М. И. Островский, Задача трех пространств для слабого свойства Банаха–Сакса,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 721–725

https://www.mathnet.ru/mzm5585

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

ЗАДАЧА ТРЕХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ СЛАБОГО СВОЙСТВА БАНАХА — САКСА

М. И. Островский

«Задачей трех пространств» для некоторого свойства A банахова пространства называется задача о том, влечет ли наличие свойства A у двух из трех пространств X, Y, X/Y (Y — замкнутое подпространство в X, X/Y — соответствующее фактор-пространство) наличие его у третьего. Такие задачи рассматривались в работах [1—4].

В работе [3] рассматривалась «задача трех пространств» для слабого свойства Банаха—Сакса. Напомним, что, по определению [5, с. 39], банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in WBS$), если каждая слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_n\} \subset X$ содержит подпоследовательность $\{y_n\}$, такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} y_k\right\|_X = 0.$$

«Задача трех пространств» для свойства WBS состоит в выяснении справедливости следующих трех импликаций:

а) X, $X/Y \in \mathrm{WBS} \Rightarrow Y \in \mathrm{WBS}$;
в) X, $Y \in \mathrm{WBS} \Rightarrow X/Y \in \mathrm{WBS}$;
с) Y, $X/Y \in \mathrm{WBS} \Rightarrow X \in \mathrm{WBS}$.

Очевидно, что импликация а) справедлива, так как свойство WBS наследуется подпространствами. В работе

[3] было установлено, что импликация в), вообще говоря, неверна, но имеет место при дополнительном предположении, что X не содержит подпространств, изоморфных l_1. Что касается импликации с), то в [3] была установлена ее справедливость при дополнительном предположении о рефлексивности пространства X, а в [4] — при дополнительном предположении, что X не содержит подпространств, изоморфных l_1. Вопрос о ее справедливости в общем случае оставался, насколько нам известно, открытым. Целью настоящей заметки является отрицательный ответ на него.

ТЕОРЕМА. *Существует тройка пространств X, Y, X/Y, для которых импликация* с) *не имеет места.*

Чтобы построить искомую тройку, нам понадобится пространство Шрейера. Напомним его конструкцию [5, с. 97].

Множество $A = \{n_1, \ldots, n_k\} \subset \mathbf{N}$ с $n_1 < \ldots < n_k$ назовем допустимым, если $k \leqslant n_1$. Обозначим через B множество всех допустимых подмножеств в $\mathbf{N}$. Пространство Шрейера S — это пополнение множества финитных последовательностей вещественных чисел по норме

$$\| x \|_S = \sup_{A \in B} \sum\nolimits_{i \in A} | x(i) |$$

(через $x(i)$ мы обозначаем i-й член последовательности x).

Из свойств пространства S нам понадобятся следующие два: 1) $S \notin \mathrm{WBS}$; 2) каноническое вложение C: $S \to c_0$ ограничено и имеет единичную норму.

Положим $X = (l_1 \oplus S)_1$. Для построения подпространства $Y \subset X$ обозначим через T произвольное фактор-отображение l_1 на c_0 (такое, как известно [6, с. 108], существует) и рассмотрим оператор F: $X \to c_0$, действующий по формуле $F(x_1, x_2) = Tx_1 + Cx_2$, где $x_1 \in l_1$, $x_2 \in S$.

Легко убедиться, что оператор F отображает единичный шар пространства X на плотное подмножество единичного шара c_0 и поэтому является фактор-отображением. Положим $Y = \mathrm{Ker}\, F$. В силу сказанного выше имеем $X/Y = c_0$.

Так как $S \notin \mathrm{WBS}$, то и $X \notin \mathrm{WBS}$. Легко видеть, что $c_0 \in \mathrm{WBS}$, следовательно, $X/Y \in \mathrm{WBS}$. Поэтому справедливость теоремы вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА. $\mathrm{Ker}\, F \in \mathrm{WBS}$.

Для ее доказательства нам понадобятся следующие факты.

Предложение А ([7], см., также, [5, с. 5—8]). *Пусть* $\{x_n\}$ — *ограниченная последовательность в банаховом пространстве* Z, *не имеющая подпоследовательностей Коши. Существует подпоследовательность* $\{e_n\} \subset \{x_n\}$ *и норма* L, *определенная на множестве* Q *финитных числовых последовательностей, такие, что для любого* $a = \{a_i\} \in Q$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\nu = \nu(a, \varepsilon) \in \mathbf{N}$, *для которого*

$$\left| \left\| \sum_i a_i e_{n_i} \right\|_Z - L(a) \right| < \varepsilon$$

при любых $\nu \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ *Пополнение* Q *по норме* L *называется* [5] *растягивающей моделью* (*р. м.*) *пространства* Z *с фундаментальной последовательностью* (*ф. п.*) $\{e_n\}$.

Нам понадобятся два очевидных утверждения о р.м.:

α) подпоследовательность ф.п. р.м. является ф.п. некоторой р.м., канонически изометричной исходной;

β) то же можно утверждать и о любой последовательности $\{y_n\}$, для которой $\| e_n - y_n \|_Z \to 0$.

При помощи р.м. Бозами дал такую характеризацию свойства WBS.

ТЕОРЕМА Б [5, с. 50]. *Для того чтобы* $Z \notin$ WBS, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$ *у* Z *имелась р.м., ф.п. которой слабо сходится к нулю и имеют место неравенства*

$$(1 - \varepsilon) \sum |a_i| < L(a) < \sum |a_i|, \tag{1}$$

где $a \neq 0$.

Перейдем к доказательству леммы. Предположим, что она неверна. Используя теорему Б с $Z = \operatorname{Ker} F$, находим слабо сходящуюся к нулю последовательность $\{e_i\} \subset \operatorname{Ker} F$, являющуюся ф.п. для р.м., для которой выполнено условие (1). Имеем $e_i = (q_i, r_i)$, $q_i \in l_1$, $r_i \in S$, причем $\{q_i\}$ и $\{r_i\}$ слабо сходятся к нулю. Поскольку в l_1 сильная и слабая сходимость последовательностей эквивалентны [8, с. 59], имеем $\| q_i \|_{l_1} \to 0$, и, следовательно, $\| Tq_i \|_{c_0} \to 0$. Так как $(q_i, r_i) \in \operatorname{Ker} F$, то $\| Cr_i \|_{c_0} \to 0$. Применив утверждение β) к последовательностям $\{(q_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{(0, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$, получим, что $\{r_i\}$ является ф.п. р.м. пространства S, удовлетворяющей условию (1). Поскольку $\{r_i\}$ слабо сходится к нулю, то существует последовательность $\{t_i\}$ дизъюнктных блоков канонического базиса пространства S (т. е. векторов вида $t_i = \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} \alpha_k s_k$,

$m_i \in \mathbf{N}$, $m_1 < m_2 < \ldots < m_i < \ldots$; $s_k = \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{\infty} \in S$), такая, что для некоторой подпоследовательности $\{r_{k_i}\} \subset \subset \{r_i\}$ имеем $\| t_i - r_{k_i} \|_S \to 0$. Используя утверждения α) и β), получаем, что $\{t_i\}$ является ф.п. некоторой р.м. пространства S, для которой имеет место (1). Из определения р.м. и из (1) следует, что

$$\limsup_{i\to\infty} \| t_i \|_S < 1. \tag{2}$$

Так как $\| Cr_i \|_{c_0} \to 0$, то

$$\| Ct_i \|_{c_0} \to 0. \tag{3}$$

Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1/2, 1/2, 0, 0, \ldots\}$. Из определения р.м. и соотношений (1), (2) следует, что существует ν, такое, что при любых i, j с $i > j \geqslant \nu$ имеем

$$\left\| \frac{1}{2} t_i + \frac{1}{2} t_j \right\|_S > 1 - \varepsilon, \tag{4}$$

$$\| t_j \|_S < 1. \tag{5}$$

Пусть p — номер последней ненулевой координаты вектора t_ν. Ввиду (3) найдется такое $i > \nu$, что все координаты $t_i(k)$ вектора t_i будут меньше $1/(2p)$. Оценим сверху $\| (1/2)t_\nu + (1/2)t_i \|_S$. Пусть A — произвольное допустимое множество. Если его первый элемент больше p, то, ввиду $t_\nu(k) = 0$ при $k > p$, имеем

$$\sum\nolimits_{k\in A} \left| \left(\frac{1}{2} t_\nu + \frac{1}{2} t_i \right)(k) \right| \leqslant \frac{1}{2} \| t_i \|_S < \frac{1}{2}.$$

Если же его первый элемент не превосходит p, то, используя (5) и $\operatorname{card} A \leqslant p$, получаем

$$\sum\nolimits_{k\in A} \left| \left(\frac{1}{2} t_\nu + \frac{1}{2} t_i \right)(k) \right| \leqslant \frac{1}{2} \sum\nolimits_{k\in A} |t_\nu(k)| + \frac{1}{2} \sum\nolimits_{k\in A} |t_i(k)| \leqslant \frac{1}{2} \| t_\nu \|_S + \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2p} < \frac{3}{4}.$$

Так что $\| (1/2)t_\nu + (1/2)t_i \|_S < \frac{3}{4}$. Выбрав $\varepsilon = 1/4$, приходим в противоречие с (4). Лемма доказана.

Выражаю благодарность М. И. Кадецу за научное руководство.

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

Поступило
14.03.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Enflo P., Lindenstrauss J., Pisier G. On the «three space problem».— Math. Scand., 1975, v. 36, № 2, p. 199—210.

[2] Раков С. А. Ультрапроизведения и «задача трех пространств».— Функц. анализ и его прил., 1977, т. 11, № 3, с. 88—89.

[3] Годун Б. В., Раков С. А. Свойство Банаха—Сакса и задача трех пространств.— Математические заметки, 1982, т. 31, вып. 1, с. 61—74.

[4] Островский М. И. Свойства Банаха—Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1985, т. 44, с. 69—78.

[5] Beauzamy B., Lapreste J. T. Modéles ètales des espaces de Banach.— Paris: Hermann, 1983.

[6] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I.— Berlin: Springer, 1977.

[7] Brunel A., Sucheston L. On *B*-convex Banach spaces.— Math. Systems Theory, 1973, v. 7, № 4, p. 294—299.

[8] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства.— М.: ИЛ, 1961.