L. L. Maksimova, Implicit Definability and Positive Logics, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 1, 65–93

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 65—93

УДК 510.64

НЕЯВНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ И ПОЗИТИВНЫЕ ЛОГИКИ*)

Л. Л. МАКСИМОВА

Работа посвящена исследованию позитивных логик, содержащих позитивный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний. Рассматриваются аналоги теоремы о неявной определимости, доказанной Бетом [1]. В [2] доказано, что лишь конечное число суперинтуиционистских логик обладает проективным свойством Бета, и найден полный список этих логик. В данной статье мы покажем, что существует в точности семь позитивных логик, обладающих проективным свойством Бета PBP, и получим полное описание этих логик. Отметим, что полный список позитивных логик с интерполяционным свойством Крейга CIP найден в [3].

Также доказывается разрешимость свойств PBP и CIP в позитивных исчислениях, расширяющих позитивный фрагмент Int^+ интуиционистского исчисления высказываний. Полученные результаты применяются для исследования расширений минимальной логики Йохансона.

Основные результаты доказываются алгебраическими методами. В частности, найдены удобные алгебраические критерии, позволяющие доказать или опровергнуть справедливость проективного свойства Бета в рассматриваемых логиках.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект N 00-03-00108.

§ 1. Определения

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначается формула, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение выводимости в L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ — попарно не пересекающиеся списки переменных, которые не содержат x и y, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ имеют одинаковую длину, $A(\mathbf{p},\mathbf{q},x)$ — формула. Говорим, что логика L обладает *проективным свойством Бета* PBP, если из $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q},x)\&A(\mathbf{p},\mathbf{q}',y) \supset (x \equiv y)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q},x) \supset (x \equiv B(\mathbf{p}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{p})$; L обладает *свойством Бета* BP, если из $\vdash_L A(\mathbf{p},x)\&A(\mathbf{p},y) \supset (x \equiv y)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{p},x) \supset (x \equiv B(\mathbf{p}))$ для подходящей формулы $B(\mathbf{p})$, которую называем *явным определением для* x.

Свойства PBP и BP рассматривались, например, в [4], там они обозначались через B1 и PB1. Очевидно, что B1 есть частный случай PB1. В [4] определены также варианты PB2 проективного свойства Бета и B2 свойства Бета. В случае логик, рассматриваемых в данной статье, эти свойства равносильны, соответственно, PB1 и B1. Кроме того, в [5] доказано, что все суперинтуиционистские логики обладают свойством BP. Тем же способом можно доказать свойство Бета для всех логик данной статьи.

Следуя [6], можно вывести проективное свойство Бета из *интерполяционного свойства*

CIP: если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \supset B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \supset C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \supset B(\mathbf{p},\mathbf{r})$
(списки $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

Формула $C(\mathbf{p})$ называется *интерполянтом.*

В [2] описаны все суперинтуиционистские логики, обладающие проективным свойством Бета. В настоящей работе это описание используется для решения вопроса о том, какие позитивные логики имеют PBP.

Рассматриваем семейство $E(\mathrm{Int}^+)$ позитивных логик, содержащих позитивный фрагмент Int^+ интуиционистской логики Int. Язык логики Int^+ содержит пропозициональную константу $\top$ ("true") и связки &, $\vee$, $\supset$.

Формулу этого языка называем *позитивной*. Множество всех позитивных формул обозначим For^{+}. Язык минимальной логики J Йохансона [7] и логики Int содержит дополнительную константу $\perp$ ("absurdity"). Множество всех формул обозначаем через For; отрицание рассматриваем как сокращение

$$\neg A \rightleftharpoons A \supset \perp.$$

Логика Int^{+} может быть задана позитивным исчислением, имеющим в качестве схем аксиом позитивные схемы интуиционистского исчисления высказываний (см., напр., [8]) и аксиому $\top$, а в качестве правила вывода $A, A \supset B/B$ (modus ponens). Минимальная логика J имеет те же схемы аксиом и правило вывода, однако ее язык более широкий.

Как обычно, логика L отождествляется с множеством ее теорем. Под *логикой* подразумевается множество формул (фиксированного языка), замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. Через $L + Ax$ обозначается логика, полученная из L добавлением дополнительных схем аксиом Ax. В частности,

$$\mathrm{Int} = J + (\perp \supset p).$$

Обозначаем

$$J^{\perp} = J + \perp.$$

Вывод в $L + Ax$ есть последовательность формул $B_1, \ldots, B_n$ такая, что для любого $i \leqslant n$ формула B_i есть либо результат подстановки в аксиому из L или в Ax, либо непосредственное следствие предыдущих формул B_j и B_k, где $j, k < i$, по правилу modus ponens. Вывод в L из множества формул Γ может, сверх того, содержать формулы из Γ. Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если A выводимо из множества $L \cup \Gamma$ с помощью правила modus ponens.

Любой логике L из $E(J)$ соответствует ее *позитивный фрагмент*

$$L^{+} = \{A \mid A \in \mathrm{For}^{+} \text{ и } A \in L\}.$$

Очевидно, что для любого множества Ax позитивных формул выполняется $(J + Ax)^{+} = J^{+} + Ax$. Далее, если Ax — множество позитивных формул, то любой вывод позитивной формулы в $J^{\perp} + Ax$ может быть преобразован в вывод той же формулы в логике $J^{+} + Ax$ заменой всех вхождений константы $\perp$ константой $\top$. Поэтому $(J^{\perp} + Ax)^{+} = J^{+} + Ax$ для любого множества позитивных формул Ax.

Хорошо известно, что $\mathrm{Int}^{+} = J^{+}$. Кроме того, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [9]. *Если Ax — множество позитивных формул, то*

$$(\mathrm{Int} + Ax)^{+} = \mathrm{Int}^{+} + Ax.$$

Семантическую характеризацию для логики J и ряда ее расширений нашел Сегерберг [10]. Алгебраическая семантика представлена в [8, 11]. Некоторое алгебраическое представление для расширений логики J получено в [12].

§ 2. Алгебраизация

Для доказательства основных результатов существенно используем алгебраическую семантику. В этом параграфе мы найдем алгебраические критерии справедливости проективного свойства Бета.

Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между суперинтуиционистскими логиками и многообразиями псевдобулевых алгебр. Аналогичные соответствия имеются между логиками в $E(\mathrm{Int}^{+})$ и многообразиями импликативных решеток [8], а также между логиками в $E(J)$ и многообразиями J-алгебр. Каждой логике L соответствует многообразие $V(L)$.

Импликативная решетка $\mathbf{A} = \{A; \&, \vee, \supset, \top\}$ есть дистрибутивная решетка относительно $\&$ и $\vee$ с относительным псевдодополнением $\supset$, определенным с помощью соотношения

$$x \leq y \supset z \Leftrightarrow x \& y \leq z.$$

J-алгеброй называется алгебра $\mathbf{A} = \{A; \&, \vee, \supset, \top, \perp\}$, где $\mathbf{A}^{*} = \{A; \&, \vee, \supset, \top\}$ — импликативная решетка, а $\perp$ — дополнительная константа; $\mathbf{A}^{*}$

назовем *позитивным редуктом* алгебры $\mathbf{A}$. Псевдобулева алгебра — это J-алгебра, в которой $\bot$ является наименьшим элементом.

В дальнейшем под *логикой* подразумеваем логику из $E(\mathrm{Int}^+)$ или из $E(J)$, а под *алгеброй* — импликативную решетку или J-алгебру соответственно. Пусть A — формула и $\mathbf{A}$ — алгебра; говорим, что формула A *общезначима* в $\mathbf{A}$, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$. Полагаем $V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}$. Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Если $V(L)$ порождается алгеброй $\mathbf{A}$, то иногда используется запись $L = L\mathbf{A}$. Если $V = V(L)$ для $L \in E(J)$, то обозначаем $V^+ = V(L^+)$. Очевидно, V^+ порождается алгебрами $\mathbf{A}^*$, где $\mathbf{A} \in V(L)$.

Алгебра $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов; *вполне связной*, или *сильно компактной*, если для всех $x, y \in \mathbf{A}$ выполняется $x \vee y = \top \Leftrightarrow (x = \top$ или $y = \top)$. Элемент a алгебры $\mathbf{A}$ называется *предпоследним элементом*, или *опремумом*, алгебры $\mathbf{A}$, если он является наибольшим среди элементов алгебры $\mathbf{A}$, отличных от $\top$. Через $\mathbf{B}_0$ обозначается двухэлементная булева алгебра.

Напомним, что невырожденная алгебра называется подпрямо неразложимой, если она не разлагается в подпрямое произведение отличных от нее сомножителей. Называем алгебру *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа отличных от нее сомножителей.

В [8] показано, что существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на алгебре и фильтрами этой алгебры. Фильтру ∇ соответствует конгруэнция

$$x \sim_\nabla y \rightleftharpoons (x \supset y) \& (y \supset x) \in \nabla.$$

Обозначаем $\mathbf{A}/\nabla \rightleftharpoons \mathbf{A}/\sim_\nabla$. Если Θ — конгруэнция, то $\nabla(\Theta) \rightleftharpoons \{x \mid x\Theta\top\}$ есть фильтр, причем $\sim_{\nabla(\Theta)}$ совпадает с Θ.

Фильтр ∇ называется *простым*, если он не представим в виде пересечения конечного числа отличных от него фильтров. Следующие леммы, известные для псевдобулевых алгебр (см., напр., [13]) легко переносятся на импликативные решетки и J-алгебры.

ЛЕММА 2.1. *Для любой алгебры* $\mathbf{A}$ *выполняются*

(i) $\mathbf{A}$ *финитно неразложима тогда и только тогда, когда единичный фильтр* $\nabla = \{\top\}$ *является простым, т. е.* $\mathbf{A}$ *вполне связна*;

(ii) $\mathbf{A}$ *подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *имеет предпоследний элемент.*

ЛЕММА 2.2. *Для любой алгебры* $\mathbf{A}$ *и любого фильтра* ∇ *на* $\mathbf{A}$ *эквивалентны следующие условия*:

(i) *фильтр* ∇ *является простым*;

(ii) $\mathbf{A}/\nabla$ *финитно неразложима.*

Доказательства следующих лемм аналогичны доказательствам соответствующих лемм для псевдобулевых алгебр, приведенным в [14].

ЛЕММА 2.3. *Пусть* Φ *— фильтр в алгебре* $\mathbf{A}$, *не содержащий элемента* b. *Тогда существуют подпрямо неразложимая* $\mathbf{C}$ *с предпоследним элементом* ω *и гомоморфизм* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *такие, что* $f(x) = \top$ *для всех* $x \in \Phi$ *и* $f(b) = \omega$. *В частности, если в* $\mathbf{A}$ *неверно* $a \leq b$, *то существуют подпрямо неразложимая* $\mathbf{C}$ *с предпоследним элементом* ω *и гомоморфизм* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *такие, что* $f(a) = \top$ *и* $f(b) = \omega$.

ЛЕММА 2.4. *Пусть алгебра* $\mathbf{A}$ *является общей подалгеброй алгебр* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$, $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ *и* $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b \leq a$ *и* $a \leq c)$. *Тогда существуют простые фильтры* Φ *на* $\mathbf{B}$ *и* Φ' *на* $\mathbf{C}$ *такие, что* $b \in \Phi$, $c \notin \Phi'$ *и* $\Phi \cap \mathbf{A} = \Phi' \cap \mathbf{A}$, *причем* $\mathbf{C}/\Phi'$ *— подпрямо неразложимая алгебра с предпоследним элементом* c/Φ'.

ЛЕММА 2.5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— подпрямо неразложимая алгебра с предпоследним элементом* ω, h *— гомоморфизм из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$ *такой, что* $h(\omega) < \top$. *Тогда* h *является мономорфизмом.*

Вместо леммы 2.7 из [14] нам потребуется

ЛЕММА 2.6. *Пусть* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ *— алгебры,* $\mathbf{C}$ *— вполне связная ал-*

гебра, $h : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \to \mathbf{C}$ *— гомоморфизм. Тогда выполняется по крайней мере одно из условий:*

(i) $h(x, y) = h(x, \top)$ *для всех* $x \in \mathbf{A}_1, y \in \mathbf{A}_2$*, и* $\alpha(x) = h(x, \top)$ *является гомоморфизмом из* $\mathbf{A}_1$ *в* $\mathbf{C}$;

(ii) $h(x, y) = h(\top, y)$ *для всех* $x \in \mathbf{A}_1, y \in \mathbf{A}_2$*, и* $\beta(y) = h(\top, y)$ *является гомоморфизмом из* $\mathbf{A}_2$ *в* $\mathbf{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1. Пусть $h(\top, y) = \top$ для всех $y \in \mathbf{A}_2$. Тогда для любых $x \in \mathbf{A}_1$, $y \in \mathbf{A}_2$ выполняется $h(x, y) = h(x, \top) \& h(\top, y) = h(x, \top)$, т. е.

$$h(x, y) = h(x, \top) \text{ для всех } x \in \mathbf{A}_1, y \in \mathbf{A}_2. \tag{1}$$

Положим $\alpha(x) = h(x, \top)$. Для любой основной операции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в силу (1) имеем

$$f(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) = f(h(x_1, \top), \ldots, h(x_n, \top))$$

$$= h(f(x_1, \ldots, x_n), f(\top, \ldots, \top)) = h(f(x_1, \ldots, x_n), \top)),$$

поэтому α — гомоморфизм, т. е. выполняется (i).

Случай 2. Пусть теперь существует $y \in A_2$ такой, что $h(\top, y) < \top$. Тогда для любого x имеем

$$h(x, \top) \vee h(\top, y) = h(\top, \top) = \top$$

и, так как $\mathbf{C}$ вполне связна, получаем

$$h(x, \top) = \top$$

для любого x. По аналогии с предыдущим случаем выводим, что $\beta(y) = h(\top, y)$ является гомоморфизмом и выполняется (ii).

В [4] найден алгебраический эквивалент проективного свойства Бета PB2 в модальных и суперинтуиционистских логиках, а именно, доказана равносильность PB2 и свойства SES сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия. Позднее результат был обобщен на широкий класс алгебраизуемых логик [15]. Равносильность интерполяционного свойства CIP в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемости многообразия псевдобулевых алгебр установлена в [13]. Связь между различными вариантами интерполяции и амальгамируемости также распространяется на широкий класс логик [16—19].

В [13, 14] найдены удобные критерии амальгамируемости и свойства SES в многообразиях псевдобулевых алгебр. Распространим эти критерии на произвольные логики в $E(J^+)$ и $E(J)$, а также на многообразия соответствующих алгебр. Напомним необходимые определения.

Класс V называется *амальгамируемым*, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V он удовлетворяет условию

AP: если $\mathbf{A}$ есть общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройку $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ называют *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Говорим, что класс V обладает свойством SAP *сверхамальгамируемости*, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V выполняется условие AP и, сверх того, в алгебре $\mathbf{D}$ справедливы

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Класс V обладает *ограниченным свойством амальгамируемости* RAP (см. [2]), если условие AP выполняется для любых подпрямо неразложимых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, имеющих общий предпоследний элемент.

Класс алгебр V обладает *свойством сильной сюръективности эпиморфизмов* SES, если для любых $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ из V таких, что $\mathbf{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, и для любого $b \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$ существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

ТЕОРЕМА 2.7. *Для любой логики L из $E(J)$ или $E(J^+)$ эквивалентны следующие условия*:

1) *L обладает интерполяционным свойством Крейга*;

2) *$V(L)$ амальгамируемо*;

3) *$V(L)$ имеет* SAP;

4) *выполнено условие* AP *для любых вполне связных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из $V(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет [13, док-во теор. 1].

ТЕОРЕМА 2.8. *Для любой логики L из $E(J)$ или $E(J^+)$ эквивалентны следующие условия*:

1) *L обладает проективным свойством Бета*;

2) *$V(L)$ имеет* SES;

3) *для любых финитно неразложимых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ из $V(L)$, для любых мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ и для любых $x \in \mathbf{B}, y \in \mathbf{C}$, если выполняется $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(x = \beta(z)$ и $\gamma(z) = y)$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x, y) \neq \varepsilon(x, y)$ и $\delta(\beta(z), \gamma(z)) = \varepsilon(\beta(z), \gamma(z))$ для всех z из $\mathbf{A}$*;

4) *$V(L)$ имеет* RAP *и класс $FI(V(L))$ финитно неразложимых алгебр из $V(L)$ имеет* SES.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1⇔2. Аналогично доказательству [14, теор. 3.1].

2⇒3. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — алгебры из $V(L)$, $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ — мономорфизмы и $x \in \mathbf{B}, y \in \mathbf{C}$, причем $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(x = \beta(z)$ и $\gamma(z) = y)$. Тогда $\{(\beta(z), \gamma(z)) \mid z \in \mathbf{A}\}$ образует подалгебру $\mathbf{A}_0$ алгебры $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ и $(x, y) \in \mathbf{B}_0 \setminus \mathbf{A}_0$. Поэтому утверждение сразу вытекает из SES.

3⇒2. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры из $V(L)$, $\mathbf{A}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{B}$ и $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Тогда $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(b \leq z$ и $z \leq b)$, а по лемме 2.4 существуют простые фильтры Ψ_1 и Ψ_2 на $\mathbf{B}$ такие, что $b \in \Psi_1$, $b \notin \Psi_2$ и $\Psi_1 \cap \mathbf{A} = \Psi_2 \cap \mathbf{A}$. Поэтому алгебры $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Psi_1$ и $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}/\Psi_2$ финитно неразложимы. Заметим, что алгебра $\mathbf{A}_0 = \{a/\Psi_1 \mid a \in \mathbf{A}\}$ изоморфно вложима в $\mathbf{B}_2$ с помощью мономорфизма $\gamma(a/\Psi_1) = a/\Psi_2$, кроме того, $\neg(\exists z \in \mathbf{A}_0)(b/\Psi_1 = z$ и $b/\Psi_2 = \gamma(z))$. В противном случае мы имели бы $b/\Psi_1 = a/\Psi_1$ и $b/\Psi_2 = a/\Psi_2$ для некоторого a из $\mathbf{A}$; отсюда $(a \leftrightarrow b) \in \Psi_1$, т. е. $a \in \Psi_1$, кроме того, $(a \leftrightarrow b) \in \Psi_2$, т. е. $a \notin \Psi_2$, что противоречит $\Psi_1 \cap \mathbf{A} = \Psi_2 \cap \mathbf{A}$.

По условию 3 существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{C}$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(b/\Psi_1, b/\Psi_2) \neq h(b/\Psi_1, b/\Psi_2)$ и $g(a/\Psi_1, a/\Psi_2) = h(a/\Psi_1, a/\Psi_2)$ для всех a из $\mathbf{A}$. Теперь для $x \in \mathbf{B}$ положим $g'(x) = g(x/\Psi_1, x/\Psi_2)$, $h'(x) = h(x/\Psi_1, x/\Psi_2)$. Тогда g' и h' — гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$, $g'(b) \neq h'(b)$ и $g'(a) = h'(a)$ для всех a из $\mathbf{A}$.

3⇒4. Если выполняется 3, то, как уже доказано, $V(L)$ имеет SES, а значит, и $FI(V(L))$ имеет SES.

Докажем теперь, что из условия 3 вытекает RAP. Пусть $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — подпрямо неразложимые алгебры из $V(L)$, $\mathbf{A}_0$ есть общая подалгебра $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, ω — общий предпоследний элемент всех трех алгебр. Тогда существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{C} \in V(L)$, а также гомоморфизмы g и h из $\mathbf{A}_1 \times \times \mathbf{A}_2$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(\top, \omega) \neq h(\top, \omega)$ и $g(z, z) = h(z, z)$ для любого $z \in \mathbf{A}_0$. В силу леммы 2.3 можно считать, что $g(\top, \omega) = \top$, а $h(\top, \omega)$ — предпоследний элемент в $\mathbf{C}$.

Имеем $h(\top, \omega) \neq \top = h(\top, \top)$. Поэтому условие (i) леммы 2.6 нарушается при $x = \top$, $y = \omega$. Следовательно, выполняется условие (ii), т. е. $h(x, y) = h(\top, y)$ для всех $x \in \mathbf{A}_1$, $y \in \mathbf{A}_2$, и $\beta(y) = h(\top, y)$ является гомоморфизмом из $\mathbf{A}_2$ в $\mathbf{C}$. При этом $\beta(\omega) = h(\top, \omega) < \top$, т. е. $\beta(\omega) < \top$. Значит, β — мономорфизм из $\mathbf{A}_2$ в $\mathbf{C}$ по лемме 2.5.

Теперь применим лемму 2.6 к g. Имеем $g(\top, \omega) = \top$, $g(\omega, \omega) = = h(\omega, \omega) = h(\top, \omega) < \top$, поэтому $g(\top, \omega) \neq g(\omega, \omega)$. Следовательно, случай (ii) леммы 2.6 не может выполняться для g, а значит, имеет место случай (i), т. е. $g(x, y) = g(x, \top)$ для всех $y \in \mathbf{A}_2$, и $\alpha(x) = g(x, \top)$ является гомоморфизмом из $\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{C}$. Получаем $\alpha(\omega) = g(\omega, \top) = g(\omega, \omega) = h(\omega, \omega) < < \top$, поэтому α — мономорфизм из $\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{C}$. Наконец, для $z \in \mathbf{A}_0$ выполняется $\alpha(z) = g(z, \top) = g(z, z) = h(z, z) = h(\top, z) = \beta(z)$.

4⇒3. Так как $V(L)$ — многообразие, достаточно доказать условие 3 для случая, когда β и γ — тождественные мономорфизмы. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — финитно неразложимые алгебры из $V(L)$, $\mathbf{A}$ — общая подалгебра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, $b \in \mathbf{B}, c \in \mathbf{C}$, причем $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(b = z$ и $z = c)$. Возможны следующие случаи: (i) $b \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$, (ii) $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{A}$, (iii) $b, c \in \mathbf{A}$.

(i) $b \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$. Так как $FI(V(L))$ имеет SES, существуют $\mathbf{D} \in V(L)$ и гомоморфизмы $g, h : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$. Для $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$ полагаем

$$\delta(x, y) = g(x), \;\; \varepsilon(x, y) = h(x).$$

Очевидно, $\delta(b,c) \neq \varepsilon(b,c)$ и $\delta(z,z) = \varepsilon(z,z)$ для всех z из $\mathbf{A}$.

(ii) $c \in C \setminus A$. Аналогично случаю (i).

(iii) $b, c \in \mathbf{A}$. Тогда $b \neq c$. Пусть, для определенности, $b \nleq c$. Существует простой фильтр Φ на $\mathbf{B}$, максимальный среди фильтров, содержащих b и не содержащих c. Множество $\Phi_0 = \Phi \cap \mathbf{A}$ снова содержит b и не содержит c, и можно расширить его до максимального фильтра Ψ на $\mathbf{C}$, содержащего b и не содержащего c. Покажем, что

$$\Phi \cap \mathbf{A} = \Psi \cap \mathbf{A}. \tag{2}$$

Допустим противное, т. е. существует $a \in (\Psi \cap \mathbf{A}) \setminus \Phi_0$. Тогда $a \notin \Phi$. Из условия максимальности Φ следует, что найдется $y \in \Phi$, для которого $y \& a \leq c$. Отсюда $y \leq a \supset c$, $a \supset c \in \Phi$, а значит, $a \supset c \in \Phi \cap \mathbf{A} \subseteq \Psi$. Поэтому $a \& (a \supset c) \in \Psi$, т. е. $c \in \Psi$, получаем противоречие. Итак, (2) доказано.

Алгебры $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$ и $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$ — подпрямо неразложимые, с предпоследними элементами $\omega_1 = c/\Phi$ и $\omega_2 = c/\Psi$ соответственно. Алгебра $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\Phi_0$ также подпрямо неразложима, $\omega = c/\Phi_0$ — ее предпоследний элемент. В силу (2) естественные отображения $\beta(x/\Phi_0) = x/\Phi$ и $\gamma(x/\Phi_0) = x/\Psi$ являются мономорфизмами из $\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{C}_1$, причем $\beta(\omega) = \omega_1$ и $\gamma(\omega) = \omega_2$. Ввиду RAP существуют $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и мономорфизмы $g : \mathbf{B_1} \to \mathbf{D}$, $h : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(\beta(z)) = h(\gamma(z))$ для всех $z \in \mathbf{A}_1$.

Теперь для $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$ определим:

$$\delta(x,y) = g(x/\Phi), \;\; \varepsilon(x,y) = h(y/\Psi).$$

Для всех $z \in \mathbf{A}$ имеем

$$\delta(z,z) = g(z/\Phi) = g\beta(z/\Phi_0) = h\gamma(z/\Phi_0) = h(z/\Psi) = \varepsilon(z,z),$$

т. е. $\delta(z,z) = \varepsilon(z,z)$ для всех $z \in \mathbf{A}$. Кроме того, $\delta(b,c) = g(b/\Phi) = \top$, $\varepsilon(b,c) = h(c/\Psi) = h(\omega_2) < \top$, т. е. $\delta(b,c) \neq \varepsilon(b,c)$. Теорема доказана.

Эквивалентность условий 1—3 теоремы 2.8 для суперинтуиционистских логик доказана в [4]. Кроме того, в [14] найден ряд других условий, эквивалентных PBP и SES (см. [14, теор. 3.1—3.3]). Все эти результаты переносятся и на логики в $E(J^+)$ и $E(J)$, хотя некоторые доказательства требуют небольших изменений. Более того, все результаты справедливы и для обогащений логики J^+ дополнительными операциями, удовлетворяющими аксиоме

$$(p_1 \equiv q_1)\& \ldots \&(p_n \equiv q_n) \supset (f(p_1, \ldots, p_n) \equiv f(q_1, \ldots, q_n)),$$

где $(p \equiv q) \rightleftharpoons (p \supset q)\&(q \supset p)$.

§ 3. Сведение позитивных логик к суперинтуиционистским

В этом параграфе мы сводим проблему интерполяции и проективного свойства Бета в позитивных логиках к соответствующим проблемам в суперинтуиционистских логиках.

Хорошо известно [8], что любая импликативная решетка $\mathbf{A} = (A, \&, \vee, \supset, \top)$ может быть расширена до псевдобулевой алгебры $\mathbf{A}' = (A \cup \{\bot\}, \&, \vee, \supset, \top, \bot)$ путем добавления нового элемента $\bot$, который является наименьшим в $\mathbf{A}'$. Очевидно, в $\mathbf{A}'$ выполняется

$$\neg\bot = \top,\ \ \neg x = \bot \text{ для любого } x \neq \bot.$$

Кроме того, $\mathbf{A}$ является фильтром в $\mathbf{A}'$ и для любого $x \in \mathbf{A}'$ имеем

$$x \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \neg\neg x = \top.$$

Любой гомоморфизм $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ можно продолжить до гомоморфизма $h' : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$ псевдобулевых алгебр, где $h'(x) = h(x)$ для $x \in \mathbf{A}$ и $h'(\bot) = \bot$.

Имеет место

ЛЕММА 3.1. *Для любой импликативной решетки* $\mathbf{A}$ *выполняется*

(i) $\mathbf{A}' \models \neg A \vee \neg\neg A$;

(ii) *для любой позитивной формулы* $A(p_1, \ldots, p_n)$

$$\mathbf{A} \models A(p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \mathbf{A}' \models A(p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно.

(ii) Любому означиванию v в $\mathbf{A}$ ставим в соответствие означивание v' в $\mathbf{A}'$, полагая $v'(p) = v(p)$. Индукцией по длине позитивной формулы A легко доказывается, что

$$v'(A(p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n)) = v(A(p_1, \ldots, p_n)).$$

Если $\mathbf{A} \not\models A(p_1, \ldots, p_n)$, то $\mathbf{A}' \not\models A(p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n)$.

Обратно, по любому означиванию v в $\mathbf{A}'$ строим означивание v'' в $\mathbf{A}$, полагая $v''(p) = v(p \vee \neg p)$. Снова для любой позитивной формулы A получаем

$$v''(A(p_1, \ldots, p_n)) = v(A(p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n)),$$

отсюда сразу вытекает наше утверждение.

Для любой позитивной логики L определим логику

$$L' = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p) + \{A' \mid A \in L\},$$

где A' получается из A подстановкой $(p \vee \neg p)$ вместо p для всех переменных p формулы A.

Отметим, что в качестве аксиом для L' вместо формул A' можно взять формулы

$$A''(p_1, \ldots, p_n) = \neg\neg p_1 \& \ldots \& \neg\neg p_n \supset A(p_1, \ldots, p_n).$$

Из леммы 3.1 непосредственно следует

ЛЕММА 3.2. *Для любых импликативной решетки* $\mathbf{A}$ *и позитивной логики* L

$$\mathbf{A} \models L \Leftrightarrow \mathbf{A}' \models L'.$$

Кроме того, имеет место

ЛЕММА 3.3. *Пусть* L *— позитивная логика. Тогда любая невырожденная вполне связная ПБА* $\mathbf{B}$ *из* $V(L')$ *имеет вид* $\mathbf{A}'$ *для подходящей алгебры* $\mathbf{A}$ *из* $V(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbf{B} \models \neg A \vee \neg\neg A$, для любого $x \in \mathbf{B}$ получаем $\neg x = \top$ или $\neg\neg x = \top$, т. е. $\neg\neg x = \top$ для любого $x \neq \bot$. Отсюда следует, что множество

$$A = \{x \in \mathbf{B} \mid x \neq \bot\}$$

образует фильтр в $\mathbf{B}$, значит, $\mathbf{A} = (A, \&, \vee, \supset, \top)$ является подалгеброй позитивного редукта псевдобулевой алгебры $\mathbf{B}$, а $\mathbf{B} = \mathbf{A}'$.

Теперь докажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. (i) *Для любой позитивной логики L и любой позитивной формулы $A = A(p_1, \dots, p_n)$ выполняется*

$$L \vdash A(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow L' \vdash A(p_1 \vee \neg p_1, \dots, p_n \vee \neg p_n).$$

(ii) *Если $L_1, L_2 \in E(\mathrm{Int}^+)$ и $L_1 \neq L_2$, то $L_1' \neq L_2'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Необходимость вытекает из определения L'.

Достаточность. Если $L \nvdash A(p_1, \dots, p_n)$, то $\mathbf{A} \not\models A(p_1, \dots, p_n)$ для некоторой $\mathbf{A} \in V(L)$. По лемме 3.2, $\mathbf{A}' \in V(L')$, и, по лемме 3.1, $\mathbf{A}' \not\models A(p_1 \vee \neg p_1, \dots, p_n \vee \neg p_n)$.

(ii) Следует из (i).

Кроме того, имеет место

ЛЕММА 3.5. *Для любой $L \in E(J^+)$ многообразие $V(L')$ псевдобулевых алгебр порождается классом $\{\mathbf{A}' \mid \mathbf{A} \in V(L)\}$. Более того, если $V(L)$ порождается классом K, то $V(L')$ порождается классом $K' = \{\mathbf{A}' \mid \mathbf{A} \in K\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любое многообразие порождается своими финитно неразложимыми алгебрами. По лемме 3.3 получаем, что $V(L')$ порождается классом $\{\mathbf{A}' \mid \mathbf{A} \in V(L)\}$. Если $V(L)$ порождается классом K, то по известной формуле $V(L) = HSP(K)$, где H, S и P — операции взятия гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений соответственно.

Пусть $\mathbf{A} \in V(L)$. Покажем, что $\mathbf{A}' \in HSP(K')$. Так как $\mathbf{A} \in V(L)$, существуют $\mathbf{B} \in SP(K)$ и гомоморфизм h из $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$. Алгебра $\mathbf{B}$ является подалгеброй некоторой алгебры $\mathbf{C} = \prod\limits_{i\in I} \mathbf{C}_i$, где $\mathbf{C}_i \in K$. Легко видеть, что $\mathbf{A}'$ является гомоморфным образом $\mathbf{B}'$, а $\mathbf{B}'$ есть подалгебра алгебры $\mathbf{C}'$, которая, в свою очередь, является подалгеброй произведения $\prod\limits_{i\in I} \mathbf{C}'_i$. Поэтому $\mathbf{A}' \in HSP(K')$.

Из леммы следует: если произвольная позитивная логика L из $E(J^+)$ характеризуется классом K, то L' характеризуется классом псевдобулевых алгебр $\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A} \in K$.

Решающее значение имеет

ЛЕММА 3.6. *Пусть L — позитивная логика из $E(J^+)$. Тогда*

(i) $V(L)$ *имеет* AP $\Leftrightarrow$ $V(L')$ *имеет* AP;

(ii) $V(L)$ *имеет* SES $\Leftrightarrow$ $V(L')$ *имеет* SES.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Допустим, что $V(L')$ имеет AP, а $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из $V(L)$. Тогда $\mathbf{A}'$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{C}'$, принадлежащих $V(L')$. Поэтому существуют $\mathbf{D} \in V(L')$ и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Рассмотрим

$$\Phi = \{x \in \mathbf{D} \mid \neg\neg x = \top\}.$$

Тогда Φ содержит множество $\delta(\mathbf{B}) \cup \varepsilon(\mathbf{C})$. Кроме того, Φ является фильтром в $\mathbf{D}$ и поэтому замкнуто относительно операций $\&, \vee, \supset$; $\neg x = \bot$ для $x \in \Phi$. Следовательно, $\Phi \cup \{\bot_{\mathbf{D}}\}$ образует подалгебру алгебры $\mathbf{D}$. Получаем, что $\mathbf{D}_1 = (\Phi \cup \{\bot\}, \&, \vee, \supset, \top, \bot)$ входит в $V(L')$ и $\mathbf{D}_1$ имеет вид $\mathbf{D}'_0$, где $\mathbf{D}_0 = (\Phi, \&, \vee, \supset, \top)$. Кроме того, ограничения δ_0 и ε_0 мономорфизмов δ и ε соответственно на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются мономорфизмами, согласованными на $\mathbf{A}$.

Обратно, предположим, что $V(L)$ амальгамируемо. Используем теорему 2.7. Пусть $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — вполне связные псевдобулевы алгебры из $V(L')$, $\mathbf{A}_0$ есть общая подалгебра $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Если одна из алгебр вырожденная, то остальные — тоже, поэтому вырожденная алгебра является и их общим расширением. Пусть все алгебры — невырожденные. По лемме 3.3, $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}'_i$, где $\mathbf{B}_i = \{x \in \mathbf{A}_i \mid x \neq \bot\}$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, кроме того, $\mathbf{B}_i \in V(L)$.

Поскольку $V(L)$ амальгамируемо, существуют $\mathbf{C} \in V(L)$ и мономорфизмы $\alpha : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}$, $\beta : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{C}$ такие, что $\alpha(z) = \beta(z)$ для всех $z \in \mathbf{B}_0$. Эти мономорфизмы можно продолжить до мономорфизмов α' и β' из $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ в $\mathbf{C}'$, согласованных на $\mathbf{A}_0$. Ясно, что $\mathbf{C}' \in V(L')$.

(ii) Предположим, что $V(L')$ имеет SES. Пусть $\mathbf{A}$ — подалгебра импликативной решетки $\mathbf{B}$ из $V(L)$ и $b \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$. Тогда псевдобулевы алгебры $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ принадлежат $V(L')$, $\mathbf{A}'$ является подалгеброй $\mathbf{B}'$ и $b \in \mathbf{B}' \setminus \mathbf{A}'$. Так как $V(L')$ имеет SES, существуют $\mathbf{D} \in V(L')$ и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(b) \neq \varepsilon(b)$ и $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Как и в случае (i), рассмотрим $\Phi = \{x \in \mathbf{D} \mid \neg\neg x = \top\}$. Тогда Φ содержит множество $\delta(\mathbf{B}) \cup \varepsilon(\mathbf{B})$. Как было доказано в (i), $\mathbf{D}_1 = (\Phi \cup \cup\{\bot\}, \&, \vee, \supset, \top, \bot)$ входит в $V(L')$ и имеет вид $\mathbf{D}_0'$, где $\mathbf{D}_0 = (\Phi, \&, \vee, \supset, \top)$. Кроме того, ограничения δ_0 и ε_0 мономорфизмов δ и ε соответственно на $\mathbf{B}$ являются гомоморфизмами, согласованными на $\mathbf{A}$, а $\delta_0(b) \neq \varepsilon_0(b)$.

Обратно, пусть $V(L)$ имеет SES. Докажем, что $V(L')$ имеет SES. Применим критерий из теоремы 2.8, т. е. покажем, что: 1) $V(L')$ имеет RAP и 2) семейство финитно неразложимых алгебр из $V(L')$ имеет SES.

1) Пусть $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — подпрямо неразложимые псевдобулевы алгебры из $V(L')$, $\mathbf{A}_0$ есть общая подалгебра $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, ω — общий предпоследний элемент всех трех алгебр. Если $\omega = \bot$, то все три алгебры изоморфны двухэлементной булевой алгебре B_0, которая и является их общим расширением. Рассмотрим случай $\omega \neq \bot$. По лемме 3.3, $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i'$, где $\mathbf{B}_i = \{x \in \mathbf{A}_i \mid x \neq \bot\}$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, и ω является предпоследним элементом во всех трех алгебрах; кроме того, $\mathbf{B}_i \in V(L)$. Поскольку $V(L)$ имеет RAP, существуют $\mathbf{C} \in V(L)$ и мономорфизмы $\alpha : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}$, $\beta : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{C}$ такие, что $\alpha(z) = \beta(z)$ для всех $z \in \mathbf{B}_0$ и $\alpha(\omega)$ — предпоследний элемент в $\mathbf{C}$. Эти мономорфизмы можно продолжить до мономорфизмов α' и β' из $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ в $\mathbf{C}'$, согласованных на $\mathbf{A}_0$. Ясно, что $\mathbf{C}' \in V(L')$.

2) Пусть $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ — вполне связные псевдобулевы алгебры из $V(L')$, где $\mathbf{A}_0$ есть подалгебра $\mathbf{A}_1$, $b \in \mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_0$. Снова по лемме 3.3 получаем $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i'$, $\mathbf{A}_i \in V(L)$ для $i = 0, 1$. Так как $b \notin \mathbf{A}_0$, то $b \neq \bot$ и $b \in \mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_0$. Поскольку $V(L)$ имеет SES, существуют $\mathbf{C} \in V(L)$ и гомоморфизмы γ

и β из $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{C}$ такие, что $\gamma(z) = \beta(z)$ для всех $z \in \mathbf{B}_0$ и $\gamma(b) \neq \beta(b)$. Тогда $\mathbf{C}' \in V(L')$; можно продолжить γ и, β до согласованных на $\mathbf{A}_0$ гомоморфизмов γ' и β' из $\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{C}'$.

В качестве следствия теорем 2.7, 2.8 и леммы 3.6 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7 *Пусть L — позитивная логика из $E(J^+)$, $L' = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p) + \{A' | A \in L\}$, где A' получается из A подстановкой $(x \vee \neg x)$ вместо каждой переменной x формулы A. Тогда*

(i) *L имеет* CIP $\Leftrightarrow$ *L' имеет* CIP;

(ii) *L имеет* PBP $\Leftrightarrow$ *L' имеет* PBP.

Предложение 3.7 (i) было установлено в [3]; кроме того, там было показано, хотя и без подробного доказательства, что существуют точно три непротиворечивых позитивных логики с CIP. В следующем параграфе мы получим полный список позитивных логик с PBP.

§ 4. Позитивные логики с проективным свойством Бета

В [2] был найден полный список суперинтуицинистских логик и многообразий псевдобулевых алгебр с проективным свойством Бета и свойством SES. Непосредственным следствием из [2, теор. 6.4, 7.5] является

ТЕОРЕМА 4.1. *Существуют точно шестнадцать суперинтуиционистских логик с проективным свойством Бета, а именно,*

1) Int,

2) $KC = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p)$,

3) $LP_2 = \mathrm{Int} + (p \vee (p \supset q \vee \neg q))$,

4) $L(C_2) = LP_2 + ((p \supset q) \vee (q \supset p) \vee (p \equiv \neg q))$,

5) $Z_3 = LP_2 + KC$,

6) $LC = \mathrm{Int} + (p \supset q) \vee (q \supset p)$,

7) $Cl = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p)$,

8) $\mathrm{For} = \mathrm{Int} + \bot$,

9) $\Delta(KC) = \mathrm{Int} + q \vee (q \supset (\neg p \vee \neg\neg p))$,

10) $\Delta(LP_2) = \mathrm{Int} + r \vee (r \supset (p \vee (p \supset q \vee \neg q)))$,

11) $\Delta(L(C_2)) = \mathrm{Int} + r \vee (r \supset (p \vee (p \supset q \vee \neg q))) + r \vee (r \supset ((p \supset \supset q) \vee (q \supset p) \vee (p \equiv \neg q)))$,

12) $\Delta(Z_3) = \mathrm{Int} + r \vee (r \supset (p \vee (p \supset q \vee \neg q))) + r \vee (r \supset (\neg p \vee \neg\neg p))$,

13) $\Delta(LC) = \mathrm{Int} + r \vee (r \supset (p \supset q) \vee (q \supset p))$,

14) $\Delta(LP_2) + KC = KC + r \vee (r \supset (p \vee (p \supset q \vee \neg q)))$,

15) $\Delta(LC) + KC = KC + r \vee (r \supset (p \supset q) \vee (q \supset p))$,

16) $Z_4 = LC + r \vee (r \supset (p \vee (p \supset q \vee \neg q)))$.

Обозначим через $H_1, \ldots, H_{16}$ многообразия псевдобулевых алгебр, соответствующие логикам из теоремы 4.1. Все они и только они обладают свойством SES. Напомним, что список $H_1, \ldots, H_8$ состоит из тех и только тех многообразий псевдобулевых алгебр, которые обладают свойством амальгамируемости AP, и что AP разрешимо на классе конечно базируемых многообразий псевдобулевых алгебр [13].

Из указанного списка лишь семь нетривиальных многообразий удовлетворяют тождеству $\neg x \vee \neg\neg x = \top$, а именно, H_2, H_5, H_6, H_7, H_{14}, H_{15}, H_{16}. Поэтому число позитивных логик с PBP не превосходит семи.

Напомним некоторые обозначения из [2]. Через B_0 обзначаем двухэлементную булеву алгебру, через L_n — линейно упорядоченную псевдобулеву алгебру из n элементов. Для псевдобулевой алгебры $\mathbf{A}$ через $B_0 + \mathbf{A}$ (соответственно, $\mathbf{A} + B_0$) обозначается псевдобулева алгебра, возникающая из $\mathbf{A}$ присоединением нового наименьшего (соответственно, наибольшего) элемента. Псевдобулева алгебра C_n получается присоединением нового наибольшего элемента к n-атомной булевой алгебре B_0^n, а B_{n+1} — одновременным присоединением нового наибольшего и нового наименьшего элементов к B_0^n.

В [20] приведена следующая характеризация многообразий $H_1, \ldots, H_{16}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Многообразия $H_1, \ldots, H_{16}$ порождаются следующими классами конечных псевдобулевых алгебр*:

H_1 — *всеми конечными псевдобулевыми алгебрами*,

H_2 — *конечными алгебрами вида $B_0 + \mathbf{A} + B_0$, где $\mathbf{A}$ — конечная псевдобулева алгебра*,

H_3 — алгебрами C_n для $n \geqslant 1$,

H_4 — алгеброй C_2,

H_5 — алгеброй L_3,

H_6 — алгебрами L_n для $n \geqslant 2$,

H_7 — алгеброй B_0,

H_8 — вырожденной булевой алгеброй,

H_9 — алгебрами вида $((B_0 + \mathbf{A}_1) \times \ldots \times (B_0 + \mathbf{A}_k)) + B_0$, где $k \geqslant 1$ и $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ — конечные псевдобулевы алгебры,

H_{10} — алгебрами $(C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k}) + B_0$ для любого $k \geqslant 1$ и произвольных $n_1, \ldots, n_k$,

H_{11} — алгебрами $C_2^n + B_0$ для $n \geqslant 1$,

H_{12} — алгебрами $L_3^n + B_0$ для $n \geqslant 1$,

H_{13} — алгебрами $(L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0$ для любых $k \geqslant 1$ и произвольных $n_1, \ldots, n_k$,

H_{14} — алгебрами B_n для $n \geqslant 0$,

H_{15} — алгебрами $B_0 + (L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0$ для любых $k \geqslant 1$ и произвольных $n_1, \ldots, n_k$,

H_{16} — алгеброй L_4.

Рассмотрим многообразия $H_1^+, H_3^+, H_5^+, H_6^+, H_7^+, H_8^+, H_{13}^+$. Ясно, что если многообразие V порождается некоторым классом K, то V^+ порождается классом $K^* = \{\mathbf{A}^* \mid \mathbf{A} \in K\}$. Поэтому указанные многообразия порождаются классами K_i^*, где K_i — приведенные в предложении 4.2 классы, порождающие многообразия H_i. Вследствие леммы 3.5 многообразия $(H_i^+)'$ порождаются классами $K_i^{*\prime}$. Заметим, что если $\mathbf{A}$ — конечная псевдобулева алгебра, то $(\mathbf{A}^*)' = B_0 + \mathbf{A}$. В частности, $(C_n^*)' = B_{n+1}$, $(L_n^*)' = L_{n+1}$, $(B_0^*)' = L_3$, $((L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0)^{*\prime} = B_0 + (L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0$. Поэтому

класс $K_1^{*\prime}$ порождает многообразие H_2,

класс $K_3^{*\prime}$ — многообразие H_{14},

класс $K_5^{*\prime}$ — многообразие H_{16},

класс $K_6^{*\prime}$ — многообразие H_6,

класс $K_7^{*\prime}$ — многообразие H_5, класс ${K_8^*}'$ — многообразие H_7,

класс ${K_{13}^*}'$ — многообразие H_{15}.

Отсюда, ${H_1^+}' = H_2$, ${H_3^+}' = H_{14}$, ${H_5^+}' = H_{16}$, ${H_6^+}' = H_6$, ${H_7^+}' = H_5$, ${H_8^+}' = H_7$, ${H_{13}^+}' = H_{15}$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4.3. *Существуют в точности семь многообразий импликативных решеток со свойством* SES, *а именно,* H_1^+, H_3^+, H_5^+, H_6^+, H_7^+, H_8^+, H_{13}^+. *Многообразия* H_1^+, H_6^+, H_7^+, H_8^+ *амальгамируемы, а остальные — нет.*

Приведем аксиоматизацию соответствующих позитивных логик.

ТЕОРЕМА 4.4. *В* $E(J^+)$ *существуют в точности семь позитивных логик с проективным свойством Бета, а именно,*

(1) $J^+ = \mathrm{Int}^+$,

(2) $LC^+ = J^+ + (p \supset q) \vee (q \supset p)$,

(3) $Cl^+ = J^+ + p \vee (p \supset q)$,

(4) $\mathrm{For}^+ = J^+ + p$,

(5) $\Delta(LC)^+ = J^+ + r \vee (r \supset (p \supset q) \vee (q \supset p))$,

(6) $LP_2^+ = J^+ + (p \vee (p \supset q \vee (q \supset r)))$,

(7) $Z_3^+ = J^+ + (p \vee (p \supset q) \vee (q \supset r))$.

Первые четыре логики обладают интерполяционным свойством, а остальные — нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать, что суперинтуиционистские логики из теоремы 4.1 с номерами 3, 5—8, 13 могут быть аксиоматизированы добавлением к Int позитивных аксиом, соответственно,

3) $(p \vee (p \supset q \vee (q \supset r)))$,

5) $(p \vee (p \supset q) \vee (q \supset r))$,

6) $(p \supset q) \vee (q \supset p)$,

7) $p \vee (p \supset q)$,

8) p,

13) $r \vee (r \supset (p \supset q) \vee (q \supset p))$.

В [9] доказано, что если суперинтуиционистская логика L аксиоматизируема добавлением к Int позитивных формул, то ее позитивный фрагмент L^+ аксиоматизируем над Int^+ теми же формулами. Поэтому указанные в теореме логики (1)—(7) характеризуются многообразиями H_1^+, H_6^+, H_7^+, H_8^+, H_{13}^+, H_3^+, H_5^+ соответственно. Таким образом, требуемое утверждение следует из теоремы 4.3.

Отметим, что логика $J^+ = \mathrm{Int}^+$ полна относительно моделей Крипке $\mathbf{M} = (W, \leq, \models)$, где W — непустое множество, $\leq$ — частичный порядок на W, а $\models$ удовлетворяет условиям:

(K1) если $x \models p$ и $x \leq y$, то $y \models p$ для любой переменной p;

(K2) $x \models (A \supset B) \Leftrightarrow \forall y((x \leq y$ и $y \models A) \Rightarrow y \models B)$;

(K3) $x \models (A\&B) \Leftrightarrow (x \models A$ и $x \models B)$;

(K4) $x \models (A \vee B) \Leftrightarrow (x \models A$ или $x \models B)$.

Логика LC^+ характеризуется линейно упорядоченными моделями, а Cl^+ — моделями с одноэлементным множеством W. Далее, $\Delta(LC)^+$ определяется моделями, удовлетворяющими условию

$$(x < y \leq u \text{ и } x < y \leq v) \Rightarrow (u \leq v \text{ или } v \leq u),$$

LP_2^+ — моделями без трехэлементных цепей, а Z_3^+ характеризуется двухэлементной цепью.

Сравнивая теоремы 4.4 и 4.1, видим, что для некоторых суперинтуиционистских логик с CIP их позитивные фрагменты не имеют этого свойства. Таковы логики LP_2, $L(C_2)$, Z_3. Значит, для каждой из указанных логик существует выводимая в ней позитивная импликация, не имеющая позитивного интерполянта. Далее, суперинтуиционистские логики $L(C_2)$, $\Delta(LP_2)$, $\Delta(L(C_2))$, $\Delta(Z_3)$, $\Delta(LP_2) + KC$, Z_4 имеют PBP, но их позитивные фрагменты его не имеют. При этом почти все указанные логики позитивно аксиоматизируемы. Более того, существует позитивно аксиоматизируемая суперинтуиционистская логика с CIP, позитивный фрагмент которой не имеет даже PBP (это логика $L(C_2)$). (Заметим, что $KC^+ = \Delta(KC)^+ = \mathrm{Int}^+$, $(\Delta(LC) + KC)^+ = \Delta(LC)^+$.)

Свойства CIP и PBP разрешимы на классе суперинтуиционистских логик [13, 20]. Это означает, что существует алгоритм, который для любого конечного множества Ax схем аксиом определяет, обладает ли логика

Int$+Ax$ указанным свойством. Мы докажем разрешимость этих свойств на классе $E(J^+)$. Заметим, что сведение позитивных логик к суперинтуиционистским, указанное в предложении 3.7, не дает эффективного способа построения конечной аксиоматизации для L' по данной системе аксиом позитивной логики L.

ТЕОРЕМА 4.5. *Интерполяционное свойство и проективное свойство Бета разрешимы на классе $E(J^+)$ позитивных логик.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что конечное множество аксиом можно заменить их конъюнкцией. В силу теоремы 4.4 мы должны указать алгоритм, который по любой позитивной формуле A решает, совпадает ли логика $J^+ + A$ с одной из семи логик L_i, перечисленных в этой теореме. Поскольку все эти логики конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы, можно эффективно проверить выводимость A в каждой из этих логик. Тем самым решается проблема включения $J^+ + A \subseteq L_i$ для всех i.

С другой стороны, требуется проверить включение $J^+ + A \supseteq L_i$ для всех i. По предложению 1,1 для любой позитивной формулы A справедливо соотношение $(\mathrm{Int} + A)^+ = \mathrm{Int}^+ + A$, отсюда $(\mathrm{Int} + A)^+ = J^+ + A$. Поэтому для любых позитивных формул A и B имеем

$$J^+ + A \supseteq J^+ + B \Leftrightarrow \mathrm{Int} + A \supseteq \mathrm{Int} + B.$$

В [13] было доказано, что для любой формулы A

$$\mathrm{Int} + A \supseteq LC \Leftrightarrow C_2 \not\models A \text{ и } B_3 \not\models A,$$

$$\mathrm{Int} + A \supseteq Cl \Leftrightarrow L_3 \not\models A,$$

$$\mathrm{Int} + A \supseteq \mathrm{For} \Leftrightarrow B_0 \not\models A,$$

$$\mathrm{Int} + A \supseteq LP_2 \Leftrightarrow L_4 \not\models A,$$

$$\mathrm{Int} + A \supseteq Z_3 \Leftrightarrow (L_4 \not\models A \text{ и } C_2 \not\models A).$$

Кроме того, в [20] установлено, что

$$\mathrm{Int} + A \supseteq \Delta(LC) \Leftrightarrow (C_2 + B_0) \not\models A.$$

Поскольку логика LC позитивно аксиоматизируема, для любой позитивной формулы A имеем

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq LC^+ \Leftrightarrow \mathrm{Int} + A \supseteq LC,$$

следовательно,

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq LC^+ \Leftrightarrow C_2 \not\models A \text{ и } B_3 \not\models A \Leftrightarrow C_2^* \not\models A \text{ и } B_3^* \not\models A.$$

Учитывая, что C_2^* является подалгеброй алгебры B_3^*, заключаем:

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq LC^+ \Leftrightarrow C_2^* \not\models A.$$

Аналогично, для любой позитивной формулы A

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq Cl^+ \Leftrightarrow L_3^* \not\models A,$$

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq \mathrm{For}^+ \Leftrightarrow B_0^* \not\models A,$$

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq LP_2^+ \Leftrightarrow L_4^* \not\models A,$$

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq Z_3^+ \Leftrightarrow (L_4^* \not\models A \text{ и } C_2^* \not\models A),$$

$$\mathrm{Int}^+ + A \supseteq \Delta(LC)^+ \Leftrightarrow (C_2 + B_0)^* \not\models A.$$

Таким образом, для каждой позитивной логики L_i с PBP проверка включения $J^+ + A \supseteq L_i$ сводится к проверке, будет ли формула A опровергаться на одной или двух конечных импликативных решетках. Поэтому свойства PBP и CIP разрешимы в $E(J^+)$.

§ 5. Расширения минимальной логики

В этом параграфе применим полученные выше результаты к расширениям минимальной логики Йохансона. Напомним, что язык логики J содержит константу $\perp$ в дополнение к основным логическим символам позитивной логики, однако J имеет те же схемы аксиом, что и J^+.

Прежде всего докажем два утверждения о сохранении свойств PBP и CIP.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пусть L — позитивная логика из $E(J^+)$. Если L имеет* PBP *(или* CIP*), то $J+L$ также имеет* PBP *(соответственно,* CIP*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой вывод формулы $A \supset B$ в $J+L$ можно преобразовать в вывод в L подходящей позитивной формулы $A^* \supset B^*$, заменяя $\bot$ на новую переменную p. Мы получим интерполянт формулы $A \supset B$ в $J+L$ из интерполянта формулы $A^* \supset B^*$ в L, подставляя $\bot$ вместо p. Доказательство для PBP аналогично.

Отсюда, в частности, следует, что сама логика J и любое ее расширение с помощью одной из схем аксиом (2)—(7) теоремы 4.4 имеет PBP.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если $L \in E(J)$ имеет* CIP *(или* PBP*), то следующие логики также имеют* CIP *(соответственно,* PBP*): $L+\bot$, $L+(\bot \vee (\bot \supset p))$, $L+(\bot \vee ((\bot \supset p)\&(\neg p \vee \neg\neg p)))$, $L+(\bot \supset p)$, $L+((\bot \supset$ $\supset p)\&(\neg p \vee \neg\neg p))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что любая из указанных дополнительных аксиом $A(p)$ является *L-консервативной* [2], т. е. формулы

$$A(p)\&A(q) \supset A(p\&q), A(p)\&A(q) \supset A(p \vee q), A(p)\&A(q) \supset A(p \supset q)$$

выводимы в L, так как они выводимы в J. Можно показать, что свойства PBP и CIP сохраняются при добавлении к L любых L-консервативных формул в качестве новых схем аксиом.

Как мы видели в предыдущем параграфе, проективное свойство Бета и интерполяционное свойство не сохраняются при переходе от суперинтуиционистских логик к их позитивным фрагментам. Существуют даже суперинтуиционистские логики, позитивно аксиоматизируемые над Int и имеющие CIP, у которых позитивные фрагменты не имеют ни CIP, ни PBP. Для минимальной логики J ситуация иная.

ТЕОРЕМА 5.3. *Если Ax — множество позитивных формул, то эквивалентны следующие условия:*

(1) *$J+Ax$ имеет* CIP *(соответственно,* PBP*);*

(2) *$J+\bot+Ax$ имеет* CIP *(соответственно,* PBP*);*

(3) *позитивная логика* $J^+ + Ax$ *имеет* CIP (*соответственно,* PBP).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) следует (1) по предложению 5.1, а из (1) следует (2) по предложению 5.2.

(2)⇒(3). Пусть $A \supset B$ — позитивная формула, выводимая в $J^+ + Ax$. Она выводима и в $J + \bot + Ax$, а следовательно, имеет интерполянт C в $J + \bot + Ax$. Заменим в выводах формул $A \supset C$ и $C \supset B$ в $J + \bot + Ax$ констату $\bot$ константой $\top$. Тогда аксиомы логики $J + \bot + Ax$ перейдут в аксиомы логики $J^+ + Ax$, а следовательно, позитивные формулы $A \supset C^*$ и $C^* \supset B$ будут выводимы в $J^+ + Ax$, где C^* получается из C в результате указанной замены. Свойство PBP рассматривается аналогично.

Из этой теоремы с учетом теорем 4.5 и 4.4 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 5.4. (i) *Минимальная логика* J *имеет в точности семь позитивно аксиоматизируемых расширений с проективным свойством Бета, четыре из них обладают интерполяционным свойством.*

(ii) *Свойства* PBP *и* CIP *разрешимы на классе позитивно аксиоматизируемых расширений минимальной логики.*

ТЕОРЕМА 5.5. (i) *Существуют точно семь расширений логики* $J^\bot = J + \bot$ *с* PBP, *из них в точности четыре логики обладают* CIP.

(ii) *Свойства* CIP *и* PBP *разрешимы в* $E(J^\bot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $J^\bot \vdash \bot \equiv \top$. В силу теоремы о замене по любой аксиоматизации логики $J^\bot + Ax$ эффективно строится ее позитивная аксиоматизация над $J^\bot$: достаточно заменить $\bot$ на $\top$ в формулах из Ax. Тогда п. (i) сразу вытекает из теорем 5.3 и 4.4, а (ii) — из теоремы 4.5.

ТЕОРЕМА 5.6. *Пусть* $L_1 \in E(J^\bot)$ *и* $L_2 \in E(\mathrm{Int})$.

(i) $L_1 \cap L_2$ *имеет* CIP *в том и только том случае, если одновременно* L_1 *и* L_2 *имеют* CIP.

(ii) $L_1 \cap L_2$ *имеет* PBP *в том и только том случае, еслиа одновременно* L_1 *и* L_2 *имеют* PBP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию выполняется $L_1 \vdash \bot$ и $L_2 \vdash \bot \supset p$.

(i) Пусть $L_1 \cap L_2$ имеет CIP. Если $L_1 \vdash (A(P,Q) \supset B(P,R))$, то

$L_1 \cap L_2 \vdash ((A(P,Q)\&\bot) \supset B(P,R))$. Поэтому существует формула $C(P)$ такая, что $L_1 \cap L_2 \vdash ((A(P,Q)\&\bot) \supset C(P))$ и $L_1 \cap L_2 \vdash (C(P) \supset B(P,R))$. Отсюда $L_1 \vdash (A(P,Q) \supset C(P))$ и $L_1 \vdash (C(P) \supset B(P,R))$.

Если $L_2 \vdash (A(P,Q) \supset B(P,R))$, то $L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q) \supset (\bot \vee B(P,R)))$. Поэтому существует формула $C(P)$ такая, что $L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q) \supset C(P))$ и $L_1 \cap L_2 \vdash (C(P) \supset (\bot \vee B(P,R)))$. Отсюда $L_2 \vdash (A(P,Q) \supset C(P))$ и $L_2 \vdash (C(P) \supset B(P,R))$.

Обратно, предположим, что L_1 и L_2 имеют CIP и $L_1 \cap L_2 \vdash$ $\vdash (A(P,Q) \supset B(P,R))$. Заметим: если $C_1(P)$ и $C_2(P)$ — интерполянты формулы $(A(P,Q) \supset B(P,R))$ в L_1 и L_2 соответственно, то

$$(\bot \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \bot)$$

является интерполянтом этой же формулы в $L_1 \cap L_2$.

В самом деле, верно

$$L_1 \vdash (\bot \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \bot) \equiv C_1(P), \tag{3}$$

$$L_2 \vdash (\bot \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \bot) \equiv C_2(P). \tag{4}$$

Поэтому

$$L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q) \supset (\bot \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \bot),$$

$$L_1 \cap L_2 \vdash ((\bot \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \bot) \supset B(P,R)).$$

(ii) Пусть $L_1 \cap L_2$ имеет PBP. Допустим, что $L_1 \vdash (A(P,Q,x)\&$ $\&A(P,Q',y)) \supset (x \equiv y)$. Тогда $L_1 \cap L_2 \vdash (\bot\&A(P,Q,x)\&A(P,Q',y)) \supset$ $\supset (x \equiv y)$. Поэтому существует $C(P)$ такая, что $L_1 \cap L_2 \vdash (\bot\&A(P,Q,x)) \supset$ $\supset (x \equiv C(P))$ и $L_1 \vdash A(P,Q,x) \supset (x \equiv C(P))$.

Если $L_2 \vdash (A(P,Q,x)\&A(P,Q',y)) \supset (x \equiv y)$, то

$$L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q,x)\&A(P,Q',y)\&(x \equiv x \vee \bot)\&(y \equiv y \vee \bot) \supset (x \equiv y).$$

Следовательно,

$$L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q,x)\&(x \equiv x \vee \bot)) \supset (x \equiv C(P))$$

для некоторой формулы $C(P)$. Получаем $L_2 \vdash A(P,Q,x) \supset (x \equiv C(P))$.

Обратно, предположим, что L_1 и L_2 имеют PBP и

$$L_1 \cap L_2 \vdash (A(P,Q,x)\&A(P,Q',y)) \supset (x \equiv y).$$

Если $C_1(P)$ и $C_2(P)$ — явные определения в L_1 и L_2, соответственно, то, в силу (3), (4),

$$(\perp \supset C_1(P))\&(C_2(P) \vee \perp)$$

является явным определением в $L_1 \cap L_2$.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. (i) *Логика* $J + \perp \vee (\perp \supset p)$ *имеет точно* 112 *расширений с* PBP, *из них точно* 32 *логики имеют* CIP.

(ii) *Свойства* CIP *и* PBP *разрешимы в* $E(J + \perp \vee (\perp \supset p))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $L_1 \in E(J^{\perp})$ и $L_2 \in E(\mathrm{Int})$, то $L_1 \cap L_2 \in E(J+\perp\vee(\perp \supset p))$. Можно показать, что пересечения $L_1 \cap L_2$ различны для различных пар L_1, L_2. С другой стороны, любое расширение L логики $J+\perp\vee(\perp \supset p)$ представимо как пересечение логик $L_1 = J^{\perp} + L \in E(J^{\perp})$ и $L_2 = \mathrm{Int} + L \in E(\mathrm{Int})$. В силу теорем 5.6, 4.7 и 5.5, число расширений логики $J+\perp\vee(\perp \supset p)$ с PBP равно $7 \cdot 16 = 112$, а число расширений с CIP равно $4 \cdot 8 = 32$. Разрешимость следует из теоремы 5.6 и разрешимости указанных свойств в $E(\mathrm{Int})$ и $E(J^{\perp})$, поскольку логика $J + \perp \vee (\perp \supset p) + A$ обладает свойством PBP (CIP) тогда и только тогда, когда обе логики $J^{\perp} + A$ и $\mathrm{Int} + A$ имеют PBP (CIP).

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. W. Beth*, On Padoa's method in the theory of definitions, Indag. Math., **15**, N 4 (1953), 330—339.
2. *L. Maksimova*, Intuitionistic logic and implicit definability, Ann. Pure Appl. Logic, **105**, N 1-3 (2000), 83—102.
3. *Л. Л. Максимова*, Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия, Доклады АН СССР, **237**, N 6 (1977), 1281—1284.
4. *Л. Л. Максимова*, Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках, Алгебра и логика, **38**, N 3 (1999), 316—333.
5. *G. Kreisel*, Explicit definability in intuitionistic logic, J. Symb. Log., **25**, N 4 (1960), 389—390.

6. *W. Craig*, Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, J. Symb. Log., **22** (1957), 269—285.
7. *I. Johansson*, Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, Compos. Math., **4** (1937), 119—136.
8. *Х. Расева, Р. Сикорский*, Математика метаматематики, М., Наука, 1972.
9. *М. И. Верхозина*, Промежуточные позитивные логики, в сб.: Алгоритмические вопросы алгебраических систем, Иркутск, 1978. 13—25.
10. *K. Segerberg*, Propositional logics related to Heyting's and Johansson's, Theoria, **34** (1968), 26—61.
11. *W. Rautenberg*, Klassische und nicht-klassische Aussagenlogik, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg, 1979.
12. *S. Odintsov*, On j-algebras and j-frames, Intern. Maltsev conference on Math. Logic, Abstracts, Novosibirsk, 1999, 101—102.
13. *Л. Л. Максимова*, Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр, Алгебра и логика, **16**, N 6 (1977), 643—681.
14. *Л. Л. Максимова*, Суперинтуиционистские логики и проективное свойство Бета, Алгебра и логика, **38**, N 6 (1999), 680—696.
15. *E. Hoogland*, Algebraic characterisations of various Beth definability properties, Stud. Log., **65**, N 1 (2000), 91—112.
16. *Л. Л. Максимова*, Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр, Алгебра и логика, **18**, N 5 (1979), 556—586.
17. *J. Czelakowski*, Logical matrices and the amalgamation property, Stud. Log., **41**, N 4 (1982), 329—341.
18. *I. Sain*, Beth's and Craig's Properties via Epimorphisms and Amalgamation in Algebraic Logic, in: *C. H. Bergman, R. D. Maddux, D. I. Pigozzi* (ed), Algebraic Logic and Universal Algebra in Computer Science (Lect. Notes Comput. Sci., **425**), Berlin a. o., Springer-Verlag, 1990, 209—226.
19. *J. Czelakowski, D. Pigozzi*, Amalgamation and Interpolation in Abstract Algebraic Logic, in: Models, Algebras and Proofs, Selected papers of the X Latin American Symposium on Mathematical Logic held in Bogota, New York, Marcel Dekker Inc., 1999, 187—265.

20. *Л. Л. Максимова*, Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр, Алгебра и логика, **40**, N 3 (2001), 290—301.

Поступило 7 февраля 2001 г.

Адрес автора:

МАКСИМОВА Лариса Львовна,

РОССИЯ,

630090, г. Новосибирск,

пр. Ак. Коптюга, 4,

Институт математики СО РАН.

e-mail: lmaksi@math.nsc.ru