И. Р. Шафаревич, Дмитрий Костантинович Фаддеев, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 6, 3–9

https://www.mathnet.ru/aa217

И.Р.Шафаревич

ДМИТРИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ ФАДДЕЕВ

6 февраля 1990 г. состоялось заседание Ленинградского математического общества совместно с секцией математики Дома ученых, посвященное памяти Д.К.Фаддеева. И.Р.Шафаревич любезно предоставил нам текст своего выступления.

Вклад, который Дмитрий Константинович внес в математику, распределен по почти всем ее разделам - анализу, алгебре, теории чисел, геометрии, вычислительной математике, геометрической кристаллографии. Дать систематический обзор его исследований, восстановить историю и логику их возникновения было бы очень интересным, но трудным предприятием, на которое я не рискну. В этих заметках я попытаюсь передать более личный аспект математического творчества Д.К.Фаддеева - по крайней мере то представление, которое сложилось у меня в результате наших многолетних, многодесятилетних контактов и сотрудничества.

Первая, формирующая математическую индивидуальность часть научного жизненного пути Д.К.Фаддеева приходится на эпоху, когда советская математика только складывалась и приобретала ту форму, которую она приняла теперь. Это была эпоха, очень интересная своими контрастами - тем, что некоторые области математики у нас находились на очень высоком уровне, в то время как другие, часто очень важные, классические ее разделы были совершенно неизвестны. Почти полная изоляция от математики Запада, наступившая к 35-году, оставляла преодоление этих контрастов исключительно нашим внутренним силам. И работа в таком направлении составляла бóльшую часть тогдашней математической деятельности, но часть „невидимую", мало или или даже никак не отразившуюся в научных публикациях.

В качестве примера таких контрастов напомню, что у нас тогда благодаря усилиям Д.Ф.Егорова и Н.Н.Лузина сложилась школа теории функций действительного переменного, вряд ли имевшая равную в мире. Под влиянием работ П.С.Александрова и П.С.Урысона была прекрасно известна теоретико-множественная топология. На высоком уровне находился функциональный анализ в духе теории банаховских пространств (как рассказывал И.Г.Петровский, первые импульсы здесь исходили от Егорова). В более позднюю часть этого периода очень популярной стала абстрактная алгебра (в основном под влиянием А.Г.Куроша). Все эти области входили в круг того, что должен был знать „каждый математик", и действительно, знакомство с ними возникало из самой атмосферы той эпохи, „из воздуха". Но и в некоторых более классических областях поддерживался высокий уровень - продолжалась, например, петербургская школа теории чисел, не ослабевал интерес к теории дифференциальных уравнений (в основном под влиянием Н.М.Гюнтера в Ленинграде и В.В.Степанова в Москве).

С другой стороны, совершенно неизвестными оставались такие разделы, как классическая теории компактных римановых поверхностей и алгебраических функций, тем более алгебраическая геометрия. Совершенно не известна была теория полей классов. Даже теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и тем более теория расширений операторов стали широко известны лишь к самому концу 30-х годов благодаря курсу, прочитанному в Москве А.И.Плеснером, который привез к нам эту науку из Германии.

Я хорошо помню, например, рассказы о семинаре, руководимом А.О.Гельфондом, Б.Н.Делоне и Л.Г.Шнирельманом, где пытались понять теорию полей классов и пришли к выводу, что это безнадежно. Позже, будучи студентом, я участвовал в семинаре Б.Н.Делоне и А.Г.Куроша на ту же тему, окончившемся с тем же результатом. По поводу алгебраической геометрии, и в особенности работ итальянской школы, даже подобных попыток не предпринималось - было распространено убеждение, что понять их невозможно.

Я сам застал конец этого периода - конец 30-х годов - и поэтому могу отчасти восстановить то особое отношение к математике, которое тогда у многих складывалось. Изучение многих классических разделов математики было не „учебным процессом", происходило не на семинарах и спецкурсах - оно больше походило на творческий процесс или по крайней мере на сотрудничество с истинными авторами. Во многих случаях само осознание того, что существует совершенно неизвестный глубокий раздел математики, было откровением. Я помню, например, какое впечатление произвело на меня, когда я, уже после конца войны, узнал о существовании неалгебраических комплексных торов и о соотношениях Фробениуса. (Также и то, какое впечатление мои возбужденные рассказы произвели на нескольких, очень крупных математиков). Такое положение делало математику исключительно интересной. Стиралась грань между изучением математической литературы и собственными научными исследованиями - все это сливалось в один процесс „открытия математики".

Но то же положение было связано и с большими трудностями. Много сил, которые можно было бы потратить на собственные исследования, уходили на продумывание и понимание уже давно сложившихся и неизвестных только у нас разделов. А нередко работа в таких областях грозила тем, что радовавшее душу открытие оказывалось лишь переоткрытием известного результата. Но именно здесь сказалась удивительная черта Дмитрия Константиновича. Он был редким математиком, готовым с радостью выслушать тебя, чтобы ты ни хотел ему рассказать. В его реакции на математический результат отступало на задний план то, кем он был получен, - шла ли речь о его собственном открытии или о результате того, кто ему об этом рассказывал, или о старой, но раньше неизвестной теореме, - основную роль играла красота результата. Это качество определило ту громадную роль, которую он играл в развитии нашей математики - роль, далеко не полностью отразившуюся в его научных публикациях.

В качестве яркого примера, иллюстрирующего характер занятий математикой в

30-е годы, мне вспоминается моя первая встреча с Дмитрием Константиновичем. Он приехал из Ленинграда в Москву, мы встретились у Б. Н. Делоне. Дмитрий Константинович привез с собой свою новую работу, которая очаровала меня. Речь шла о строении кольца целых чисел $\mathfrak{O}$ поля алгебраических чисел K как модуля над кольцом целых чисел $\mathfrak{o}$ некоторого подполя $k\subset K$. Если k совпадает с полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то $\mathfrak{O}$ является свободной абелевой группой, т. е. свободным $\mathbb{Z}$-модулем. Это „теорема о фундаментальном базисе", присутствующая во всех учебниках теории полей алгебраических чисел, начиная со знаменитого „Обзора" Гильберта. Было известно, что аналогичный результат неверен в общем случае, но ситуация считалась темной.

Д. К. Фаддеев доказал, что модуль $\mathfrak{O}$ может быть представлен в виде $\mathfrak{a}_1\omega_1\oplus,\ldots,\oplus\mathfrak{a}_n\omega_n$, $\omega_i\in\mathfrak{O}$, где $\mathfrak{a}_i$ - идеалы кольца $\mathfrak{o}$, но такое представление неоднозначно, а единственным инвариантом является класс идеала $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n$. Вскоре выяснилось, что теорема ненова - ее доказал Штейниц в форме теоремы о преобразованиях прямоугольных матриц. И все же мне жаль, что Д. К. Фаддеев не опубликовал этот результат, конечно, лишь как методологическое новшество. Результат Штейница малоизвестен алгебраистам, его и сейчас нет, например в основных руководствах по коммутативной алгебре, а много позже, уже после войны, Э. Артин переоткрыл и опубликовал его! (Лишь еще позже эта теорема нашла свое естественное место как теорема о структуре проективных модулей конечного ранга над одномерными кольцами). Приведенный мною пример неединичен, и особенно ярко запомнился мне лишь потому, что изящество результата так меня поразило.

При всем разнообразии математических интересов Дмитрия Константиновича была одна тема, которой он отдал больше всего сил и которая была, как мне кажется, особенно близка его душе. Это теория Галуа, и в частности так называемая задача погружения. Речь идет о следующем вопросе. Пусть K - расширение Галуа поля k с группой Галуа F и G - другая конечная группа, гомоморфным образом которой является F. Когда можно погрузить K в большее поле L, являющееся расширением Галуа поля k с группой Галуа G, причем так, чтобы заданный гомоморфизм $G\longrightarrow F$ реализовался как естественный гомоморфизм группы Галуа поля на группу Галуа подполя? Это естественное обобщение „обратной задачи теории Галуа", которая соответствует случаю $K=k$. Зная, какие группы реализуются как группы Галуа расширения поля k и как решается задача погружения для них, можно методами теории Галуа описать всю совокупность сепарабельных расширений этого поля. Но особенно красива задача погружения для случая, когда ядро гомоморофизма $G\longrightarrow F$ абелево. В этом случае она тесно связана с обратной задачей теории Галуа для разрешимых групп. К этому случаю относятся и исследования Д. К. Фаддеева.

Он открыл очень важное условие, необходимое для разрешимости задачи погружения, названное им *условием согласности*. Некоторое время было неясно, не достаточно ли это условие.

Х. Хассе переоткрыл условие согласности на несколько лет позже (тут играла роль слабая циркуляция журналов во время войны) и высказал предположение, что оно и достаточно. Д. К. Фаддеев такой гипотезы не высказывал, и ему принадлежит один из первых примеров недостаточности условия согласности для разрешимости задачи погружения. Разделение условий разрешимости задачи погружения на условие согласности и дополнительные условия - пример очень важного явления, потом встречавшегося в различных вопросах алгебраической теории чисел.

Предполагая, что k - поле алгебраических чисел, это разделение можно пояснить следующим образом.

Разрешимость задачи погружения можно, как правило, переписать в виде разрешимости системы диафантовых уравнений

$$f_1 = \ldots = f_m = 0,$$

где f_i - многочлены от каких-то переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем ищутся значения x_i из поля k. Необходимым условием является разрешимость сравнений

$$f_1 \equiv \ldots \equiv f_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$$

для любого идеала $\mathfrak{a}$ поля k. Это и есть условие согласности. Его можно иначе переформулировать как разрешимость задачи погружения для $\mathfrak{p}$-адических пополнений $K_{\mathfrak{p}}$ поля K и для всех его простых идеалов $\mathfrak{p}$. Такое разделение на „локальные" условия и задачу обозрения тех ситуаций, где локальные условия выполнены, много раз играло позже существенную роль в теории эллиптических кривых, абелевых многообразий или линейных алгебраических групп.

Занимаясь задачей погружения, Д. К. Фаддеев столкнулся с формализмом так называемых „систем факторов", все время в этой связи встречающемся, и обнаружил, что он является частным случаем гораздо более общей конструкции. Так была открыта *теория когомологий групп*. Одновременно ее открыли С. Эйленберг и С. Маклейн, которые пришли к ней, исходя из совсем другого вопроса - вычисления когомологий пространств $K(\Pi, 1)$. Создание теории когомологий групп было одним из самых значительных математических событий середины этого века. Ряд математиков предчувствовал существование такой теории. Так, А. Вейль в комментариях к своему собранию сочинений вспоминает, как в 30-е годы говорил своим друзьям, что ему хотелось бы определить „числа Бетти конечной группы". Трехмерная группа когомологий встречалась у Тейхмюллера, и приведя соотношение, определяющее трехмерный коцикл, он пишет, что обобщение этого соотношения для случая $n>3$ ему указал Витт. Возможно, Витт знал общее определение групп когомологий (или по крайней мере коциклов), но не опубликовал его. Дело, конечно, не сводилось к одному определению, необходимо было систематическое развитие теории - это сделали Д. К. Фаддеев и независимо Эйленберг и Маклейн. Теория когомологий групп была зерном, из которого выросло мощное дерево гомологической алгебры, обильно плодоносящее и до сих пор. Одним из наиболее значительных достижений гомологической алгебры было создание алгебраической K-теории. И в этой области в школе Д. К. Фаддеева были достигнуты воистину впечатляющие успехи. Самым ярким примером является теорема Меркурьева-Суслина, определяющая в явном виде группу

Брауэра почти произвольного поля. Я хорошо помню, как А. Алберт сформулировал еще до войны в виде гипотезы полученный ими позже результат (даже лишь часть его), и насколько безнадежной и недоступной эта гипотеза казалась. Такой сильный математик как Р. Брауэр пытался проверить одно ее следствие (всякое тело имеет поле разложения с разрешимой группой Галуа), но смог сделать это лишь для тел очень небольшой размерности.

Другое ответвление того же комплекса идей привело Д. К. Фаддеева к важным идеям в изучении группы Брауэра произвольного поля K, т. е. конечномерных тел с центром K. Идея та же, что и в задаче погружения, - выделить некоторые тривиальные инварианты, которые улавливаются путем рассмотрения сравнений. В самом общем виде это можно сделать, рассматривая показатели поля K - такие гомоморфизмы мультипликативной группы K^* в группу целых чисел $\nu: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$, что $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$, если $x, y, x+y \in K^*$ и $\nu(x)=0$ для элементов некоторого содержащегося в K „поля констант" k.

Д. К. Фаддеев изучил строение группы Брауэра над пополнением K_ν поля K по такому показателю и выделил элементы этой группы в некотором смысле тривиальные - он назвал их „постоянными". Тем самым выделяются элементы группы Брауэра поля K, которые становятся постоянными при переходе к любому показателю этого поля. Такая подгруппа группы Брауэра поля K тоже инвариантным образом определяется самим полем, но гораздо меньше, и лучше доступна изучению, чем вся группа Брауэра. Я предложил называть ее группой Фаддеева-Брауэра поля K: $\Phi\mathrm{Br}(K)$. Важная теорема Фаддеева заключается в том, что если T - независимая переменная, то $\Phi\mathrm{Br}(K(T))=$ $=\Phi\mathrm{Br}(K)$, значит, если поле k алгебраически замкнуто, то $\Phi\mathrm{Br}(k(T_1, \ldots, T_n))=0$.

Эти идеи Д. К. Фаддеева были много лет спустя переоткрыты в другой форме Гротендиком. Они нашли блестящее применение в последние годы в проблеме Люрота и так называемой проблеме рационального минимального базиса. Именно, Д. Зальцман построил примеры конечных групп G линейных преобразований переменных $T_1, \ldots, T_n$, для которых поле инвариантов $\mathbb{C}(T_1, \ldots, T_n)G$ не является полем рациональных функций. Анализ его доказательства, проведенный Ф. А. Богомоловым, показал, что оно по существу не использует ничего, кроме понятия группы $\Phi\mathrm{B}r(K)$ и ее простейших свойств, содержавшихся в работе Д. К. Фаддеева. Заодно здесь получается и очень простое решение проблемы Люрота, так как $\mathbb{C}(T_1, \ldots, T_n)G \subset \mathbb{C}(T_1, \ldots, T_n)$, и мы получаем пример подполя поля рациональных функций, неизоморфного полю рациональных функций. Как показал Колио-Телен, таким же способом можно построить пример, показывающий, что проблема Люрота имеет отрицательное решение уже при $n=3$.

Есть еще одна большая и находящаяся только в начале своего развития область алгебры, где влияние Дмитрия Константиновича было исключительно глубоко, - это исследование неполупростых объектов. Один из наиболее совершенных и завершенных разделов алгебры - описание полупростых объектов (колец, модулей). Классическим примером является теория представлений конечных групп над полем нулевой характеристики. Пожалуй, никакая другая часть алгебры не имеет таких многочисленных приложений в математике и математической физике. Менее разнообразные, но не менее глубокие применения имеет теория произвольных полупростых алгебр конечной размерности: например, связь между структурой тел над полями алгебраических чисел и теорией полей классов. Во всех этих вопросах алгебраическая сторона выяснена в принципе до конца: пожалуй, последним завершающим результатом является теорема Меркурьева-Суслина о строении группы Брауэра, упоминавшаяся выше. Но выходя за пределы полупростых колец и модулей, мы попадаем в совершенно неисследованную область, а несколько десятилетий назад здесь вообще ничего не было известно. К этой области относятся теория представлений неполупростых алгебр, а также конечных групп над полем конечной характеристики. Но к ней же надо отнести и ряд „целочисленных" вопросов, например теорию целочисленных представлений конечных групп, хотя бы потому, что, редуцируя такое представление по модулю простого числа p, делящего порядок группы, мы приходим к представлению группового кольца группы над полем из p элементов, а это кольцо неполупросто. По аналогичной причине к этой же области естественно отнести и теорию представлений колец алгебраических чисел.

Уже очень давно Дмитрий Константинович обратил внимание на эту громадную неисследованную область, которой, видимо, принадлежит большое будущее. В результате исследований как его самого, так и его многочисленных учеников теперь здесь имеются очень существенные продвижения. Они касаются в основном не структуры соответствующих колец, а строения их представлений. На ряде примеров (представления конечных групп, неполупростых алгебр) здесь было обнаружено существование такого типа задач, которые в некотором (точно определенном) смысле имеют „финитный" ответ, и проведено почти исчерпывающее исследование таких задач (они называются „ручными"). Особенно яркие результаты получены учениками Д. К. Фаддеева - Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером (частично в сотрудничестве с П. Габриэлем). Ими в значительной степени прояснено строение алгебр, имеющих „финитную" теорию представлений. Мне кажется, что это - одно из наиболее ярких достижений алгебры последних десятилетий: первый серьезный прорыв в алгебру неполупростых объектов, когда от хаоса, каким эта область до того представлялась, была отвоевана бóльшая часть, управляемая красивыми закономерностями.

Зная, как легко Дмитрий Константинович отдает свои идеи, как мало он склонен подчеркивать свой личный вклад, как много сил готов был тратить на обсуждение работ своих учеников и коллег, можно было предсказать, что его влияние на развитие математики не будет так наглядно видимо и так широко признано, как оно того заслуживает. Это и произошло. К Д. К. Фаддееву очень подходят слова Пушкина о Жуковском, которому он и в других отношениях близок по духу: „Его переводили бы на все языки, если бы он сам не переводил так много". Только слово „переводить" надо заменить, например, на „цитировать". Действительно, вклад Дмитрия Константиновича в математику оценен сейчас, как мне представляется, совершенно недостаточно. Вот частный, но яркий пример. Важный, очень часто используемый результат о связи когомологий группы и подгруппы был доказал Д.К.Фаддеевым в одной из его первых работ по теории когомологий групп. Но почти во всех руководствах и в западных работах этот результат называется „леммой Шапиро", хотя я никогда не видел ни публикации математика с этой фамилией на эту тему, ни ссылки на такую публикацию. Да и роль Д.К.Фаддеева как одного из двух независимых создателей теории когомологий групп упоминается далеко не всегда. Гротендик пришел к своей теории группы Брауэра, видимо, не зная работ Фаддеева. Но и в более поздних исследованиях и обзорах на эту тему ссылки на работы Д.К.Фаддеева чаще всего отсутствуют, хотя теперь видно, что чисто алгебраический подход Фаддеева в некоторых вопросах (например, в проблеме Люрота) дает более простой и естественный аппарат. Примеры можно было бы умножить.

Самого Дмитрия Константиновича такое положение, насколько я мог судить, нисколько не огорчало. И он был, конечно, глубоко прав. Если справедлив принцип „рукописи не горят", то тем более „не горят" математические идеи. И не только в том смысле, что будущие математики или историки математики восстановят истинное положение вещей. Гораздо существеннее то, что для самого Дмитрия Константиновича важна была лишь красота создаваемых им математических идей, а эта красота будет существовать всегда и будет нести в себе отпечаток его индивидуальности.

Он навсегда запомнится мне таким - обсуждающим математическую работу, с улыбкой слегка склонив голову, как будто прислушивается к какой-то ему одному слышной красивой музыке.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
АН СССР
117966, Москва, ГСП-1
ул. Вавилова, д. 42

Поступило 5 июля 1990 г.