R. I. Freidson, Regular approximations to the recursive predicates, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 220–233

Р.И.Фрейдзон

РЕГУЛЯРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕКУРСИВНЫХ ПРЕДИКАТОВ*)

Пусть фиксировано понятие машины (вычислительного процесса), эквивалентное понятию арифметической частично рекурсивной функции (ч.р.ф.) и мера сложности вычислений на машинах этого типа, удовлетворяющая аксиомам Блюма-Цейтина (см.например[1], п.3). Пусть Φ - общерекурсивная функция (о.р.ф.) и S - рекурсивный предикат, сложность вычисления которого на машинах указанного типа растет быстрее чем Φ . Рассмотрим последовательность машин M_1, $M_2, \ldots, M_n, \ldots$, такую, что каково бы ни было n , машина M_n вычисляет S для натуральных чисел $x \leqslant n$ со сложностью, не превосходящей $\Phi(x)$. Эту последовательность будем называть Φ -ограниченной аппроксимацией рекурсивного предиката S . Сложностью такой аппроксимации будем называть функцию, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие длину кода n-ого члена аппроксимации (длина кода определяется аксиоматически).

Сложность ограниченных аппроксимаций рекурсивно перечислимых предикатов исследовалась в [2] ,[3] . В данной заметке рассматривается одно из возможных уточнений задачи об ограниченных аппроксимациях рекурсивных предикатов и устанавливаются результаты, касающиеся сложности этих аппроксимаций. Подробно рассматривается случай, когда ограничения на сложность вычисления приводят к тому, что члены аппроксимирующей последовательности вырождаются в конечные автоматы.

1. Пусть (φ_i) - допустимая (в смысле [4]) геделевская нумерация ч.р.ф. Следуя [1] , каждой ч.р.ф. φ_i поставим в соответствие

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 20 ноября 1969 года.

ч.р.ф. Φ (функцию сложности вычисления φ_i) и натуральное число $|i|$ (длину записи φ_i), удовлетворяющие следующим аксиомам:

Аксиома I. Каково бы ни было натуральное число i , график функции Φ_i является рекурсивным множейством и выполняется условие $\forall n\,(!\,\Phi_i(n) \equiv\, !\,\varphi_i(n))$ (выражение вида $!\,f(n)$)служит сокращением для утверждения "ч.р.ф. f применима к числу n ").

Аксиома 2. Каково бы ни было число n , множество $\{i : |i| \leqslant n\}$ финитно (т.е. может быть эффективно задано в виде списка).

Посредством $h(n)$ будем обозначать число элементов множества $\{i : |i| \leqslant n\}$. Функцию φ будем называть представляющей функцией рекурсивного предиката S , если φ является о.р.ф. и $\forall x(\varphi(x) = 0 \equiv x \in S)$.

Будем считать, что для семейства функций (Φ_i) , кроме аксиомы I, выполняется также

Аксиома 3. Осуществима о.р.ф. Ψ , такая что если m есть номер представляющей функции финитного предиката, то

$$\exists j \forall x\,((\varphi_j(x)=0 \equiv \varphi_m(x)=0)\,\&\,\Phi_j(x) \leqslant \Psi(x)).$$

Нетрудно показать, что аксиома 3 независима от аксиомы I и выполняется, в частности, для класса машин Тьюринга, если за меру сложности вычислений взять число шагов работы машины или число используемых клеток ленты.

Пусть Φ - о.р.ф., такая что $\forall n\,(\Phi(n) \geqslant \Psi(n))$ и S - рекурсивный предикат, сложность вычисления которого растет быстрее чем Φ (т.е. если m - номер представляющей функции предиката S , то $\forall n \exists_{j>n}\, \Phi_m(j) > \Phi(j))$. В дальнейшем символ $\leftrightharpoons$ будет заменять слова "вводится в качестве обозначения". Пусть

$$\mathfrak{A}_S^{\Phi}(n,m) \leftrightharpoons \forall i_{\leqslant n}((i \in S \equiv \varphi_m(i)=0)\,\&\,\Phi_m(i) \leqslant \Phi(i)).$$

Общерекурсивную функцию $\varkappa$ будем называть Φ-о г р а н и ч е н н о й   а п п р о к с и м а ц и е й рекурсивного предиката S, если $\forall n\, \mathfrak{A}_S^{\Phi}(n, \varkappa(n))$. Φ-ограниченную аппроксимацию $\varkappa$ рекурсивного предиката S будем называть м и н и м а л ь н о й, если для любого n

$$|\varkappa(n)| = \min_{\mathfrak{A}_S^{\Phi}(n,j)} |j|$$

Пусть $\varkappa$ – минимальная Φ-ограниченная аппроксимация рекурсивного предиката S, $\mu_S(n) \leftrightharpoons |\varkappa(n)|$.

I.I. Покажем, что существует алгорифм, который по данной о.р.ф. Φ и рекурсивному предикату S строит минимальную Φ-ограниченную аппроксимацию $\varkappa$ предиката S. Зафиксируем предикат S и натуральное число n. Согласно аксиоме 3, можно построить натуральное число j, такое что $\mathfrak{A}_S^{\Phi}(n, j)$. Согласно аксиоме 2, множество $\{m : |m| \leq |j|\}$ финитно. Используя аксиому I, можно из этого множества выбрать те числа ℓ, для которых выполняется условие $\mathfrak{A}_S^{\Phi}(n, \ell)$; выберем среди них те числа ℓ' которых $|\ell'|$ наименьший (их может быть несколько). Положим $\varkappa(n)$ равным наименьшему из этих чисел. Из приведенных рассуждений видно, что $\varkappa$ есть о.р.ф. и является минимальной Φ-ограниченной аппроксимацией S.

Используя аксиомы I–3, можно показать, что существует о.р.ф. L, такая что каков бы ни был рекурсивный предикат S и каково бы ни было n, $\mu_S(n) \leq L(n)$.

С другой стороны, какова бы ни была неограниченная неубывающая о.р.ф. φ, можно построить рекурсивный предикат S с неограниченной областью истинности такой, что

$$\forall m \exists n_{>m}\, \mu_S(n) < \varphi(n).$$

I.2. Пусть g – двухместная о.р.ф., неубывающая по второму аргументу. Рекурсивный предикат S будем называть g-п р о с т ы м, если

$$\exists n \forall i \exists m_{\geq i}\, \mu_S(m) < g(n, m)$$

Введем ряд вспомогательных определений. Пусть S – рекурсивный предикат и φ – представляющая функция предиката S. Посредством $\alpha_S(n)$ обозначим

$$\sum_{i=0}^{n} \overline{sg}\,(\varphi(i))\cdot 2^{-i}.$$

Очевидно, что последовательность α_S конструктивно сходится и ее можно рассматривать как конструктивное вещественное число (в дальнейшем будем рассматривать только конструктивные вещественные числа). Сопоставляя каждому предикату S вещественное число α_S, получим отображение множества всех рекурсивных предикатов в множество всех вещественных чисел отрезка $[0,1]$. Образ семейства рекурсивных предикатов $\mathcal{K}$ при этом отображении будем обозначать посредством $\tilde{\mathcal{K}}$.

Множество вещественных чисел называется (см.[5], стр.473) **множеством меры нуль**, если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ осуществимо правильное ε –ограниченное покрытие этого множества.

Будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ рекурсивных предикатов **имеет меру нуль**, если $\tilde{\mathcal{K}}$ есть множество меры нуль.

<u>Теорема I.</u> **Пусть g – двухместная о.р.ф., неубывающая по второму аргументу, и каково бы ни было n, последовательность $\sum_{0\leq i\leq m} h(g(n,i))\cdot 2^{-i}$ конструктивно сходится. Тогда класс g -простых рекурсивных предикатов имеет меру нуль.**

<u>Доказательство</u>. Посредством $\mathfrak{N}_g^n$ обозначим класс всех рекурсивных предикатов, удовлетворяющих условию

$$\forall i \exists m_{>i}\ \mu_S(m) < g(n,m).$$

Посредством H_m^n обозначим класс тех рекурсивных предикатов R, у которых область истинности ограничена сверху числом m и $\mu_R(m) < g(n,m)$; посредством $a_n(m)$ обозначим число элементов множества H_m^n . Посредством $R_{m,i}$ обозначим i -ый предикат из H_m^n (здесь $1 \leq i \leq a_n(m)$).

Нетрудно показать что $\forall m (a_n(m) \leq h(g(n,m)))$. Следовательно, последовательность $\sum\limits_{0 \leq i \leq m} a_n(i) \cdot 2^{-i}$ сходится конструктивно.

Пусть $\alpha_{m,i} \leftrightharpoons \alpha_{R_{m,i}}$, $\Delta_{m,i} \leftrightharpoons [\alpha_{m,i} ; \alpha_{m,i} + 2^{-m}]$.

Длину промежутка Δ будем обозначать посредством $\bar{\Delta}$. Зафиксируем рациональное число $\varepsilon > 0$. Пусть N – натуральное число, такое что $\forall \ell (\sum\limits_{N \leq i \leq \ell} a_n(i) \cdot 2^{-i} < \varepsilon)$. Покажем, что система промежутков $\Delta_{m,i}$ $(m \geq N,\ 1 \leq i \leq a_n(m))$ образует правильное ε -ограниченное покрытие $\mathfrak{N}_g^n$. Пусть $S \in \mathfrak{N}_g^n$. Тогда, согласно определению $\mathfrak{N}_g^n$, найдется натуральное число $m \geq N$, такое что

$$\exists i (1 \leq i \leq a_n(m) \,\&\, \alpha_S(m) \in \Delta_{m,i}).$$

Кроме того, каково бы ни было ℓ,

$$\sum_{m=N}^{\ell} \sum_{i=1}^{a_n(m)} \bar{\Delta}_{m,i} = \sum_{m=N}^{\ell} a_n(m) \cdot 2^{-m} < \varepsilon$$

Мы показали, таким образом, что класс $\mathfrak{N}_g^n$ имеет меру нуль. Очевидно, что класс всех g -простых рекурсивных предикатов можно представить в виде $\bigcup\limits_n \mathfrak{N}_g^n$, т.е. в виде объединения конструктивной последовательности множеств меры нуль. Это доказывает теорему.

2. Рассмотрим подробнее частный случай Φ -ограниченных аппроксимаций рекурсивных предикатов, когда ограничение Φ , накладываемое на сложность вычисления, приводит к тому, что машины аппроксимирующей последовательности вырождаются в конечные автоматы. Аппроксимации такого типа будем называть р е г у л я р н ы м и .

В качестве меры сложности регулярных аппроксимаций будем рассматривать функцию, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие число состояний n-ого конечного автомата аппроксимации. Регулярные аппроксимации рекурсивных предикатов рассматривались в [6], [7]; в частности, в [6] установлена нижняя оценка для указанной меры сложности. Ниже приводится достижимая верхняя оценка для этой меры сложности и уточняется нижняя оценка, полученная в [6]. В качестве следствия из теоремы 1 показывается, что класс рекурсивных предикатов, допускающих "простые" регулярные аппроксимации, имеет меру нуль.

Конечным автоматом (к.а.) называется всякая пятерка вида

$$(X, Q, \bar{Q}, q_0, \delta) \tag{I}$$

где X - алфавит (входной алфавит автомата);

Q - конечное множество (множество состояний автомата);

$\bar{Q}$ - подмножество Q (множество заключительных состояний);

q_0 - элемент множества Q (начальное состояние);

δ -- двухместная функция, которая каждой паре вида (q, x), где $q \in Q$, $x \in X$, ставит в соответствие один из элементов множества Q (функция переходов автомата).

Посредством X^* будем обозначать множество всех слов в алфавите X, включая Λ (пустое слово). Функция δ может быть продолжена на множество пар вида (q, P), где $q \in Q$, $P \in X^*$, следующим образом: каковы бы ни были $q \in Q$, $x \in X$ и $P \in X^*$, положим $\delta(q, \Lambda) = q$, $\delta(q, Px) = \delta(\delta(q, P), x)$.

В дальнейшем будем считать, что фиксирован алфавит X, содержащий k букв $(k > 1)$. Термины "слово", "рекурсивный (регулярный) предикат", "конечный автомат" будем применять как сокращения терминов "слово в алфавите X", "рекурсивный (регулярный) предикат, определенный на X^*", "конечный автомат с входным алфавитом X". Посредством $\ell(P)$ будем обозначать длину слова P.

Пусть A - к.а. вида (I), посредством T_A будем обозначать предикат, истинный на тех и только тех словах P, для которых выполняется условие $\delta(q_0, P) \in \bar{Q}$. Будем говорить, что к.а. A вычисляет рекурсивный предикат S (и писать $S = T_A$), если предикаты S и T_A эквивалентны. Предикат S будем называть **регулярным**, если можно построить к.а. A, вычисляющий S. Приведенный к.а., вычисляющий регулярный предикат S, будем обозначать посредством A_S; число состояний к.а. A будем обозначать посредством $|A|$.

Пусть S – рекурсивный предикат, P – слово, P' – переменная для слов и n – целое число. Пусть

$$S_P \leftrightharpoons \{p' : pp' \in S\},\ S^{(n)} \leftrightharpoons \{p' : p' \in S \ \&\ \ell(p') \leqslant n\}$$

($S^{(n)}$ при отрицательном n положим, по определению, равным $\varnothing$). Рекурсивный предикат будем называть n**-ограниченным**, если область истинности этого предиката ограничена сверху числом n.

2. I. Последовательность приведенных к.а. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ будем называть **тривиальной регулярной аппроксимацией** рекурсивного предиката S, если n-ый член этой последовательности удовлетворяет условию $T_{A_n} = S^{(n)}$; посредством $\tau_S(n)$ будем обозначать $|A_n|$. Введем в рассмотрение функцию L_k, определяемую равенством

$$L_k(n) = \sum_{m=0}^{[x_0]} k^m + \sum_{m=[x_0]+1}^{n} 2^{\frac{k^{n-m+1}-1}{k-1}}$$

где x_0 – корень уравнения

$$k^x = 2^{\frac{k^{n-x+1}-1}{k-1}}$$

Можно показать (см. [8]),что

$$L_k(n) \sim \frac{g(n)}{(k-1)^2 \cdot \log_2 k} \cdot \frac{k^{n+1}}{n},$$

где g - функция, удовлетворяющая условию: $\forall n\,(1 \leqslant g(n) \leqslant k)$. Заметим, что график g имеет пилообразный характер (ср.[9]).

<u>Лемма I.</u> Каков бы ни был рекурсивный предикат S и каково бы ни было n , $\tau_s(n) \leqslant L_k(n)$.

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству теоремы I работы [8] и состоит в описании способа, позволяющего по всякому n -ограниченному предикату R строить такой к.а. A , вычисляющий R , что $|A| \leqslant L_k(n)$.

<u>Замечание</u>. Оценка, приведенная в лемме I, достижима в следующем смысле: можно построить рекурсивный предикат S , такой что

$$\forall m \exists n_{>m}\, \tau_s(n) \geqslant \frac{1}{(k-1)^2 \cdot \log_2 k} \cdot \frac{k^{n+2}}{n}.$$

Примером такого предиката может служить несущественно модифицированный предикат вхождения (см. [I0]).

Покажем теперь, что в некотором смысле "большинство" рекурсивных предикатов имеют τ -сложность, близкую к верхней оценке.

Рекурсивный предикат S будем называть п р о с т ы м о т н о с и т е л ь н о τ , если осуществимо рациональное число $\varepsilon \in (0,1)$, такое что

$$\forall m \exists n_{>m}\, \left(\tau_s(n) < \frac{1-\varepsilon}{(k-1)^2 \log_2 k} \cdot \frac{k^{n+1}}{k}\right).$$

Используя теорему I, не трудно показать, что справедлива следующая

<u>Лемма 2.</u> Класс всех рекурсивных предикатов, простых относительно τ , имеет меру нуль.

<u>Замечание</u>. Понятие множества рекурсивных предикатов (определенных на X^*) меры нуль вводится по аналогии с п.I.2.

Лемма 3. Каков бы ни был рекурсивный предикат S и каково бы ни было n,

$$\tau_S(n) \geqslant 2 + \max_{P \in S^{(n)}} \ell(P).$$

Замечание. Приведенная оценка достижима: можно построить рекурсивный предикат S, такой что

$$\forall n \;\; \tau_S(n) = 2 + \max_{P \in S^{(n)}} \ell(P)$$

Следствие I. Для того, чтобы рекурсивный предикат S имел конечную область истинности, необходимо и достаточно, чтобы функция τ_S была ограничена сверху константой.

Следствие 2. Если область истинности рекурсивного предиката S не является конечной, то

$$\forall m \exists n_{>m} \tau_S(n) \geqslant n+2$$

Из лемм I–3 следует, что справедлива следующая

Теорема 2. (а). Каков бы ни был рекурсивный предикат S и каково бы ни было n,

$$2 + \max_{P \in S^{(n)}} \ell(P) \leqslant \tau_S(n) \leqslant L_k(n)$$

(б). Класс рекурсивных предикатов, простых относительно τ, имеет меру нуль.

2.2. Пусть S – рекурсивный предикат и n – натуральное число. К.а. A будем называть n-приведенным относительно S, если $T_A^{(n)} = S^{(n)}$ и $|A| = \min |A'|$ (минимум берется по всем к.а. A', для которых $T_{A'}^{(n)} = S^{(n)}$). К.а. A будем называть n-приведенным, если он является n-приведенным относительно T_A.

Последовательность к.а. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ будем называть минимальной регулярной аппроксимацией рекурсивного предиката S, если n-ый член этой последовательности является n-приведенным относительно S. Посредством $\mu_S(n)$ обозначим число состояний n -ого члена минимальной регулярной аппроксимации.

Пусть A - к.а. вида (I), $q \in Q$ и P - переменная для слов. Пусть

$$\tau(q) \Leftrightarrow \min_{q=\delta(q_0,P)} \ell(P), \quad A_q \Leftrightarrow \{P : \delta(q,P) \in \bar{Q}\}$$

На множестве состояний автомата A введем отношение частичного порядка. Будем говорить, что состояние q_1 n-м а ж о р и р у е т состояние q_2 (и писать: $q_1 \succeq_n q_2$), если $\tau(q_1) \geqslant \tau(q_2)$ и $A_{q_1}^{(n-\tau(q_1))} = A_{q_2}^{(n-\tau(q_1))}$. Состояния q_1 и q_2 будем навать n -с р а в н и м ы м и , если $q_1 \succeq_n q_2$ или $q_2 \succeq_n q_1$ (в противном случае q_1 и q_2 будем называть n-н е с р а в н и м ы м и). Заметим, что если $\tau(q) > n$, то каково бы ни было q' , состояния q и q' n-сравнимы.

<u>Теорема 3</u>. Д л я т о г о , ч т о б ы к. а. A б ы л n - п р и в е д е н н ы м , н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о , ч т о б ы л ю б ы е д в а с о с т о я н и я а в т о м а т а A б ы л и n -н е с р а в н и м ы .

<u>Необходимость.</u> Пусть A - к.а. вида (I) и A является n-приведенным. Предположим, что $q_1, q_2 \in Q$ и $q_1 \succeq_n q_2$. Рассмотрим к.а. A , множество состояний которого $Q' = Q \setminus \{q_1\}$ начальное состояние $q_0' = q$, а функция переходов δ'. определяется посредством следующего условия: каковы бы ни были $q \in Q'$ и $x \in X$,

$$\delta'(q,x) \begin{cases} \delta(q,x) \text{ ,если } \delta(q,x) \neq q_1 \\ q_2 \text{ ,если } \delta(q,x) = q_1 \end{cases}$$

Очевидно, что $|A'| < |A|$ и $T_{A'}^{(n)} = T_A^{(n)}$. Это противоречит предположению об n-приведенности автомата A .

<u>Достаточность</u>. Пусть A - к.а. вида (I) и любые два состояния A n-несравнимы. Очевидно, что в этом случае каково бы ни было $q \in Q$, $\tau(q) \leqslant n$. Пусть $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$.Посредством P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) обозначим наименьшее относительно ал-

фавитного порядка (см. [II], стр. 222) из слов P таких, что $\delta(q_0, P) = q_i$. Посредством $P_{i,j}$ $(1 \le i, j \le N)$ обозначим наименьшее из слов P, таких что

$$\delta(q_i, P) \in \bar{Q} \not\equiv \delta(q_j, P) \in \bar{Q}.$$

Существование слова P_{ij} с указанным свойством следует из n-несравнимости состояний q_i и q_j; можно показать также, что

$$\ell(P_{ij}) \le n - max\{\tau(q_i), \tau(q_j)\} \quad (1 \le i, j \le N).$$

Предположим, что можно построить автомат $A' = (X, Q', \bar{Q}', q_0', \delta')$ такой, что $|A'| < |A|$ и $T_{A'}^{(n)} = T_A^{(n)}$. Пусть

$$q_i' \leftrightharpoons \delta'(q_0', P_i) \quad \text{,где } 1 \le i \le N.$$

Покажем, что состояния q_i' $(1 \le i \le N)$ попарно различны. Действительно, если i и j таковы, что $q_i' = q_j'$, то $\delta'(q_i', P_{ij}) = \delta'(q_j', P_{ij})$, т.е. $P_i P_{ij} \in T_{A'}^{(n)} \equiv P_j P_{ij} \in T_{A'}^{(n)}$ (нетрудно показать, что $\ell(P_i P_{ij})$, $\ell(P_j, P_{ij}) \le n$). Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $|A'| < |A|$, неверно. Следовательно

$$|A| = \min_{T_{A'}^{(n)} = T_A^{(n)}} |A'|,$$

что равносильно n-приведенности к.а. A. Теорема доказана.

Пусть S – рекурсивный предикат. На множестве X^* введем отношение частичного порядка следующим образом:

$$P_1 \succsim_n P_2 \leftrightharpoons \ell(P_1) \geqslant \ell(P_2) \;\&\; S_{P_1}^{(n-\ell(P_1))} = S_{P_2}^{(n-\ell(P_1))}$$

Из теоремы 3 следует, что $\mu_S(n)$ равно числу попарно n-несравнимых слов, у которых длина не превосходит n (заметим, что если $\ell(P) > n$, то каково бы ни было слово P', слова P и P' n-сравнимы).

Очевидно, что $\forall n\,(\mu_S(n) \le \tau_S(n))$. Таким образом, справедлива

Лемма 4. (Б.А.Трахтенброт, [8]). Каков бы ни был рекурсивный предикат S и каково бы ни было n, $\mu_S(n) \leqslant L_k(n)$.

Замечание *). Оценка, полученная в лемме, достижима в следующем смысле: можно построить рекурсивный предикат S, такой что

$$\forall m \exists n_{>m} \ \mu_S(n) \geqslant \frac{1}{(k-1)^2 \cdot \log_2 k} \cdot \frac{k^{n+2}}{n}.$$

Рекурсивный предикат S будем называть простым относительно μ, если осуществимо рациональное число $\varepsilon \in (0,1)$, такое что

$$\forall m \exists n_{>m} \left(\mu_S(n) < \frac{1-\varepsilon}{(k-1)^2 \cdot \log_2 k} \cdot \frac{k^{n+1}}{n} \right)$$

Лемма 5. Класс рекурсивных предикатов, простых относительно μ, имеет меру нуль.

Лемма 6. Пусть S - регулярный предикат и $|A_S| = N$. Тогда

$$\forall n_{\geqslant 2N-2} \ \mu_S(n) = N.$$

Замечание. Можно построить регулярный предикат R, такой что $|A_R| = N$ и

$$\forall n_{<2N-2} \ \mu_R(n) < N$$

Введем обозначение. Пусть S - рекурсивный предикат, n -натуральное число и m - переменная для натуральных чисел. Пусть

$$t_S^n \leftrightharpoons \max_{m<n} \{ m : \mu_S(m-1) < \mu_S(m) \}.$$

Лемма 7. Пусть S -рекурсивный нерегулярный предикат. Тогда

$$\forall n \left(\mu_S(n) \geqslant 2 + \tfrac{1}{2} t_S^n \right)$$

---

*) Примеры предикатов с указанным свойством независимо от автора построены Ю.Я.Брейбартом.

Следствие (R.Karp,[6]). Пусть S – рекурсивный нерегулярный предикат. Тогда

$$\forall m \exists n_{>m}\ \mu_S(n) \geq 2+\frac{n}{2}.$$

Теорема 4. (а). Пусть рекурсивный предикат S не является регулярным. Тогда

$$\forall n \left(2+\frac{1}{2} t_S^n \leq \mu_S(n) \leq L_k(n)\right).$$

(б). Класс рекурсивных предикатов, простых относительно μ, имеет меру нуль.

В заключение автор выражает благодарность Н.А.Шанину, А.О. Слисенко и Г.С.Цейтину за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blum M. On the size of machines. "Information and Control", 1967, 11, 3, 257-265.
2. Барздинь Я.М. Сложность программ, распознающих принадлежность натуральных чисел, не превышающих , рекурсивно перечислимому множеству ."Докл. АН СССР", 1968, 182,6, 1249-1252.
3. Петри Н.В. Две теоремы о сложности алгорифмов и вычислений. "Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Матем.ин-та АН СССР", 1969, 16,165-174.
4. Rogers H. Gödel numbering of partial recursive functions, "J. Symbolic Logic", 1958, 23, 3, 331-341.
5. Заславский И.Д., Цейтин Г.С. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1962,67,458-502.
6. Karp R.M. Some bounds on the storage requirements of sequential machines and Turing machines, "J.Assoc.Comput. Mach.", 1967, 14, 3, 478-489.

7. Фрейдзон Р.И. О представимости нерегулярных множеств последовательностями конечных автоматов. В сб. "Методы вычислений", 5, Изд. ЛГУ, Л., 1968, 147-151.

8. Трахтенброт Б.А. Об оценке веса конечного дерева, "Сибирск. матем. ж.", 1964, 5, 1, 186-191.

9. Channon C. The synthesis of two-terminal switching circuits, "Bell System Techn. J.", 1949, 28, 1, 59-98 (русский перевод: в сб. К.Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, М., 1963).

10. Фрейдзон Р.И. Об одной характеристике сложности рекурсивных предикатов, "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1970, 113, 79-101.

11. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.