M. N. Malets, S. Yu. Pilyugin, The Typical Dynamics of Some Mappings Determined by Piecewise Linear Functions,
Differ. Uravn., 2005, Volume 41, Number 2, 225–232

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 225–232

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

ТИПИЧНАЯ ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2005 г. М. Н. Малец, С. Ю. Пилюгин

Введение. В работе изучается класс динамических систем, порождаемых отображениями евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ вида

$$\varphi(v) = B(v + \Phi(v)), \quad v \in \mathbb{R}^N, \tag{0}$$

где B – неособая матрица, а нелинейность Φ определяется выбором скалярной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (точное определение приведено в п. 1).

Такие отображения возникают при полной дискретизации параболических уравнений в частных производных [1, 2], а исследование их динамики важно при изучении поведения приближенных решений параболических уравнений на неограниченных (по времени) промежутках. В работах [1, 2] отображения вида (0) изучались в случае гладких функций f. В настоящей работе рассматривается случай кусочно-линейных функций f.

Так как кусочно-линейная функция f определяется конечным набором параметров, возникает возможность применения новых подходов "дискретного характера", принципиально отличных от подходов, применяемых в случае гладких функций f.

В п. 1 изучаются общие свойства систем вида (0). В п. 2 доказываются две теоремы, характеризующие динамику отображений вида (0), соответствующих открытым и плотным подмножествам пространств кусочно-линейных функций. В п. 3 эти результаты применены для доказательства следующего утверждения (теорема 4): для открытого и плотного множества гладких функций f все неподвижные точки соответствующего отображения вида (0) гиперболические. Отметим, что теорема 4 усиливает основной результат работы [2], для доказательства которого применены методы теории особенностей гладких отображений (в [2] показано, что все неподвижные точки отображения (0) гиперболичны для функций f, принадлежащих множеству II категории по Бэру).

1. Кусочно-линейные функции и порождаемые ими динамические системы. Рассмотрим пространство $\mathcal{PL}$ кусочно-линейных непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Каждая функция $f \in \mathcal{PL}$ задается конечными множествами $X(f) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, и $Y(f) = \{\alpha_-, a_1, \ldots, a_m, \alpha_+\}$, следующим образом:

$$f \quad \text{линейна на каждой из компонент множества} \quad \Delta(f) = \mathbb{R} \setminus X(f);$$

$$f(x) = \alpha_-(x - x_1) + a_1, \quad x < x_1; \quad f(x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$f(x) = \alpha_+(x - x_m) + a_m, \quad x > x_m.$$

Ясно, что любая функция $f \in \mathcal{PL}$ липшицева с константой Липшица

$$L(f) = \max\left(|\alpha_-|, |\alpha_+|, \max_{1 \le i \le m-1} \frac{|a_{i+1} - a_i|}{|x_{i+1} - x_i|}\right).$$

Введем число

$$M(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|}{1 + x^4}\, dx.$$

Определим на пространстве $\mathcal{PL}$ две метрики ρ и ρ_1 следующим образом. Если $f, g \in \mathcal{PL}$, то $f - g \in \mathcal{PL}$ со множеством $X(f-g) = X(f) \cup X(g)$.

Положим

$$\rho(f,g) = M(f-g) + L(f-g), \quad \rho_1(f,g) = \rho(f,g) + \mathrm{dist}_H(X(f), X(g)),$$

где dist_H – расстояние по Хаусдорфу. Отметим, что если $X(f) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $X(g) = \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$, то

$$\mathrm{dist}_H(X(f), X(g)) = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le l} |x_i - \xi_j| + \max_{1\le j\le l} \min_{1\le i\le m} |x_i - \xi_j|.$$

Сохраним обозначение $\mathcal{PL}$ за множеством функций $\mathcal{PL}$ с топологией, порождаемой метрикой ρ; будем обозначать через $\mathcal{PL}_1$ множество функций $\mathcal{PL}$ с топологией, порождаемой метрикой ρ_1. Легко понять, что топология пространства $\mathcal{PL}_1$ тоньше, чем топология пространства $\mathcal{PL}$ (т.е. множества, открытые в $\mathcal{PL}$, являются открытыми и в $\mathcal{PL}_1$), и эти топологии различны.

Будем изучать динамические системы следующего вида. Рассмотрим семейство неособых матриц $B(h)$ размера $N \times N$, зависящих от положительного параметра h. Зафиксируем функцию $f \in \mathcal{PL}$ и рассмотрим отображение $\varphi_f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, задаваемое формулой

$$\varphi_f(v) = B(h)(v + h\underline{f}(v)), \tag{1}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$, $\underline{f}(v) = (f(v_1), \ldots, f(v_N)) \in \mathbb{R}^N$.

В обозначении φ_f мы подчеркиваем зависимость отображения φ от функции f; это связано с тем, что в дальнейшем число h, а значит, и матрица B будут фиксированы, а функция f будет варьироваться.

Отображения вида (1) возникают, например, при полной дискретизации параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{2}$$

с краевыми условиями Дирихле $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Действительно, зафиксируем натуральное число N и число $h > 0$ и положим $d = 1/(N+1)$. Будем аппроксимировать значения $u(nh, md)$ решения уравнения (2) с $n > 0$, $m \in \{1, \ldots, N\}$ числами v_m^n, определяемыми полунеявной схемой Эйлера

$$(v^{n+1} - v^n)/h = \mathcal{D}v^{n+1} + \underline{f}(v^n), \tag{3}$$

где $v^n = (v_1^n, \ldots, v_N^n)$, а матрица $\mathcal{D}$ соответствует стандартной аппроксимации второй производной на решетке с шагом d : $(\mathcal{D}v)_i = (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})/d^2$, $i = 1, \ldots, m$ (мы полагаем $v_0 = v_{N+1} = 0$). Ясно, что схема (3) порождает отображение

$$\varphi(v) = J^{-1}(v + h\underline{f}(v)), \tag{4}$$

где $J = E_N - h\mathcal{D}$; траектории $\{v^n\}$ этого отображения, задаваемые равенствами $v^{n+1} = \varphi(v^n)$, аппроксимируют "слои" $u(nh, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, решений уравнения (2). Отображение (4) является частным случаем отображения (1). Отметим, что свойства динамических систем, порождаемых отображениями (4), изучались в [1, 2].

Определим вначале, при каких условиях отображение (1) порождает динамическую систему в $\mathbb{R}^N$. Будем использовать норму $|v| = \max_{1\le i\le N} |v_i|$ в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 1. *Если*

$$hL(f) < 1, \tag{5}$$

то отображение (1) является гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^N$ на себя.

Доказательство. Будем писать B вместо $B(h)$. Рассмотрим произвольный вектор $w \in \mathbb{R}^N$. Ясно, что равенство $\varphi_f(v) = w$ равносильно равенству

$$v + h\underline{f}(v) = B^{-1}w. \tag{6}$$

Рассмотрим оператор $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, задаваемый формулой $T(v) = B^{-1}w - h\underline{f}(v)$. Равенство (6) выполнено тогда и только тогда, когда v – неподвижная точка оператора T. Оценим $|T(v) - T(v')| \le hL(f)|v - v'|$.

Если выполнено неравенство (5), то оператор T является оператором сжатия; следовательно, у него есть (и притом единственная) неподвижная точка в $\mathbb{R}^N$.

Таким образом, если выполнено неравенство (5), то φ_f отображает $\mathbb{R}^N$ на $\mathbb{R}^N$. Из единственности неподвижной точки оператора T (при фиксированном $w \in \mathbb{R}^N$) следует инъективность отображения φ_f. Очевидно, что это отображение непрерывно. Теперь утверждение теоремы следует из стандартных топологических соображений. Теорема доказана.

Замечание 1. В условиях теоремы 1 отображения φ_f и φ_f^{-1} липшицевы.

Действительно, $|\varphi(v) - \varphi(v')| \le \|B\|(1 + hL(f))|v - v'|$, где $\|B\|$ – операторная норма матрицы B.

С другой стороны, из равенства (6) следует, что если $w = \varphi_f(v)$ и $w' = \varphi_f(v')$, то

$$|v - v'| - hL(f)|v - v'| \le \|B^{-1}\||w - w'|,$$

поэтому

$$|v - v'| \le \frac{\|B^{-1}\|}{1 - hL(f)}|w - w'|.$$

При изучении динамики, порождаемой отображением φ_f, основной интерес представляет структура множества неподвижных точек φ_f.

Предположим, что выполнены следующие условия:

G1) матрица $B = B(h)$ симметричная и положительно-определенная;

G2) $2hL(f) < 1$.

Покажем, используя технику, предложенную в [1], что при выполнении условий G1), G2) система φ_f обладает глобальной функцией Ляпунова $V(v)$ со следующим свойством:

$$V(\varphi_f(v)) \le V(v), \quad v \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

при этом равенство в (7) выполнено лишь в том случае, когда v – неподвижная точка φ_f.

Из условия G1) следует, что матрица $C = B^{-1}$ также симметричная и положительно-определенная. Положим

$$V(v) = \langle Cv, v\rangle - \langle v, v\rangle - 2h\sum_{i=1}^{N} F(v_i),$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, а $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$.

Отметим, что для любых $v, w \in \mathbb{R}^N$ верны следующие соотношения:

$$\langle Cv, v\rangle - \langle v, v\rangle - \langle v - w, v - w\rangle = \langle Cw, w\rangle - \langle w, w\rangle + 2\langle Cw - v, v - w\rangle + \langle C(v - w), v - w\rangle \tag{8}$$

(здесь использована симметричность матрицы C).

Кроме того, так как $L(f)$ – константа Липшица функции f, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$F(x) \le F(y) + f(x)(x - y) + L(f)|x - y|^2. \tag{9}$$

Подставляя в (9) $x = v_i$, $y = w_i$, $i = 1, \ldots, N$, и суммируя по $i = 1, \ldots, N$, мы приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^{N} F(v_i) \le \sum_{i=1}^{N} F(w_i) + \langle\underline{f}(v), v - w\rangle + L(f)\langle v - w, v - w\rangle. \tag{10}$$

Пусть $w = \varphi_f(v)$. Тогда из (8) и (10) следует, что

$$V(w) = \langle Cw, w\rangle - \langle w, w\rangle - 2h\sum_{i=1}^{N} F(w_i) =$$

$$= V(v) + 2h\sum_{i=1}^{N} F(v_i) - \langle v-w, v-w\rangle - 2\langle Cw - v, v-w\rangle - \langle C(v-w), v-w\rangle - 2h\sum_{i=1}^{N} F(w_i) \le$$

$$\le V(v) + 2h\langle \underline{f}(v), v-w\rangle + 2L(f)h\langle v-w, v-w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle - 2\langle Cw-v, v-w\rangle - \langle C(v-w), v-w\rangle.$$

Так как $w = B(v + h\underline{f}(v))$, то $\langle Cw - v - h\underline{f}(v), v-w\rangle = 0$, поэтому

$$V(w) \le V(v) - (1 - 2L(f)h)\langle v-w, v-w\rangle - \langle C(v-w), v-w\rangle,$$

и неравенство (7), а также и утверждение о равенстве в (7) следуют из условий G1) и G2). Таким образом, при выполнении условий G1) и G2) множество неблуждающих точек системы φ_f совпадает с ее множеством неподвижных точек.

В следующем пункте мы изучим структуру множества неподвижных точек для отображений φ_f, соответствующих типичным функциям f.

2. Неподвижные точки типичных отображений φ_f. Как отмечено в п. 1, мы фиксируем число h и матрицу $B(h)$ (дальше мы обозначаем эту матрицу B) и изучаем множества неподвижных точек отображений φ_f, соответствующих различным функциям $f \in \mathcal{PL}$. Обозначим через $\mathrm{Fix}(\varphi_f)$ множество неподвижных точек отображения (1).

Ясно, что $v \in \mathbb{R}^N$ – неподвижная точка отображения (1) тогда и только тогда, когда

$$Av + \underline{f}(v) = 0,$$

где $A = h^{-1}(E_N - B^{-1})$. Отметим, что в случае отображения (4), порождаемого схемой (3), $A = \mathcal{D}$.

Введем следующее обозначение. Пусть $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$.

Рассмотрим набор $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \subset \mathcal{N}$. Всюду дальше, говоря о наборах $\nu \subset \mathcal{N}$, будем предполагать, что $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k$.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_1^N$ и $A_\nu = \|a_{\nu_i\nu_j}\|_1^k$ – матрица k-го порядка, полученная из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов, номера которых не являются элементами набора ν.

Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{PL}$; пусть $X(f) = (x_1, \ldots, x_m)$. Определим следующие промежутки вещественной оси:

$$\Delta_1(f) = (-\infty, x_1); \quad \Delta_i(f) = (x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \ldots, m; \quad \Delta_{m+1}(f) = (x_m, +\infty).$$

В этом случае $\Delta(f) = \Delta_1(f) \cup \ldots \cup \Delta_{m+1}(f)$.

Рассмотрим конечный набор $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\} \subset \{1, \ldots, m+1\}$ (отметим, что мы допускаем равенства $\mu_i = \mu_j$ при $i \ne j$). Обозначим $f_i' = f'(x)$, $x \in \Delta_i(f)$, $i = 1, \ldots, m+1$, и рассмотрим диагональную матрицу $D_\mu f = \mathrm{diag}(f'_{\mu_1}, \ldots, f'_{\mu_k})$ размера $k \times k$. Будем обозначать через $\#a$ число элементов конечного множества a.

Основное условие. Будем говорить, что функция f удовлетворяет основному условию, если для любых наборов $\nu \subset \mathcal{N}$ и $\mu \subset \{1, \ldots, m+1\}$ с $\#\nu = \#\mu$ выполнено неравенство

$$\det(A_\nu + D_\mu f) \ne 0.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество функций $f \in \mathcal{PL}$, удовлетворяющих основному условию.

Лемма 1. *Множество $\mathcal{B}$ – открытое подмножество пространства $\mathcal{PL}$.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in \mathcal{B}$. Покажем, что существует такое $\delta > 0$, что если $g \in \mathcal{PL}$ и $\rho(f, g) < \delta$, то $g \in \mathcal{B}$. Пусть $X(f) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m+1\}$.

Рассмотрим произвольный набор $\nu \subset \mathcal{N}$; пусть $\#\nu = k$. Для любого набора $\mu \subset \mathcal{M}$ с $\#\mu = k$ матрица $A_\nu + D_\mu f$ неособенная, поэтому существует такое число $\delta_{\nu,\mu} > 0$, что если $k \times k$-матрица G удовлетворяет неравенству $\|G - D_\mu f\| < \delta_{\nu,\mu}$, то $\det(A_\nu + G) \neq 0$.

Положим $\delta_0 = \min \delta_{\nu,\mu}$, где минимум берется по всем парам (ν, μ), $\nu \subset \mathcal{N}$ и $\mu \subset \mathcal{M}$, с $\#\mu = \#\nu$. Число таких пар конечно, поэтому $\delta_0 > 0$.

Ясно, что существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $\rho(f,g) < \delta$, то

$$|f'(x) - g'(x)| < \delta_0 \tag{11}$$

для любой точки x, принадлежащей любому из пересечений $\Delta_i(f) \cap \Delta_j(g)$. Это число δ искомое. Действительно, рассмотрим функцию $g \in \mathcal{PL}$, удовлетворяющую неравенствам (11) и произвольный набор $\nu \subset \mathcal{N}$. Пусть $X(g) = \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$ и $\mathcal{M}' = \{1, \ldots, l+1\}$. Зафиксируем любой набор $\mu' \subset \mathcal{M}'$ с $\#\mu' = \#\nu$, пусть $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_k)$.

Найдем по μ' такой набор $\mu \subset \mathcal{M}$, что $\Delta_{\mu'_i}(g) \cap \Delta_{\mu_i}(f) \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Из выбора δ следует неравенство $\|D_\mu f - D_{\mu'} g\| < \delta_0$, поэтому матрица $A_\nu + D_{\mu'} g$ неособенная. Лемма доказана.

Теорема 2. *Множество $\mathcal{B}$ открыто и плотно как в пространстве $\mathcal{PL}$, так и в пространстве $\mathcal{PL}_1$.*

Доказательство. Множество $\mathcal{B}$ открыто в $\mathcal{PL}$ по лемме 1. Как отмечено в п. 1, топология пространства $\mathcal{PL}_1$ тоньше, чем топология $\mathcal{PL}$, поэтому $\mathcal{B}$ открыто и в $\mathcal{PL}_1$.

Докажем теперь, что множество $\mathcal{B}$ плотно в $\mathcal{PL}_1$ (очевидно, из этого утверждения следует и плотность $\mathcal{B}$ в $\mathcal{PL}$). Зафиксируем функцию $g \in \mathcal{PL}$. Рассмотрим число $a \in \mathbb{R}$ и построим такую функцию $f \in \mathcal{PL}$, что $X(f) = X(g)$ и

$$f'(x) = g'(x) + a, \quad x \in \Delta(g). \tag{12}$$

Ясно, что функцию f можно построить так, что $\rho(f,g) \to 0$ при $a \to 0$, но тогда

$$\rho_1(f,g) \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0. \tag{13}$$

Из (12) следует, что равенство $A_\nu + D_\mu f = A_\nu + D_\mu g + aE_k$ выполнено для наборов ν и μ с числом элементов $\#\nu = \#\mu = k$. Поэтому $f \in \mathcal{B}$, если число $-a$ не является собственным числом ни одной из матриц

$$A_\nu + D_\mu g. \tag{14}$$

Число возможных наборов ν и μ (а поэтому и число матриц (14)) конечно. Следовательно, $f \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathbb{R}$, за исключением конечного множества значений. Из соотношения (13) следует, что существуют функции $f \in \mathcal{B}$, лежащие в любой окрестности функции g в пространстве $\mathcal{PL}_1$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathcal{B}$ и $v = (v_1, \ldots, v_N)$ и $v' = (v'_1, \ldots, v'_N)$ - неподвижные точки системы φ_f, для которых существует такой набор $(j(1), \ldots, j(N))$, что $v_i, v'_i \in \overline{\Delta_{j(i)}(f)}$, $i = 1, \ldots, N$ (т.е. v_i, v'_i лежат в замыканиях одних и тех же компонент множества $\Delta(f)$). Тогда $v = v'$.*

Доказательство. Если для чисел w, w' выполнены включения $w, w' \in \overline{\Delta_j(f)}$, то $f(w) - f(w') = f'_j(w - w')$. Поэтому из равенства $Av + \underline{f}(v) = Av' + \underline{f}(v')$ следует, что

$$(A + D_\mu f)(v - v') = 0, \tag{15}$$

где $\mu = (j(1), \ldots, j(N))$. Из равенства (15) и основного условия, примененного к наборам $\nu = \mathcal{N}$ и μ, следует, что $v = v'$. Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $f \in \mathcal{B}$, то система φ_f имеет конечное число неподвижных точек.*

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что если у двух неподвижных точек системы φ_f координаты с одинаковыми номерами лежат в замыканиях одних и тех же компонент множества $\Delta(f)$, то эти точки совпадают. Поэтому число неподвижных точек не превосходит числа возможных размещений N чисел $v_1, \ldots, v_N$ в $(m+1)$-элементном множестве $\overline{\Delta_1}, \ldots, \overline{\Delta_{m+1}}$. Следствие доказана.

Для точки $p \in \mathbb{R}^N$ и функции $f \in \mathcal{PL}$ положим $\lambda(p, f) = \{i \in \mathcal{N} : p_i \in X(f)\}$. Зафиксируем число $K > 0$ и определим $\mathcal{B}_1(K)$ как множество функций $f \in \mathcal{B}$, обладающих следующим свойством: $\lambda(p, f) = 0$ для любой точки $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$, удовлетворяющей неравенству

$$|p| \leq K. \tag{16}$$

Теорема 3. *При любом $K > 0$ множество $\mathcal{B}_1(K)$ открыто и плотно в $\mathcal{PL}_1$.*

Замечание 2. Условие, определяющее множество $\mathcal{B}_1(K)$, означает следующее: никакая из координат неподвижных точек p отображения φ_f, удовлетворяющих неравенству (16), не принадлежит множеству $X(f)$. Легко понять, что аналог утверждения теоремы 3 об открытости множества $\mathcal{B}_1(K)$ не имеет места для пространства $\mathcal{PL}$. Действительно, взяв функцию $f \in \mathcal{B}_1(K)$ и неподвижную точку $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$, удовлетворяющую неравенству (16), можно построить такую функцию $g \in \mathcal{B}$, что величина $\rho(f, g)$ сколь угодно мала, но одна из координат точки p является элементом множества $X(g)$.

Доказательство теоремы 3. Докажем вначале, что множество $\mathcal{B}_1(K)$ открыто в $\mathcal{PL}_1$. Фиксируем $f \in \mathcal{B}_1(K)$. Так как $f \in \mathcal{B}$, множество $\mathrm{Fix}(\varphi_f)$ конечно. Обозначим через P множество всех координат всех точек $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$. Это множество конечно, поэтому существует такое $a > 0$, что $|x - y| \geq 2a$ для $x \in X(f)$, $y \in P$. Пусть $X(f) = \{x_1, \ldots, x_m\}$; рассмотрим множества $U_i = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_i| \leq a\}$, $i = 1, \ldots, m$, и $U = U_1 \cup \ldots \cup U_m$. Ясно, что множество $C \subset \mathbb{R}^N$, являющееся объединением таких векторов v, $|v| \leq K$, для которых существует координата v_j, лежащая в U, компактно.

Если $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$, то $p \notin C$. Поэтому существует такое число $b > 0$, что $|Av + \underline{f}(v)| \geq b$ для $v \in C$. Найдем такое $\delta^* \in (0, a)$, что если $\rho_1(f, g) < \delta^*$, то $g \in \mathcal{B}$ (см. теорему 2) и $|Av + \underline{g}(v)| > 0$ для $v \in C$. Отсюда следует, что если $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_g)$, то $p \notin C$.

С другой стороны, из выбора δ^* вытекает, что $X(g) \subset U$. Поэтому если бы для точки $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_g)$ с $|p| \leq K$ выполнялось неравенство $\lambda(p, g) \neq 0$, то выполнялось бы и включение $p \in C$, что невозможно. Открытость множества $\mathcal{B}_1(K)$ доказана.

Плотность множества $\mathcal{B}_1(K)$ является прямым следствием формулируемой ниже леммы и неравенства $\#\lambda(p, f) \leq N$, верного для любой точки $p \in \mathbb{R}^N$ и функции $f \in \mathcal{PL}$.

Лемма 3. *Фиксируем функцию $f \in \mathcal{B}$. По любому $\varepsilon > 0$ можно указать такую функцию $g \in \mathcal{B}$, что* 1) $\rho_1(f, g) < \varepsilon$; 2) $\max\limits_{r \in \mathrm{Fix}(\varphi_g)} \#\lambda(r, g) < \max\limits_{p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)} \#\lambda(p, f)$.

Доказательство. Зафиксируем функцию f и число $\varepsilon > 0$. Пусть $X(f) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Обозначим, как и выше, через P множество всех координат неподвижных точек $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$. Выберем непересекающиеся окрестности $V_1, \ldots, V_m$ точек $x_1, \ldots, x_m$ так, чтобы из включения $x \in P \setminus X(f)$ следовало соотношение $x \notin V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$. Для каждой точки $x_j \in X(f)$ фиксируем такие пару точек y_j, z_j и окрестность U_j, что $\overline{U}_j \subset (y_j, z_j) \subset [y_j, z_j] \subset V_j$ и $|y_j - x_j|$, $|z_j - x_j| < \varepsilon$.

Для всякой точки $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$ найдем такую окрестность $W(p) \subset \mathbb{R}^N$, что если $r \in W(p)$, то выполнены следующие утверждения:

a) если $i \in \lambda(p, f)$, то $r_i \in U_{j_{(i)}}$, где $j_{(i)}$ таково, что $p_i = x_{j_{(i)}}$;

b) если $i \notin \lambda(p, f)$ и $p_i \in \Delta_{j_{(i)}}(f)$, то $r_i \in \Delta j_{(i)} \setminus \overline{V}$.

Зафиксируем число $\delta > 0$ и рассмотрим такую функцию $g \in \mathcal{PL}$, что

c) $X(g) = X(f) \cup \{y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_m, z_m\}$;

d) $g(x_i) = f(x_i) + \delta$, $i = 1, \ldots, m$;

e) $g(x) = f(x)$, $x \notin [y_i, z_j]$, $j = 1, \ldots, m$.

Отметим следующие свойства функции g:

g1) выполнено включение $g \in \mathcal{B}$ при достаточно малых $|\delta|$ (это следует из теоремы 2);

g2) выполнено неравенство $\mathrm{dist}_H(X(f), X(g)) < \varepsilon$;

g3) существует такое $\delta_0 > 0$, что если $|\delta| < \delta_0$, то $\mathrm{Fix}(\varphi_g) \cap C = \emptyset$, где $C = \{v \in \mathbb{R}^N : |v| \leq K\} \setminus \bigcup_{p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)} W(p)$.

Это свойство доказывается так же, как и существование числа δ^* в обосновании открытости множества $\mathcal{B}_1(K)$. Будем считать, что $g \in \mathcal{B}$ при $|\delta| < \delta_0$.

Так как $\rho(f,g) \to 0$ при $\delta \to 0$, для завершения доказательства нам достаточно показать, что если $|\delta| < \delta_0$, $r \in \mathrm{Fix}(\varphi_g)$, выполнено включение $r \in W(p)$ для некоторой точки $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$ и, наконец,

$$k = \#\lambda(p,f) > 0, \tag{17}$$

то

$$\#\lambda(r,g) < \#\lambda(p,f). \tag{18}$$

Рассмотрим две возникающие возможности: I) $r_i = p_i$ для всех $i \in \lambda(p,f)$; II) существует такой индекс $i \in \lambda(p,f)$, что $r_i \neq p_i$.

Из выбора точек y_j, z_j и окрестности $W(p)$ следует, что если $i \notin \lambda(p,f)$, то $r_i \notin X(g)$ (см. утверждение b)), поэтому $i \notin \lambda(r,g)$.

Если же $i \in \lambda(p,f)$ (пусть при этом $p_i = x_j$), то из включения $r \in W(p)$ следует, что $r_i \in U_j$ (см. утверждение a)). Но множество U_j содержит единственную точку множества $X(g)$, а именно точку $x_j = p_i$. Поэтому если $r_i \neq p_i$, то $r_i \notin X(g)$. Таким образом, если выполнена возможность II), то верно неравенство (18).

Для завершения доказательства покажем, что возможность I) не выполняется. Предположим противное: пусть $p = (p_1, \ldots, p_N)$, $r = (r_1, \ldots, r_N)$. Отметим, что у вектора $p - r$ все компоненты, соответствующие индексам $i \in \lambda(p,f)$, нулевые. Пусть $\nu = \mathcal{N} \setminus \lambda(f,p) = \{i_1, \ldots, i_{N-k}\}$ (число k введено в соотношении (17)).

Обозначим через Δ_ν $(N-k)$-мерный вектор, компоненты которого суть $p_i - r_i$, $i \in \nu$. Так как $p \in \mathrm{Fix}(\varphi_f)$ и $r \in \mathrm{Fix}(\varphi_g)$, выполнено равенство

$$Ap + \underline{f}(p) = Ar + \underline{f}(r). \tag{19}$$

Из отмеченного выше свойства вектора $p - r$ следует, что компоненты вектора $A(p-r)$ с индексами $i \in \nu$ равны соответствующим компонентам вектора $A_\nu \Delta_\nu$. Если $p_i \in \Delta_{j(i)}(f)$ для $i \in \nu$, то из выбора окрестности $W(p)$ следует, что

$$f(p_i) - g(r_i) = f(p_i) - f(r_i) = f'_{j(i)}(p_i - r_i)$$

(в силу утверждения b) $g(r_i) = f(r_i)$).

Поэтому, выписывая i-е компоненты равенства (19) для $i \in \nu$, приходим к равенству

$$(A_\nu + D_\mu f)\Delta_\nu = 0, \tag{20}$$

где $\mu = (j(i_1), \ldots, j(i_{N-k}))$. Так как $f \in \mathcal{B}$, из равенства (20) следует, что $p_i = r_i$, $i \in \nu$. Но тогда $p = r$. Это равенство противоречит равенству (19), так как $g(p_i) = f(p_i) + \delta$, $i \in \lambda(p,f)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3 и теоремы 3.

3. Типичность гиперболичности неподвижных точек для гладких функций f. Рассмотрим отображение φ_f вида (1), где $f \in C^1(\mathbb{R})$. Во многих приложениях возникает вопрос о гиперболичности неподвижных точек такого отображения. При этом часто известны априорные оценки ограниченного подмножества $\mathbb{R}^N$, содержащего все неподвижные точки. Так, например, если выполнено стандартное условие диссипативности

$$xf(x) \le a_0 - a_1 x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a_0, a_1 > 0$, а матрица $B(h)$ положительно-определенная, то отображение φ_f имеет глобальный аттрактор, диаметр которого (при малых $h > 0$) ограничен константой, зависящей лишь от числа a_1 и от константы Липшица функции f (см. [2]).

Зафиксируем число $K > 0$ и рассмотрим пространство Z_K, элементами которого являются классы эквивалентности функций $f \in C^1(\mathbb{R})$ по следующему отношению эквивалентности: $f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ при $|x| \le K$. Допуская вольность речи, будем говорить о функциях $f \in Z_K$, имея в виду функцию, представляющую собой класс эквивалентности.

Превратим Z_K в метрическое (и топологическое) пространство, определив на нем метрику

$$\rho^{1,K}(f,g) = \sup_{|x|\le K} (|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|).$$

Пусть B_K – множество функций $f \in Z_K$, для которых все неподвижные точки p отображения φ_f, удовлетворяющие неравенству $|p| \le K$, гиперболические.

Теорема 4. *Множество B_K открыто и плотно в Z_K.*

Доказательство. Открытость множества B_K доказывается стандартно. Для доказательства плотности множества B_K применим теоремы 2 и 3 и следующие очевидные утверждения.

Утверждение 1. *Пусть фиксированы функция $f \in C^1(\mathbb{R})$ и число $K > 0$. По любому $\delta > 0$ можно указать такое разбиение $-K = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = K$ и функцию $g \in \mathcal{PL}$ с $X(g) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, что $|f'(x) - g_i'| < \delta$, $x \in \Delta_i(g)$, $i = 2, \ldots, m$, и*

$$|g_i' - g_{i+1}'| < \delta, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Утверждение 2. *По любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $g \in \mathcal{PL}$ – функция с $X(g) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, для которой выполнены неравенства (21), то по любым окрестностям U_i точек x_i можно указать такую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$, что $f(x) = g(x)$ вне $U_1 \cup \ldots \cup U_m$ и $|f'(x) - g_i'| < \varepsilon$, $x \in \Delta_i(g) \cap U_i$, $i = 2, \ldots, m$.*

Рассмотрим произвольную функцию $f \in Z_k$. Используя утверждение 1, аппроксимируем ее кусочно-линейной функцией $f_1 \in \mathcal{PL}$ (отметим, что все оценки близости проводятся на промежутке $[-K, K]$). Используя теорему 2, аппроксимируем функцию f_1 функцией $f_2 \in \mathcal{B}$. Используя теорему 3, аппроксимируем функцию f_2 функцией $f_3 \in \mathcal{B}_1(K)$. Отметим, что все координаты неподвижных точек системы φ_{f_3} отличны от точек множества $X(f_3)$. Выбирая малые окрестности точек множества $X(f_3)$ и используя утверждение 2, аппроксимируем функцию f_3 функцией $f_4 \in C^1(\mathbb{R})$, обладающей следующим свойством: все координаты неподвижных точек системы φ_{f_4} лежат вне выбранных окрестностей точек множества $X(f_3)$ (рассуждение, аналогичное доказательству открытости множества $\mathcal{B}_1(K)$ в теореме 3, показывает, что такой выбор функции f_4 возможен).

Так как $f_3 \in \mathcal{B}$, то для любой неподвижной точки $p = (p_1, \ldots, p_N)$ системы φ_{f_3} (а также и системы φ_{f_4}) выполнено неравенство $\det(A + \mathrm{diag}(f_3'(p_1), \ldots, f_3'(p_N))) \ne 0$, т.е. любая неподвижная точка системы φ_{f_4} является простой. Поэтому, используя технику доказательства теоремы 3 в [2], можно аппроксимировать функцию f_4 такой функцией g, что все неподвижные точки системы φ_g гиперболические. Теорема 4 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00675), Министерства образования Российской Федерации (проект Е02-1.0-65) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект НШ-2271.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oliva W.M., Kuhl N.M., Magalhães L.T.* // Publ. Mat. 1993. P. 255–269.
2. *Eirola T., Pilyugin S.Yu.* // J. Dynamics Differ. Equat. 1996. V. 8. P. 281–297.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 03.08.2004 г.