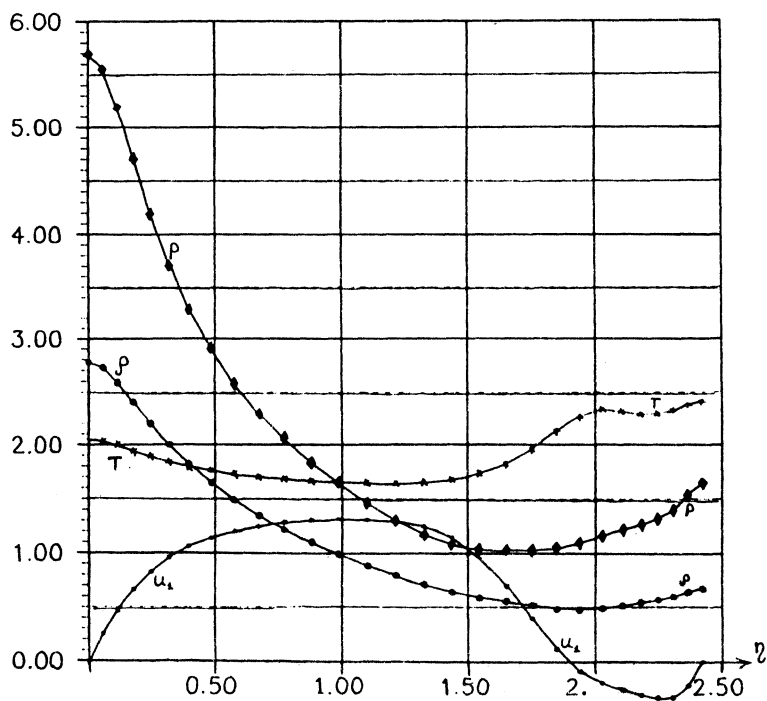


Рис. 3.4: Давление, плотность, температура на поверхности эллипса, тангенциальная компонента скорости  $u_t$  около поверхности эллипса. Координата  $\eta$  отсчитывается от носика эллипса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчинская М.И., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики // Препринт ИПМ АН СССР им.М.В.Келдыша.-1983, N 113, 12с.
2. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения// Препринт ИПМ АН СССР им.М.В.Келдыша. -1983, N144, 12с.
3. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Применение кинетического алгоритма для расчета газодинамических течений// Дифференциальные уравнения, 1985, том 21, N 7, с.1179-1185.
4. Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой// Математическое моделирование, 1989, том 1, N 1, с.15-23.
5. Антонов А.Н., Дуйсекулов А.Е., Елизарова Т.Г. О некоторых результатах решения задачи сверхзвукового вязкого обтекания обратного уступа, полученные на основе кинетически-согласованных схем// Препринт ИПМ АН СССР, 1988, N 165, 25с.
6. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н., Шерстов Ю.В. О некоторых результатах расчета сверхзвукового обтекания полого цилиндра, проведенного в рамках кинетически-согласованных разностных схем// Препринт ИПМ АН СССР, 1988, N 97, 22с.
7. Елизарова Т.Г., Цыпков С.В., Четверушкин Б.Н. О построении кинетически-согласованных разностных схем на криволинейных сетках// Препринт ИПМ АН СССР, 1989, N 8, 24с.
8. Елизарова Т.Г., Цыпков С.В., Четверушкин Б.Н. Получение инвариантных квазигазодинамических уравнений на основе кинетических моделей// Препринт ИПМ АН СССР, 1990, N 7, 24с.
9. Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Вычислительная генерация гранично-адаптивных сеток// Препринт ИПМ АН СССР им.М.В.Келдыша. -1988. N 158, 27 с.
10. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа// ЖВМ и МФ, 1988, N 11, т.28, с. 695-710.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 653 с.
12. Абалакин И.В., Дородницын Л.В., Елизарова Т.Г. Численное исследование задачи Блазиуса на основе кинетически-согласованных разностных схем// Препринт ИПМ АН СССР, 1987, N 163, 22 с.

13. *Граур И.А., Дородницын Л.В., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные разностные схемы с неполной коррекцией// Препринт ИПМ АН СССР, 1987, N 5.

14. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951, 426 с.

15. *Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н.* Об использовании разностных схем с кинетически-согласованной вязкостью для численного решения задач сверхзвукового вязкого обтекания на криволинейных ортогональных сетках// Препринт ВЦММ АН СССР, 1991, N 41.

16. *Дуйсекулов А.Е., Елизарова Т.Г.* Использование многопроцессорных вычислительных систем для реализации кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики// Матем.Модел., 1990, том 2, N 7, с.139-147.

17. *Бирюкова Л.Ю., Четверушкин Б.Н.* О возможности реализации квазигидродинамической модели полупроводниковой плазмы на многопроцессорных вычислительных системах// Матем.Модел., 1991, том 3, N 6, с.61-71.

18. *Семенова Т.А., Чайка А.С.* Многопроцессорная реализация газодинамического алгоритма на неортогональных сетках// Материалы семинара "Вычислительные системы на базе транспьютеров и параллельные вычисления".-М., 1992 ,с.-60-62.

19. *Цытков С.В.* Применение модели потенциального обтекания к постановке условий на внешней границе для уравнений Эйлера, часть I// Препринт ИПМ АН СССР, 1991, N 40, 25с.

20. *Софронов И.Л., Цытков С.В.* Применение модели потенциального обтекания к постановке условий на внешней границе для уравнений Эйлера, часть II// Препринт ИПМ АН СССР, 1991, N 41, 25с.

Поступила в редакцию

23.04.92