М. В. Коробков, Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай, *Сиб. матем. журн.*, 2000, том 41, номер 1, 118–133

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.2:517.51:517.98

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДАРБУ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

М. В. Коробков

Аннотация: Исследуются вопросы строения образа $\operatorname{Im} f'$ производной всюду дифференцируемого отображения $f : \Delta \to X$, где X — метризуемое локально выпуклое пространство и Δ — область пространства $\mathbb{R}^n$. Для этой цели вводится следующее понятие: множество $U \subset X$ называется *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup\limits_{t\in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \mathrm{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \mathrm{cl}\,\mathrm{co} U_{t_2} = \varnothing$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$. Доказана теорема о том, что образ $\operatorname{Im} f'$ производной вышеописанного отображения является слабо связным множеством в пространстве X^n. При наложении некоторых дополнительных условий установлена и обратная теорема, а именно: если G — непустой слабо связный компакт в пространстве Фреше X, который является к тому же локально слабо связным множеством, то тогда G есть образ производной некоторого дифференцируемого отображения $f : [0,1] \to X$. Специфику многомерного случая подчеркивает построенный пример дифференцируемой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, образ производной которой является вполне несвязным компактом. Библиогр. 2.

Работа посвящена изучению образа $\operatorname{Im} f'$ производной всюду дифференцируемого отображения $f : \Delta \to X$, где X — метризуемое локально выпуклое пространство и Δ — область (открытое связное множество) пространства $\mathbb{R}^n$. Главная цель работы заключается в отыскании необходимых и достаточных условий на множество $U \subset X^n$, с тем чтобы оно являлось образом производной такого рода отображения. В случае, когда $X = \mathbb{R}$ и $n = 1$, ответ на поставленный вопрос дает классическая теорема Дарбу, согласно которой образы производных дифференцируемых отображений $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ суть в точности связные подмножества $\mathbb{R}$. Однако если размерность пространства X больше 1, то охарактеризовать образ производной вектор-функции в терминах понятий связности не представляется возможным (здесь и далее под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии). Это подтверждает построенный в статье пример дифференцируемого отображения $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, образ производной которого является вполне несвязным компактом (теорема 4).

Удачным инструментом для исследования строения образа производной вектор-функции оказывается введенное в работе понятие слабой связности множеств в локально выпуклых метризуемых пространствах (см. определение 1), совпадающее для подмножеств $\mathbb{R}$ с понятием обычной связности. С помощью

Работа выполнена при содействии РФФИ–INTAS (код проекта IR–97–0170), РФФИ (код проекта 99–01–00517), государственной программы поддержки ведущих научных школ (код проекта 96–15–96291), а также программы «Соросовские студенты» (грант s98–1045).

понятия слабой связности в данной статье получено следующее обобщение теоремы Дарбу на многомерный случай: образ $\operatorname{Im} f'$ производной дифференцируемого отображения $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to X$ является слабо связным множеством в пространстве X^n (теорема 1).

Второй из основных результатов работы — теорема 2 — в определенном отношении представляет собой обращение теоремы 1 и состоит в утверждении о том, что если G — непустой слабо связный компакт в пространстве Фреше X, который является к тому же локально слабо связным множеством, то тогда G есть образ производной некоторого дифференцируемого отображения $f : [0,1] \to X$.

Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Всюду в дальнейшем d_X — метрика на пространстве X, $\|x\|$ — норма вектора x (для векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ будем также использовать обозначение $|x|$), $B(x,r)$ — открытый шар радиуса r с центром в x. Расстояние $d_X(A,B)$ между подмножествами A, B метрического пространства X будем определять по формуле

$$d_X(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d_X(a,b).$$

Для подмножества U топологического векторного пространства X $\operatorname{cl} U$ означает замыкание U, $\operatorname{int} U$ — внутренность U, ∂U — границу U, $\operatorname{co} U$ — выпуклую оболочку множества U.

Если U — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то символом $|U|$ будем обозначать меру Лебега множества U.

Отображение $f : \Delta \to X$ в топологическое векторное пространство X области Δ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $y_0 \in \Delta$, если f можно представить в виде

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + |y - y_0|\alpha(y),$$

где $f'(y_0)$ есть линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в X и $\alpha(y) \to 0$ при $y \to y_0$. Отображение называется *дифференцируемым*, если оно дифференцируемо в каждой точке своей области определения. В дальнейшем пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в X отождествляется естественным образом с пространством X^n, так что для $y \in \Delta$ считаем

$$f'(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^n}\right) \in X^n.$$

Пространство X^n наделяем естественной топологией произведения.

Излагаемые ниже результаты справедливы как для вещественных, так и для комплексных линейных пространств. Определяющую роль в рассматриваемых вопросах играет вещественная структура пространства.

Определение 1. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Множество $U \subset X$ называется *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup_{t\in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \operatorname{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_2} = \varnothing$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$.

Множества U_1, U_2, для которых $U_1 \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_2 = \varnothing$ и $U_2 \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_1 = \varnothing$, мы будем называть в дальнейшем *сильно отделимыми*.

Отметим некоторые свойства введенных понятий:

1) всякое связное множество слабо связно;

2) замыкание слабо связного множества слабо связно;

3) пусть $(U_t)_{t\in T}$ — семейство слабо связных множеств, причем существует такое $t_0 \in T$, что для любого $t \in T$ множества U_{t_0} и U_t не являются сильно отделимыми; тогда объединение $\bigcup\limits_{t\in T} U_t$ слабо связно;

4) образ слабо связного множества при непрерывном линейном отображении является слабо связным множеством;

5) компактное множество K является слабо связным в том и только том случае, когда его нельзя представить в виде объединения конечного семейства попарно сильно отделимых не совпадающих со всем K множеств;

6) для подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ понятия слабой связности и связности эквивалентны.

Свойства 1–5 вытекают непосредственно из определения 1. Докажем свойство 6. Ввиду 1 достаточно доказать, что всякое несвязное множество $U \subset \mathbb{R}$ не является слабо связным. Действительно, пусть $U \subset \mathbb{R}$ несвязно. Тогда U не является выпуклым, т. е. существует число $x \notin U$ такое, что множества $U_1 = U \cap (-\infty, x)$ и $U_2 = U \cap (x, \infty)$ не пусты. Очевидно, $U = U_1 \cup U_2$, $U_i \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_j = \varnothing$ при $i \neq j$. В соответствии с определением 1 множество U не является слабо связным.

Теорема 1 (обобщенная теорема Дарбу). *Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство, и пусть $f : \Delta \to X$ — дифференцируемое отображение в X области Δ пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда образ $\operatorname{Im} f'$ производной отображения f является слабо связным множеством в пространстве X^n.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы 1 неверно. Тогда имеет место разложение $\operatorname{Im} f' = \bigcup\limits_{t\in T} U_t$, где $U_t \neq \operatorname{Im} f'$, $U_t \cap \operatorname{cl}(\operatorname{Im} f' \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_2} = \varnothing$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$. Положим $V_t = \operatorname{int} {f'}^{-1}(U_t)$ и $J = \Delta \setminus (\bigcup\limits_{t\in T} V_t)$. Так как Δ — связное множество и $V_t \neq \Delta$ ни для одного $t \in T$, то $J \neq \varnothing$. Функция f' является функцией 1-го класса Бэра. По теореме Бэра ввиду того, что J замкнуто в Δ, существует точка $y_0 \in J$, в которой сужение $f'|_J$ непрерывно (мы полагаем, как это и принято, что отображение непрерывно во всякой изолированной точке области определения). Из представления $\operatorname{Im} f' = \bigcup\limits_{t\in T} U_t$ вытекает, что $f'(y_0) \in U_{t_0}$ для некоторого $t_0 \in T$. Равенство $U_{t_0} \cap \operatorname{cl}(\operatorname{Im} f' \setminus U_{t_0}) = \varnothing$ эквивалентно открытости множества U_{t_0} относительно $\operatorname{Im} f'$. В силу непрерывности $f'|_J$ в точке y_0 найдется число $\delta > 0$, удовлетворяющее следующему условию: $f'(y) \in U_{t_0}$, если $y \in J$ и $|y - y_0| < \delta$. Таким образом, имеем включение

$$f'(\widetilde{J}) \subset U_{t_0}, \tag{1}$$

где $\widetilde{J} = J \cap B(y_0, \delta)$. При этом мы полагаем δ столь малым, что $B(y_0, \delta) \subset \Delta$. Так как $y_0 \in J$, то $y_0 \notin V_{t_0}$. Поэтому существуют точка $y_1 \in B(y_0, \delta)$ и индекс $t_1 \in T$, $t_1 \neq t_0$, для которых имеет место соотношение $f'(y_1) \in U_{t_1}$. Ввиду (1) $y_1 \notin \widetilde{J}$, поэтому $y_1 \in V_{t_1}$. Отсюда следует, что открытое множество $\widetilde{V}_{t_1} = V_{t_1} \cap B(y_0, \delta)$ непусто. Тем самым в силу определения множества J и свойств семейства $(V_t)_{t\in T}$ нетрудно убедиться в том, что $\varnothing \neq B(y_0, \delta) \cap \partial \widetilde{V}_{t_1} \subset \widetilde{J}$. Выберем точку $w \in \widetilde{V}_{t_1}$ такую, что расстояние от w до граничной сферы шара $B(y_0, \delta)$ больше расстояния от w до $\widetilde{J}$. Рассмотрим шар $B(w, r)$ радиуса $r =$

$d_{\mathbb{R}^n}(w, \widetilde{J})$. Из выбора w следуют соотношения $B(w,r) \subset \widetilde{V}_{t_1}$, $\operatorname{cl} B(w,r) \cap \widetilde{J} \neq \varnothing$. Возьмем $z \in \operatorname{cl} B(w,r) \cap \widetilde{J}$. Очевидно, z лежит на граничной сфере шара $B(w,r)$. Из условия $U_{t_0} \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_1} = \varnothing$ и (1) получаем, что $f'(z) \notin \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_1}$. По теореме Хана — Банаха существуют вещественно линейный непрерывный функционал $h \in (X^n_{\mathbb{R}})'$ и число γ такие, что

$$h(f'(z)) < \gamma, \tag{2}$$

$$h(x) \geq \gamma$$

для всех $x \in U_{t_1}$. В частности,

$$h(f'(y)) \geq \gamma, \quad y \in B(w,r). \tag{3}$$

Функционал h можно представить в виде

$$h(x) = h(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x^i),$$

где $h_i \in (X_{\mathbb{R}})'$. Это позволяет нам придать неравенствам (2) и (3) следующую форму:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(z)\right) < \gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} h_i\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(y)\right) \geq \gamma, \quad y \in B(w,r).$$

Рассматривая, наконец, всюду дифференцируемое отображение

$$g = (g^1, \dots, g^n) : \Delta \to \mathbb{R}^n,$$

определяемое формулами $g^i(y) = h_i(f(y))$ (очевидно, $\frac{\partial g^i}{\partial y^j}(y) = h_i\big(\frac{\partial f}{\partial y^j}(y)\big)$ для $y \in \Delta$), мы приходим к соотношениям

$$\operatorname{div} g(z) < \gamma, \tag{2$'$}$$

$$\operatorname{div} g(y) \geq \gamma, \quad y \in B(w,r). \tag{3$'$}$$

Из (3′) вытекает, что для любого n-мерного куба $Q \subset B(w,r)$ выполняется неравенство

$$\int_{\partial Q} g(y) \cdot \mathbf{n}\, dS \geq \gamma |Q|. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{n}$ обозначает вектор внешней нормали к ∂Q. В том случае, когда производная g' является интегрируемой по Лебегу, неравенство (4) прямо следует из формулы Гаусса — Остроградского. Доказательство (4) в общем случае проводится достаточно стандартными приемами (предполагая, что (4) неверно для некоторого куба Q, лежащего в шаре $B(w,r)$, заключаем, что (4) не выполняется по крайней мере для одного из 2^n вложенных в Q кубов, возникающих в результате разбиения Q гиперплоскостями, проходящими через его центр параллельно координатным гиперплоскостям, и т. д.). Обозначим через $l(Q)$ длину ребра n-мерного куба Q. Рассмотрим последовательность кубов $Q_k \subset B(w,r) \cap B(z, \frac{1}{k})$, удовлетворяющих неравенству

$$l(Q_k) \geq \frac{c}{k}$$

с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от k (возможность построения такой последовательности очевидна). Из свойств Q_k следует, что точки $y \in Q_k$ удовлетворяют условию

$$|y - z| < \frac{l(Q_k)}{c}. \tag{5}$$

Так как g дифференцируемо в точке z, то

$$g(y) = g(z) + g'(z)(y - z) + |y - z|\alpha(y),$$

где $\alpha(y) \to 0$ при $y \to z$. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{c(\gamma - \operatorname{div} g(z))}{2n}. \tag{6}$$

Ввиду $(2')$ ε_1 положительно. Возьмем достаточно большое число k_1, для которого $|\alpha(y)| < \varepsilon_1$ при $|y - z| < \frac{1}{k_1}$. Тогда вследствие включения $Q_{k_1} \subset B(z, \frac{1}{k_1})$ справедливо неравенство

$$|\alpha(y)| < \varepsilon_1, \quad y \in Q_{k_1}. \tag{7}$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, а также учитывая (5)–(7), имеем

$$\int\limits_{\partial Q_{k_1}} g(y) \cdot \mathbf{n}\, dS_y = \int\limits_{\partial Q_{k_1}} (g(z) + g'(z)(y - z)) \cdot \mathbf{n}\, dS_y + \int\limits_{\partial Q_{k_1}} |y - z|\alpha(y) \cdot \mathbf{n}\, dS_y$$
$$< \operatorname{div} g(z)|Q_{k_1}| + \int\limits_{\partial Q_{k_1}} \frac{l(Q_{k_1})}{c}\varepsilon_1\, dS_y = \operatorname{div} g(z)|Q_{k_1}| + \frac{2n\varepsilon_1|Q_{k_1}|}{c} = \gamma|Q_{k_1}|,$$

что противоречит неравенству (4). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Ввиду свойства 6 слабо связных множеств теорема 1 при $n = 1$ и $X = \mathbb{R}$ представляет собой упомянутую теорему Дарбу.

Замечание 2. Из теоремы 1 легко следует, что график отображения $f' : \Delta \to X^n$ также является слабо связным множеством в пространстве $\mathbb{R}^n \times X^n$.

Определение 2. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Множество $U \subset X$ называется *локально слабо связным*, если для любых точки $x \in U$ и ее окрестности V существуют слабо связное множество W и окрестность V_1 этой точки такие, что

$$V_1 \cap U \subset W \subset V \cap U.$$

Следующая теорема показывает, что при наложении некоторых дополнительных условий теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. *Если непустой слабо связный компакт G пространства Фреше X является к тому же локально слабо связным множеством, то существует такое дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \to X$, что $\operatorname{Im} f' = G$.*

Доказательство. **1.** Рассмотрим сначала случай, когда пространство X банахово. Основными этапами доказательства теоремы 2 для этой ситуации являются нижеследующие леммы 1–5. При этом теорема 2 непосредственно следует из лемм 4 и 5, а леммы 1–3 используются для доказательства леммы 4.

Лемма 1. *Пусть G — ограниченное слабо связное множество в X. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой пары a, b элементов из G и произвольного набора числовых параметров α, β, δ таких, что $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество $E \subset [\alpha, \beta]$ и функция $g : E \to X$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\alpha, \beta \in E$, E — совершенное множество; для множества $V = [\alpha, \beta] \setminus E$ имеет место $|V| < \delta$, в точках x второго рода множества E $\rho_V(x) = 0$, а в точках первого рода множества E соответствующая односторонняя плотность V равна 0;

2) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ и $\operatorname{Im} g \subset G$; если (α_i, β_i) есть смежный интервал E, то $\|g(\alpha_i) - g(\beta_i)\| \le \varepsilon$; наконец, g интегрируема, причем функция

$$h(x) = \int\limits_{[\alpha,x]\cap E} g(y)\,dy$$

имеет во всех точках x второго рода множества E производную, равную $g(x)$, а в точках x первого рода множества E отображение h имеет соответствующую одностороннюю производную, совпадающую с $g(x)$.

Замечание 3. В формулировке леммы 1 и далее в статье используется следующая общепринятая терминология. Символом $\rho_V(x)$ обозначается плотность (измеримого) множества $V \subset \mathbb{R}$ в точке x, т. е. величина

$$\lim_{r\to 0} \frac{|V \cap (x-r, x+r)|}{2r}.$$

Аналогично определяются правая и левая плотности, обозначаемые соответственно через $\rho_V^r(x)$ и $\rho_V^l(x)$. Интеграл от банаховозначных функций, а также их измеримость и интегрируемость понимаются в смысле Бохнера. Наконец, точка x совершенного множества E называется точкой первого рода, если она является концом некоторого интервала из $\mathbb{R} \setminus E$, остальные точки множества E называются точками второго рода.

Доказательство леммы 1. Если для пары элементов a, b из G и фиксированного набора чисел $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ таких, что $\varepsilon > 0$, $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество E и функция g, удовлетворяющие условиям 1, 2 доказываемой леммы, то мы будем обозначать их символами $E^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ и $g^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ соответственно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Введем на G отношение $\sim_\varepsilon$, полагая $a \sim_\varepsilon b$ тогда и только тогда, когда для любого набора чисел α, β, δ, $\alpha < \beta, \delta > 0$ существуют множество $E^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ и функция $g^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ (т. е. когда для пары a, b выполняются условия леммы 2 с данным ε). Легко видеть, что $\sim_\varepsilon$ есть отношение эквивалентности. Чтобы доказать рефлексивность, достаточно заметить, что для $a \in G$ множество $E^{\varepsilon aa}_{\alpha\beta\delta} = [\alpha, \beta]$ и функция $g^{\varepsilon aa}_{\alpha\beta\delta}(x) \equiv a$ на $[\alpha, \beta]$ действительно удовлетворяют условиям 1, 2. Если $a \sim_\varepsilon b$, то полагаем $E^{\varepsilon ba}_{\alpha\beta\delta} = -E^{\varepsilon ab}_{-\beta-\alpha\delta}$ и $g^{\varepsilon ba}_{\alpha\beta\delta}(x) = g^{\varepsilon ab}_{-\beta-\alpha\delta}(-x)$, тем самым устанавливая симметричность. Наконец, отношение $\sim_\varepsilon$ транзитивно, так как если $a \sim_\varepsilon b$ и $b \sim_\varepsilon c$, то, рассматривая произвольный набор параметров α, β, δ, $\alpha < \beta$, $\delta > 0$, и выбирая числа α_1, β_1 такие, что $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, $\beta - \beta_1 + \alpha_1 - \alpha < \delta$, в качестве искомых множества $E^{\varepsilon ac}_{\alpha\beta\delta}$ и функции $g^{\varepsilon ac}_{\alpha\beta\delta}$ можно взять $E^{\varepsilon ac}_{\alpha\beta\delta} = E^{\varepsilon ab}_{\alpha\alpha_1 1} \cup [\alpha_1, \beta_1] \cup E^{\varepsilon bc}_{\beta_1\beta 1}$ и

$$g^{\varepsilon ac}_{\alpha\beta\delta}(x) = \begin{cases} g^{\varepsilon ab}_{\alpha\alpha_1 1}(x), & x \in E^{\varepsilon ab}_{\alpha\alpha_1 1}, \\ g^{\varepsilon bc}_{\beta_1\beta 1}(x), & x \in E^{\varepsilon bc}_{\beta_1\beta 1}, \\ b, & x \in [\alpha_1, \beta_1]. \end{cases}$$

Обозначим семейство классов эквивалентностей по $\sim_\varepsilon$ через $(G_t)_{t\in T}$.

Пусть $a,b\in G$ и $\|a-b\|\le\varepsilon$. Тогда $a\sim_\varepsilon b$. В самом деле, если α,β,δ таковы, что $\alpha<\beta$, $\delta>0$, а числа α_1, β_1 удовлетворяют условиям $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$, $\beta_1-\alpha_1<\delta$, то в качестве множества $E^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ и функции $g^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}(x)$ возьмем $E^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}=[\alpha,\alpha_1]\cup[\beta_1,\beta]$ и

$$g^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}(x)=\begin{cases} a, & x\in[\alpha,\alpha_1];\\ b, & x\in[\beta_1,\beta].\end{cases}$$

Корректность построения, т. е. выполнение условий 1, 2 леммы 1, очевидна. Из доказанного свойства отношения $\sim_\varepsilon$ следует, что расстояние между различными классами эквивалентности не меньше ε, что означает выполнение для каждого класса эквивалентности G_t условия

$$G_t\cap \mathrm{cl}(G\setminus G_t)=\varnothing. \tag{8}$$

Установим теперь, что для двух различных классов эквивалентности G_{t_1} и G_{t_2} справедливо соотношение

$$G_{t_1}\cap \mathrm{cl}\,\mathrm{co}G_{t_2}=\varnothing. \tag{9}$$

С целью упрощения изложения мы докажем более слабое равенство $G_{t_1}\cap\mathrm{co}G_{t_2}=\varnothing$; полное доказательство соотношения (9) проводится аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями. Пусть $b\in G\cap\mathrm{co}G_{t_2}$. Это означает, что существуют $a_i\in G_{t_2}$, $i=1,\dots,k$, и числа $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,k$, $\lambda_i\ge0$, $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i a_i=b\in G$. Установим эквивалентность $a_1\sim_\varepsilon b$. В самом деле, нетрудно показать, что для всякого набора параметров α,β,δ, $\alpha<\beta$, $\delta>0$ существует система интервалов $\left(w^i_j,z^i_j\right)$, $i=1,\dots,k$, $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\alpha=w^1_1<z^1_1<w^2_1<z^2_1<\dots<w^k_1<z^k_1<w^1_2<z^1_2<w^2_2<z^2_2<w^3_2<\dots$, $\lim\limits_{j\to\infty}w^i_j=\lim\limits_{j\to\infty}z^i_j=\beta_1<\beta$, $\beta_1-\alpha<\delta$;

2) для $A_i=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}\left[w^i_j,z^i_j\right]$ имеет место равенство $\rho^l_{A_i}(\beta_1)=\lambda_i$.

Из эквивалентностей $a_i\sim_\varepsilon a_j$ вытекает существование множеств $E^{\varepsilon a_i a_{i+1}}_{z^i_j w^{i+1}_j 1}$ при $i<k$, $E^{\varepsilon a_k a_1}_{z^k_j w^1_{j+1} 1}$ и соответствующих функций $g^{\varepsilon a_i a_{i+1}}_{z^i_j w^{i+1}_j 1}$, $g^{\varepsilon a_k a_1}_{z^k_j w^1_{j+1} 1}$.

Положим

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\quad E=A\cup[\beta_1,\beta]\cup\Bigl(\bigcup_{j\in\mathbb{N},i<k}E^{\varepsilon a_i a_{i+1}}_{z^i_j w^{i+1}_j 1}\Bigr)\cup\Bigl(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}E^{\varepsilon a_k a_1}_{z^k_j w^1_{j+1} 1}\Bigr),$$

$$g(x)=\begin{cases} a_i, & x\in A_i;\\ g^{\varepsilon a_i a_{i+1}}_{z^i_j w^{i+1}_j 1}(x), & x\in E^{\varepsilon a_i a_{i+1}}_{z^i_j w^{i+1}_j 1},\ i<k;\\ g^{\varepsilon a_k a_1}_{z^k_j w^1_{j+1} 1}(x), & x\in E^{\varepsilon a_k a_1}_{z^k_j w^1_{j+1} 1};\\ b, & x\in[\beta_1,\beta].\end{cases}$$

Проверим, что E и g действительно удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 для пары элементов a_1,b с введенными выше параметрами α, β, δ, т. е. что $E=E^{\varepsilon a_1 b}_{\alpha\beta\delta}$ и $g=g^{\varepsilon a_1 b}_{\alpha\beta\delta}$. Замкнутость множества E и отсутствие у него изолированных точек, интегрируемость g, выполнение условий $|V|<\delta$ $(V=[\alpha,\beta]\setminus E)$, $g(\alpha)=$

a_1, $g(\beta) = b$ и $\operatorname{Im} g \subset G$ устанавливаются легко. Если (α_i, β_i) — смежный интервал E, то (α_i, β_i) — смежный интервал области определения одной из вспомогательных функций, использованных в построении g. Так как разность значений вспомогательной функции на концах такого интервала не превосходит ε, то и $\|g(\alpha_i) - g(\beta_i)\| \le \varepsilon$. Пусть, далее, x — точка первого рода множества E. Тогда либо $x = \alpha$, либо $x = \beta$ (в этих точках проверка условий тривиальна), либо x есть точка первого рода области определения одной из вспомогательных функций. Выполнение условий на E и g в такой точке автоматически следует из выполнения условий леммы для данной функции. Проверка условий в точках второго рода, не равных β_1, также проста. Осталось рассмотреть теперь точку β_1. Так как $[\beta_1, \beta] \subset E$, $g|_{[\beta_1,\beta]}(x) \equiv b$, то $\rho^r_V(\beta_1) = 0$ и производная справа функции

$$h(x) = \int\limits_{[\alpha,x]\cap E} g(y)\,dy$$

в точке β_1 равна b. Ввиду того, что множества A_i не пересекаются, для $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ имеем

$$\rho^l_A(\beta_1) = \sum_{i=1}^{k} \rho^l_{A_i}(\beta_1) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \rho^l_V(\beta_1) \le \rho^l_{[\alpha,\beta]\setminus A}(\beta_1) = 1 - \rho^l_A(\beta_1) = 0,$$

т. е. $\rho^l_V(\beta_1) = 0$. При $\Delta x > 0$ получаем

$$\frac{h(\beta_1) - h(\beta_1 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\int\limits_{A_1\cap[\beta_1-\Delta x,\beta_1]} g(y)\,dy + \dots + \int\limits_{A_k\cap[\beta_1-\Delta x,\beta_1]} g(y)\,dy}{\Delta x}$$
$$+ \frac{\int\limits_{E\cap[\beta_1-\Delta x,\beta_1]\setminus A} g(y)\,dy}{\Delta x} = \frac{a_1|A_1 \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]| + \dots + a_k|A_k \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]|}{\Delta x}$$
$$+ \frac{\gamma(\Delta x)|E \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1] \setminus A|}{\Delta x} \to \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = b$$

($\gamma(\Delta x)$ — некоторый вектор из X, причем $\|\gamma(\Delta x)\| \le \sup\limits_{y\in G} \|y\| < \infty$ по условию леммы), откуда левая производная функции h в β_1 существует и равна b. Итак, $\rho_V(\beta_1) = 0$, $h'(\beta_1) = b = g(\beta_1)$. Таким образом, построенные множество E и функция g действительно удовлетворяют условиям 1, 2 леммы, можно записать это в виде $E = E^{\varepsilon a_1 b}_{\alpha\beta\delta}$, $g = g^{\varepsilon a_1 b}_{\alpha\beta\delta}$. Ввиду произвольности выбора параметров α, β, δ эквивалентность $a_1 \sim_\varepsilon b$ доказана. Но тогда b лежит в том же классе эквивалентности, что и a_1, т. е. $b \in G_{t_2}$. Тем самым установлено включение $G \cap \operatorname{co} G_{t_2} \subset G_{t_2}$. Отсюда сразу получаем требуемое равенство: $G_{t_1} \cap \operatorname{co} G_{t_2} = G_{t_1} \cap G \cap \operatorname{co} G_{t_2} \subset G_{t_1} \cap G_{t_2} = \varnothing$.

Таким образом, мы имеем представление G в виде $G = \bigcup\limits_{t\in T} G_t$, причем в соответствии с (8) и (9) $G_t \cap \operatorname{cl}(G \setminus G_t) = \varnothing$ и $G_{t_1} \cap \operatorname{cl} \operatorname{co} G_{t_2} = \varnothing$ при $t_1 \ne t_2$. Так как G слабо связное множество, существует только один, совпадающий со всем G, класс эквивалентности. Другими словами, $a \sim_\varepsilon b$ для каждой пары a, b из G. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Предположим, что непустой слабо связный компакт $G \subset X$ является локально слабо связным множеством. Тогда существует неубывающая функция $\psi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ такая, что*

1) $\psi(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to 0$;

2) для любой пары a, b элементов из G существует слабо связный компакт $G_1 \subset G$ такой, что $a, b \in G_1$ и $\operatorname{diam} G_1 \le \psi(\|a-b\|)$.

Лемма 2 сразу вытекает из определения 2 и общих свойств компактных множеств.

Прямым следствием лемм 1 и 2 является

Лемма 3. *Пусть непустой слабо связный компакт $G \subset X$ является к тому же локально слабо связным множеством. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой пары a, b элементов из G и произвольного набора числовых параметров α, β, δ таких, что $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество $E \subset [\alpha, \beta]$ и функция $g : E \to X$, удовлетворяющие условиям 1, 2 леммы 1 с рассмотренными сейчас параметрами, причем $\operatorname{diam} \operatorname{Im} g \le \psi(\|a-b\|)$, где ψ — функция, определенная в лемме 2.*

Сохраним обозначения $E^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ и $g^{\varepsilon ab}_{\alpha\beta\delta}$ для множества E и функции g, описанных в лемме 3.

Лемма 4. *Если непустой слабо связный компакт $G \subset X$ локально слабо связен, то для любой пары a, b элементов из G существует такое дифференцируемое отображение $h : [0,1] \to X$, что $h'(0) = a$, $h'(1) = b$ и $\operatorname{Im} h' \subset G$ (через $h'(0)$ и $h'(1)$ мы обозначили соответствующие односторонние производные).*

Доказательство. Будем искать требуемую функцию h в виде интеграла

$$h(x) = \int_0^x g(y)\, dy,$$

причем $h'(x) \equiv g(x)$. Функция $g : [0,1] \to X$ будет по индукции определяться на некоторой последовательности расширяющихся множеств E_i, объединение которых E окажется множеством полной меры, а затем мы доопределим g на всем отрезке $[0,1]$ по непрерывности.

Возьмем последовательность $\varepsilon_i > 0$, элементы которой удовлетворяют неравенству

$$\psi(\varepsilon_i) \le \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^{i+1}}. \tag{10}$$

Построим по индукции множества E_i и функции $g_i : E_i \to X$ такие, что $E_i \subset E_{i+1}$ и $g_i = g_{i+1}|_{E_i}$, причем E_i и g_i удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 для рассматриваемой пары элементов a, b с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = \frac{1}{2^i}$; кроме того, для каждого смежного интервала $\left(\alpha^j_k, \beta^j_k\right)$ множества E_j при $j < i$ выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} g_i\big(E_i \cap \left(\alpha^j_k, \beta^j_k\right)\big) \le \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^j} + \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^{j+1}} + \dots + \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^{i-1}}. \tag{11}$$

Сделаем первый шаг построения. Положим $E_1 = E^{\varepsilon_1 ab}_{01\frac{1}{2}}$, $g_1 = g^{\varepsilon_1 ab}_{01\frac{1}{2}}$.

Совершим шаг индукции. Пусть на i-м этапе мы определили множества $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_i$ и функции $g_j : E_j \to X$, $j = 1, \dots, i$, $g_j = g_{j+1}|_{E_j}$ для $j < i$, которые удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_j$,

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\delta = \frac{1}{2^j}$, и для любого смежного интервала $\left(\alpha_k^j, \beta_k^j\right)$ множества E_j при $j < i$ справедливо неравенство (11). Рассмотрим семейство смежных интервалов $\left(\alpha_k^i, \beta_k^i\right)$ множества E_i. Положим

$$\delta_k^i = \frac{\beta_k^i - \alpha_k^i}{2}, \quad a_k^i = g_i\big(\alpha_k^i\big), \quad b_k^i = g_i\big(\beta_k^i\big),$$

$$E_i^k = E_{\alpha_k^i \beta_k^i \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i}, \quad E_{i+1} = E_i \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_i^k\right),$$

$$g_{i+1}(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in E_i; \\ g_{\alpha_k^i \beta_k^i \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i}(x), & x \in E_i^k. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $E_i \subset E_{i+1}$, $g_i = g_{i+1}|_{E_i}$, причем E_{i+1} и g_{i+1} также удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_{i+1}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = \frac{1}{2^{i+1}}$. Установим, например, что

$$|V_{i+1}|(= |[0,1] \setminus E_{i+1}|) < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Действительно, имеем

$$V_{i+1} \subset V_i, \quad V_{i+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(V_{i+1} \cap \big(\alpha_k^i, \beta_k^i\big)\big),$$

$$|V_{i+1}| = \sum_{k=1}^{\infty} \big|V_{i+1} \cap \big(\alpha_k^i, \beta_k^i\big)\big| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^i - \alpha_k^i}{2} = \frac{|V_i|}{2} < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Отметим также, что по индукционному предположению

$$\big\|a_k^i - b_k^i\big\| = \big\|g_i\big(\alpha_k^i\big) - g_i\big(\beta_k^i\big)\big\| \le \varepsilon_i,$$

а значит, в соответствии с (10) и леммой 3

$$\operatorname{diam} g_{i+1}\big(E_i^k\big) = \operatorname{diam} \operatorname{Im} g_{\alpha_k^i \beta_k^i \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i} \le \psi(\varepsilon_i) \le \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^{i+1}}.$$

Поэтому, учитывая справедливость в силу индукционного предположения неравенства (11) для E_i и g_i, при $j < i+1$ для любого смежного интервала $\left(\alpha_k^j, \beta_k^j\right)$ множества E_j получаем неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} g_{i+1}\big(E_{i+1} \cap \big(\alpha_k^j, \beta_k^j\big)\big) &\le \operatorname{diam} g_i\big(E_i \cap \big(\alpha_k^j, \beta_k^j\big)\big) + 2 \sup_{E_i^l \subset (\alpha_k^j, \beta_k^j)} \operatorname{diam} g_{i+1}\big(E_i^l\big) \\ &\le \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^j} + \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^{j+1}} + \dots + \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^i}, \end{aligned}$$

что означает выполнение (11) для построенных на данном шаге множества E_{i+1} и функции g_{i+1}. Построение завершено.

На множестве $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ определим функцию $\tilde{g} : E \to X$, приняв $\tilde{g}(x) = g_i(x)$ для $x \in E_i$. Очевидно, $\tilde{g}$ определена почти всюду на $[0,1]$ и является интегрируемой.

Пусть $x \in [0,1] \setminus E$. Покажем, что существует $\lim\limits_{E \ni y \to x} \tilde{g}(y)$. Для произвольного $\varkappa > 0$ возьмем $i_\varkappa$ такое, что

$$\sum_{j=i_\varkappa}^{\infty} \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^j} < \varkappa.$$

Так как $x \notin E_{i_\varkappa}$, то $x \in \big(\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa}\big)$ для некоторого смежного интервала $(\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa})$ множества $E_{i_\varkappa}$. Вследствие (11)

$$\operatorname{diam} \tilde g\big(E \cap \big(\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa}\big)\big) < \sum_{j=i_\varkappa}^{\infty} \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^j} < \varkappa.$$

Ввиду произвольности $\varkappa > 0$ функция $\tilde g$ действительно имеет предел в x.

Определим новую функцию $g : [0,1] \to X$ по правилу

$$g(x) = \begin{cases} \tilde g(x), & x \in E; \\ \lim\limits_{E \ni y \to x} \tilde g(y), & x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$$

Так как функция g совпадает с $\tilde g$ почти всюду на $[0,1]$, то g интегрируема. Обозначим

$$h_i(x) = \int\limits_{E_i \cap [0,x]} g_i(y)\,dy, \quad h(x) = \int\limits_0^x g(y)\,dy.$$

Докажем, что отображение h всюду дифференцируемо и для всех $x \in [0,1]$

$$h'(x) = g(x). \tag{12}$$

При $x \in [0,1] \setminus E$ это сразу же следует из непрерывности g в x. Пусть $x \in E$, т. е. $x \in E_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Справедливо разложение

$$h(z) = h_i(z) + \int\limits_{V_i \cap [0,z]} g(y)\,dy.$$

Пусть x — точка второго рода множества E_i. Тогда в силу того, что функция g_i удовлетворяет условию 2 леммы 1 с соответствующими параметрами, первое слагаемое имеет в точке x производную $h_i'(x) = g_i(x) = g(x)$. Производная второго слагаемого в x существует и равна 0 вследствие ограниченности g и того факта, что $\rho_{V_i}(x) = 0$ (см. условие 1 леммы 1). Для $x = 0$ и $x = 1$ рассуждения аналогичны. Наконец, если $x \neq 0, 1$ и x — точка первого рода множества E_i, то из построения E_{i+1} вытекает, что x есть точка второго рода множества E_{i+1}, т. е. этот случай сводится к предыдущему. Тождество (12) доказано. Учитывая, что $g(0) = a$, $g(1) = b$ и $\operatorname{Im} g \subset G$, мы приходим к заключению, что лемма 4 также доказана.

Завершающим этапом доказательства теоремы 2 для банаховых пространств является следующая лемма (которая представляет и самостоятельный интерес).

Лемма 5. *Пусть компакт $G \subset X$ таков, что для любой пары a, b элементов из G существует дифференцируемое отображение $h : [0,1] \to X$, удовлетворяющее условиям $h'(0) = a$, $h'(1) = b$ и $\operatorname{Im} h' \subset G$. Тогда существует такое дифференцируемое отображение $f : [0,1] \to X$, что $\operatorname{Im} f' = G$.*

Доказательство. Пусть компакт G удовлетворяет предположениям леммы 5. Отсюда с очевидностью следует, что для любой пары a, b элементов из G и невырожденного отрезка $[\alpha, \beta]$ существует интегрируемое отображение $\tilde g : [\alpha, \beta] \to X$ со следующими свойствами: $\tilde g(\alpha) = a$, $\tilde g(\beta) = b$ и $\operatorname{Im} \tilde g \subset G$, причем

$$\left(\int\limits_\alpha^x \tilde g(y)\,dy\right)' \equiv \tilde g(x).$$

Описанное отображение обозначим через $g_{\alpha\beta}^{ab}$.

Возьмем совершенное канторово множество K на отрезке $[0,1]$. По теореме Александрова, так как G есть метризуемый компакт, существует непрерывное (на своей области определения) отображение $g_1 : K \to X$, образ $\operatorname{Im} g_1$ которого равен G. Пусть (μ_i, ν_i) — семейство смежных интервалов множества K. Обозначим $d_i = \frac{\nu_i - \mu_i}{3i}$. Положим

$$E = K \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [\mu_i + d_i, \nu_i - d_i] \right).$$

Легко проверяется, что $0, 1 \in E$, E — совершенное множество, в точках x второго рода множества E имеет место равенство $\rho_V(x) = 0$, где $V = [0,1] \setminus E$, а в точках первого рода множества E равна 0 соответствующая односторонняя плотность V. Определим отображение $g_2 : E \to X$ следующим образом:

$$g_2(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in K; \\ g_1(\mu_i), & x \in [\mu_i + d_i, \nu_i - d_i]. \end{cases}$$

Легко видеть, что g_2 непрерывно на E, $\operatorname{Im} g_2 = G$. Пусть (α_i, β_i) — семейство смежных интервалов множества E, $a_i = g_2(\alpha_i)$, $b_i = g_2(\beta_i)$. Построим отображение $g : [0,1] \to X$, принимая

$$g(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \in E; \\ g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}(x), & x \in (\alpha_i, \beta_i). \end{cases}$$

Очевидно, отображение g интегрируемо, $\operatorname{Im} g = G$. Определим функции

$$f_1(x) = \int\limits_{E \cap [0,x]} g(y)\, dy, \quad f_2(x) = \int\limits_{V \cap [0,x]} g(y)\, dy,$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \int\limits_0^x g(y)\, dy.$$

Докажем, что всюду на $[0,1]$ производная $f'(x)$ существует и

$$f'(x) \equiv g(x). \tag{13}$$

Пусть x — точка второго рода множества E. Из непрерывности g_2, совпадения $g_2 = g|_E$, условия $\rho_V(x) = 0$ и ограниченности g получаем, что f_1 и f_2 дифференцируемы в x, причем $f_1'(x) = g(x)$, $f_2'(x) = 0$. Если $x \in [0,1] \setminus E$, то x лежит в некотором смежном интервале (α_i, β_i) множества E. Ввиду способа задания отображения g имеем $g|_{(\alpha_i,\beta_i)} = g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}$. Используя свойства отображения $g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}$ (см. начало доказательства леммы), приходим к равенствам $f'(x) = g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}(x) = g(x)$. Доказательство (13) для точек первого рода сводится к комбинации изложенных выше рассуждений.

Окончательно получаем, что отображение $f : [0,1] \to X$ всюду дифференцируемо и $\operatorname{Im} f' = G$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2 для случая банаховых пространств X прямо следует из лемм 4 и 5.

2. Рассмотрим общий случай, т. е. когда X — произвольное пространство Фреше. Мы сведем его к предыдущей ситуации.

Обозначим символом τ топологию пространства X. Как известно, τ задается счетным набором полунорм p_i, так что для обобщенной последовательности $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов из X имеем $x_\xi \to x \Leftrightarrow p_i(x_\xi - x) \to 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Ввиду компактности G для всякого $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in G} |p_i(x)| < \infty.$$

Домножая, если нужно, p_i на соответствующие константы, мы можем, не умаляя общности, считать, что $\sup\limits_{x\in G} |p_i(x)| < \frac{1}{2^i}$. Рассмотрим отображение

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x).$$

Обозначим $X_0 = \operatorname{dom} p$, $F = \operatorname{cl} \operatorname{co} G$. Очевидно, что $F \subset X_0$, X_0 есть подпространство X и p — норма в пространстве X_0. Эта норма порождает топологию τ_p. Ясно, что топология $\tau|_{X_0}$, индуцированная топологией τ на подпространство X_0, слабее τ_p, но $\tau|_F = \tau_p|_F$. Не составляет труда проверить, что нормированное пространство (X_0, p) является банаховым, а G есть слабо связный и локально слабо связный компакт в (X_0, p). Так как для случая банаховых пространств теорема 2 нами уже доказана, существует дифференцируемое (относительно топологии τ_p) отображение $f : [0,1] \to X_0$ такое, что $\operatorname{Im} f' = G$. Но $\tau|_{X_0}$ слабее τ_p, поэтому f, рассматриваемое как отображение из $[0,1]$ в X, также является дифференцируемым (относительно исходной топологии τ). Теорема 2 полностью доказана.

Теорему 2 полезно сравнить с классическим результатом Мазуркевича, согласно которому метрический континуум K представим в виде непрерывного образа отрезка тогда и только тогда, когда K — локально связное множество (см. [1, § 50, II, теорема 2]). В этой связи заметим, что условие локальной слабой связности компакта не является необходимым для того, чтобы он был образом производной дифференцируемого отображения.

Отметим следующее полезное усиление теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть X — пространство Фреше, и пусть множество $G \subset X$ представимо в виде объединения $G = \bigcup\limits_{t\in T} G_t$ семейства непустых слабо связных компактов G_t, являющихся локально слабо связными, причем существует такое $t_0 \in T$, что для любого $t \in T$ множества G_{t_0} и G_t не являются сильно отделимыми. Предположим, далее, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: множество G компактно или T не более чем счетно. Тогда существует такое дифференцируемое отображение $f : [0,1] \to X$, что $\operatorname{Im} f' = G$.*

Доказательство теоремы 3 основывается на сведении общего случая к ситуации, когда пространство X банахово, и последующем применении теоремы 2 и леммы 5 (читателю не составит большого труда воспроизвести детали рассуждений, в силу чего мы их опускаем).

Заметим, что с позиций обычной связности образы производной векторфункции могут быть устроены «очень плохо». Это вытекает из следующей теоремы (ср. [2, гл. 1, § 2, п. 4, упражнение 6]).

Теорема 4. *Существует дифференцируемое отображение $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, образ $\operatorname{Im} f'$ производной которого состоит более чем из одной точки и является* *вполне несвязным компактом (т. е. все компоненты связности* $\operatorname{Im} f'$ *одноточечны).*

Доказательство. Ввиду теоремы 2 для доказательства теоремы 4 достаточно построить состоящий более чем из одной точки слабо связный компакт $G \subset \mathbb{R}^2$, являющийся к тому же локально слабо связным множеством и в то же время вполне несвязным компактом.

Опишем основную конструкцию, используемую при построении. Для пары различных точек $x, y \in \mathbb{R}^2$ возьмем полуокружность с центром в y, проходящую через точку x, причем диаметр, соединяющий концы полуокружности, перпендикулярен отрезку $[x, y]$. Разобьем эту полуокружность на 50 равных частей точками $x^1, \ldots, x^{51}$, где x^1, x^{51} — концы полуокружности, причем точки x^i нумеруются в направлении обхода против часовой стрелки. Ясно, что точка x совпадает с x^{26} (средняя точка разбиения). Множество $\{x^1, \ldots, x^{51}\}$ будем называть сеточной полуокружностью и обозначать $P(x, y)$.

Пусть $P = P((0,0),(1,0))$. Обозначим $I = \{1, \ldots, 51\}$. Построим по индукции семейства сеточных полуокружностей

$$(P_{i_1})_{i_1 \in I}, (P_{i_1 i_2})_{i_1, i_2 \in I}, \ldots, (P_{i_1 \ldots i_k})_{i_1, \ldots, i_k \in I}, \ldots .$$

На первом шаге построения определим

$$P_i = P(x^i, x^{i+1}), \quad i = 1, \ldots, 50, \quad P_{51} = P(x^{51}, 2x^{51} - x^{50}),$$

где x^i — точки из P. Сделаем шаг индукции. Пусть на k-м шаге мы построили семейство сеточных полуокружностей $P_{i_1 \ldots i_k}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$, состоящих из точек

$$P_{i_1 \ldots i_k} = \bigl\{x^1_{i_1 \ldots i_k}, \ldots, x^{51}_{i_1 \ldots i_k}\bigr\}.$$

Определим новое семейство сеточных полуокружностей

$$P_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}, \quad i_1, \ldots, i_k, i_{k+1} \in I,$$

полагая

$$P_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}} = P\bigl(x^{i_{k+1}}_{i_1 \ldots i_k}, x^{i_{k+1}+1}_{i_1 \ldots i_k}\bigr) \quad \text{для } i_{k+1} \neq 51, \tag{14}$$

$$P_{i_1 \ldots i_k 51} = P\bigl(x^{51}_{i_1 \ldots i_k}, 2x^{51}_{i_1 \ldots i_k} - x^{50}_{i_1 \ldots i_k}\bigr). \tag{15}$$

Сеточные полуокружности $P_{i_1 \ldots i_k}$ будем в дальнейшем называть сеточными полуокружностями порядка k (P — сеточная полуокружность порядка 0), их радиус обозначим через r_k. Легко убедиться, что

$$r_{k+1} < \frac{\pi}{50} r_k < \frac{r_k}{15}, \tag{16}$$

$$x^{i_{k+1}}_{i_1 \ldots i_k} = x^{26}_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}. \tag{17}$$

Полуокружность, соответствующую сеточной полуокружности $P_{i_1 \ldots i_k}$, будем обозначать через $\widetilde{P}_{i_1 \ldots i_k}$.

Положим

$$G = \operatorname{cl} D, \text{ где } D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, \ldots, i_k \in I} P_{i_1 \ldots i_k}.$$

Утверждается, что G есть искомый компакт. Чтобы доказать это, введем следующие объекты: для набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I положим

$$G_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{cl} D_{i_1 \ldots i_k}, \quad \text{где } D_{i_1 \ldots i_k} = \bigcup_{m=k+1}^{\infty} \bigcup_{i_{k+1}, \ldots, i_m \in I} P_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_m}. \tag{18}$$

Очевидно, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы разложения

$$D = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k \in I} D_{i_1\ldots i_k}, \quad G = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k \in I} G_{i_1\ldots i_k}. \tag{19}$$

Докажем, что если наборы индексов $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_k$ не совпадают, то

$$G_{i_1\ldots i_k} \cap G_{j_1\ldots j_k} = \varnothing \tag{20}$$

(равенство (20) с учетом (18) и (19) означает, что компакты $G_{i_1\ldots i_k}$ являются открыто-замкнутыми множествами относительно G). Так как $G_{i_1\ldots i_k i_{k+1}\ldots i_m} \subset G_{i_1\ldots i_k}$, достаточно установить (20) для случая, когда $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$, $i_k < j_k$. Элементарные вычисления дают для расстояний между «соседними» полуокружностями $\widetilde{P}_{i_1\ldots i_{k-1} i_k}$, $\widetilde{P}_{i_1\ldots i_{k-1}(i_k+1)}$ следующие значения:

$$d_{\mathbb{R}^2}(\widetilde{P}_{i_1\ldots i_k}, \widetilde{P}_{i_1\ldots(i_k+1)}) = \sqrt{2}r_k\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{50}} - r_k > \frac{r_k}{3} \quad \text{при } i_k \neq 50,$$

$$d_{\mathbb{R}^2}(\widetilde{P}_{i_1\ldots 50}, \widetilde{P}_{i_1\ldots 51}) = \sqrt{2}r_k - r_k > \frac{r_k}{3}.$$

В общем случае, очевидно, имеем

$$d_{\mathbb{R}^2}(\widetilde{P}_{i_1\ldots i_k}, \widetilde{P}_{i_1\ldots j_k}) \geq d_{\mathbb{R}^2}(\widetilde{P}_{i_1\ldots i_k}, \widetilde{P}_{i_1\ldots(i_k+1)}) > \frac{r_k}{3}. \tag{21}$$

Из построения (соотношения (14), (15), (18)) и неравенства (16) следует, что компакт $G_{i_1\ldots i_k}$ лежит в ε_k-оболочке полуокружности $\widetilde{P}_{i_1\ldots i_k}$, где

$$\varepsilon_k = \sqrt{2}(r_{k+1} + r_{k+2} + \ldots) < \frac{5}{3}r_{k+1} < \frac{r_k}{9}.$$

Отсюда, принимая во внимание аналогичное соображение для $G_{i_1\ldots j_k}$ и неравенство (21), получаем

$$d_{\mathbb{R}^2}(G_{i_1\ldots i_k}, G_{i_1\ldots j_k}) > \frac{r_k}{3} - \frac{2r_k}{9} > 0,$$

что влечет за собой требуемое (20).

Учитывая, что диаметр полуокружности $\widetilde{P}_{i_1\ldots i_k}$ равен $2r_k$, а также соотношение на ε_k, имеем оценку диаметра $G_{i_1\ldots i_k}$:

$$\operatorname{diam} G_{i_1\ldots i_k} < 2r_k + 2\varepsilon_k = 2r_k + 2\sqrt{2}(r_{k+1} + r_{k+2} + \ldots) < 3r_k < \frac{1}{15^{k-1}}. \tag{22}$$

Из условия (20) и оценки (22) вытекает, что G есть вполне несвязный компакт.

Установим теперь, что компакт G слабо связен. Пусть это неверно, тогда по определению 1 множество G представимо в виде $G = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$, где $U_t \neq G$, $U_t \cap \operatorname{cl}(G \setminus U_t) = \varnothing$ и $U_{t_1} \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_2} = \varnothing$ при $t_1 \neq t_2$. Из компактности G вытекает, что T конечно и все U_t являются компактами. Возьмем

$$\varepsilon = 1/2 \min_{t_1 \neq t_2} d_{\mathbb{R}^2}(U_{t_1}, U_{t_2}).$$

Ввиду общих свойств компактных множеств ε положительно. Введем естественное отношение эквивалентности $\sim$ на G, порожденное разбиением $(U_t)_{t\in T}$. Из выбора ε следует, что если $x, y \in G$ и $|x - y| \leq \varepsilon$, то $x \sim y$. Поэтому при достаточно больших k (когда $r_{k+1} \leq \varepsilon$), все точки каждой сеточной полуокружности

$P_{i_1\dots i_k}$ порядка k попарно эквивалентны. Так как не все элементы G попарно эквивалентны, найдется такое неотрицательное целое число m, что сеточные полуокружности порядка выше m состоят из попарно эквивалентных элементов, но существует сеточная полуокружность $P_{i_1\dots i_m}$ порядка m, содержащая неэквивалентные элементы. Пусть j — номер точки из $P_{i_1\dots i_m}$, для которого верно

$$x^1_{i_1\dots i_m} \sim x^2_{i_1\dots i_m} \sim \dots \sim x^j_{i_1\dots i_m}, \quad x^{j+1}_{i_1\dots i_m} \nsim x^j_{i_1\dots i_m}.$$

По формуле (14) $P_{i_1\dots i_m j} = P\big(x^j_{i_1\dots i_m}, x^{j+1}_{i_1\dots i_m}\big)$, поэтому

$$x^{j+1}_{i_1\dots i_m} = \frac{x^1_{i_1\dots i_m j} + x^{51}_{i_1\dots i_m j}}{2} \in \mathrm{co} P_{i_1\dots i_m j}.$$

В соответствии с выбором m все точки $P_{i_1\dots i_m j}$ попарно эквивалентны, т. е. все они лежат в некотором U_{t_0}. Но из свойства $U_t \cap \mathrm{cl}\,\mathrm{co} U_{t_0} = \varnothing$ при $t \neq t_0$ вытекает, что $x^{j+1}_{i_1\dots i_m} \in U_{t_0}$, т. е. точка $x^{j+1}_{i_1\dots i_m}$ эквивалентна точкам из $P_{i_1\dots i_m j}$, в частности, $x^{j+1}_{i_1\dots i_m} \sim x^{26}_{i_1\dots i_m j}$. Вследствие (17) получаем $x^{j+1}_{i_1\dots i_m} \sim x^j_{i_1\dots i_m}$, что противоречит выбору j. Слабая связность G доказана.

Для набора индексов $i_1, \dots, i_k$ из I возьмем сохраняющее ориентацию аффинное преобразование $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее сеточную полуокружность P в $P_{i_1\dots i_k}$. Принимая во внимание способ построения множеств G и $G_{i_1\dots i_k}$, нетрудно показать, что $h(G) = G_{i_1\dots i_k}$. Это означает, что все множества $G_{i_1\dots i_k}$ аффинно эквивалентны G. По свойству 4 слабо связных множеств все $G_{i_1\dots i_k}$ являются слабо связными компактами. Отсюда, в силу справедливости для любого фиксированного k соотношений (19), (20) и (22), следует локальная слабая связность G.

Итак, мы показали, что построенный компакт G является вполне несвязным, но в то же время слабо связным и локально слабо связным. Существование описанного в условии теоремы 4 отображения вытекает из уже доказанной теоремы 2. Доказательство теоремы 4 завершено.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору А. П. Копылову за его участие и неоценимую поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

2. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 28 августа 1998 г.

г. Новосибирск