Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 3, 86—89

УДК 514.7 + 517.9

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПЕТЕЛЬ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

О. И. Мохов

Задача. Найти все операторы $\nabla_{\dot\gamma}$ ковариантного дифференцирования вдоль замкнутой кривой γ на римановом или псевдоримановом многообразии M с метрикой g_{ij}, порождающие на касательном пространстве к пространству гладких замкнутых кривых на многообразии M симплектическую форму $\omega(\xi, \eta) = \int_\gamma \langle \xi, \nabla_{\dot\gamma}\eta\rangle$.

Замечание. 1) Класс локальных симплектических структур на функциональных пространствах впервые рассмотрен (в рамках формального вариационного исчисления) в [1] (см. также пример в [2]); 2) в [3] введены и изучены скобки Пуассона гидродинамического типа, порождаемые метрикой (метрика в этом случае обязана быть плоской); рассмотрение таких скобок Пуассона мотивировано эйлеровой гидродинамикой и уравнениями усреднения Уизема.

Рассмотрим произвольное риманово или псевдориманово N-мерное многообразие M с локальными координатами $(u^1, \ldots, u^N)$. Пусть $g_{ij}(u^1, \ldots, u^N)$ — метрика на M (невырожденное симметричное тензорное поле типа (0, 2)), $\Pi(M)$ — пространство гладких параметризованных отображений γ: $S^1 \to M$, $\gamma(x) = \{u^i(x)\}$, $x \in S^1$; $T_\gamma \Pi(M)$ — касательное пространство к $\Pi(M)$ в точке γ, состоящее из гладких векторных полей ξ^i, $1 \leqslant i \leqslant N$, вдоль замкнутой кривой $\gamma(x)$.

Теорема 1. *Оператор $\nabla_{\dot\gamma}$ ковариантного дифференцирования вдоль замкнутой кривой $\gamma(x)$ задает на пространстве $\Pi(M)$ замкнутую 2-форму*

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \langle \xi, \nabla_{\dot\gamma}\eta\rangle\, dx, \quad \langle \xi, \eta\rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j; \quad \xi, \eta \in T_\gamma\Pi(M), \quad \dot\gamma = \{u^i_x\}, \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда

1) *дифференциально-геометрическая связность Γ^i_{jk} согласована с метрикой g_{ij}:*

$$\nabla_k g_{ij} = \partial g_{ij}/\partial u^k - g_{is}\Gamma^s_{jk} - g_{js}\Gamma^s_{ik} = 0;$$

2) *тензор кручения $T_{ijk} = g_{is}T^s_{jk}$, $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$, абсолютно кососимметричен и его градиент равен* 0:

$$(dT)_{ijkm} = 0. \tag{2}$$

Условие (2) получено из необходимого соотношения на компоненты тензора римановой кривизны: $R_{ijkm} = \tilde R_{kmij}$, где $R^i_{jkm} = -\partial\Gamma^i_{jm}/\partial u^k + \partial\Gamma^i_{jk}/\partial u^m - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{jk}$, $\tilde R^i_{jkm}$ — тензор кривизны связности $\tilde\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, $R_{ijkm} = g_{is}R^s_{jkm}$.

Следствие 1. *Для всякого риманова или псевдориманова многообразия (M, g_{ij}) определена симплектическая форма вида* (1), *порождаемая связностью Леви — Чивита (симметричной и согласованной с метрикой g_{ij}).*

Следствие 2. *Дифференциально-геометрическая связность Γ^i_{jk}, определяемая симплектической формой вида* (1), *имеет вид $\Gamma^i_{jk} = g^{is}(\partial g_{sk}/\partial u^j + \partial g_{js}/\partial u^k - \partial g_{jk}/\partial u^s + T_{sjk})/2$.*

Теорема 2. *Класс замкнутых 2-форм вида* (1) *на пространстве $\Pi(M)$ гладких замкнутых кривых на многообразии (M, g_{ij}) находится во взаимно однозначном соответствии с пространством замкнутых 3-форм на многообразии M.*

Следствие. *На двумерном римановом (или псевдоримановом) многообразии (M, g_{ij}) существует единственная симплектическая структура вида* (1), *она порождается связностью Леви — Чивита.*

Для трехмерных многообразий с произвольной фиксированной метрикой g_{ij} симплектическая структура вида (1) определяется (локально) произвольным заданием компоненты T_{123} тензора кручения, при этом все остальные компоненты определяются однозначно и равны $\pm T_{123}$ или 0. В случае четырехмерного многообразия (M, g_{ij}) компоненты тензора кручения $T_1 = T_{234}$, $T_2 = T_{134}$, $T_3 = T_{124}$, $T_4 = T_{123}$ локально связаны единственным линейным соотношением $\sum_{i=1}^{4}(-1)^i \partial T_i/\partial u^i = 0$, а остальные компоненты определяются однозначно и равны $\pm T_i$ или 0.

Предложение. *Локально для произвольной метрики g_{ij} симплектическая форма* (1) *определяется произвольной кососимметрической матрицей $a_{ij}(u)$: $a_{ij} = -a_{ji}$, при этом $T_{ijk} = \partial a_{ij}/\partial u^k + \partial a_{jk}/\partial u^i + \partial a_{ki}/\partial u^j$.*

Теорема 1 дает полное описание однородных симплектических операторов первого порядка

$$L_{ij} = g_{ij}(u(x))d/dx + b_{ijk}(u(x))\,u_x^k \tag{3}$$

с невырожденной матрицей g_{ij}, определенных глобально на пространстве петель произвольного многообразия M с локальными координатами $(u^1, \ldots, u^N)$. Операторы, обратные к симплектическим, обычно называются гамильтоновыми (см. [4]): они задают скобку Пуассона $\{u^i(x), u^j(y)\} = (L^{-1})^{ij}\delta(x-y)$ (условие симплектичности оператора L_{ij}).

Отметим, что нулевое пространство 2-формы (1) состоит из параллельных векторных полей вдоль замкнутой кривой $\gamma(x)$. В частности, векторное поле скорости $\{u_x^i\}$ кривой $\gamma(x) = \{u^i(x)\}$ принадлежит нулевому пространству 2-формы (1) тогда и только тогда, когда $\gamma(x)$ является замкнутой геодезической на многообразии M.

Для N-мерных римановых многообразий (M, g_{ij}), геодезические которых периодичны и имеют одинаковую длину, определено $(2N-2)$-мерное симплектическое многообразие геодезических CM, симплектическая структура на котором задается формой кривизны S^1-связности в главном расслоении над CM единичных касательных векторов UM многообразия (M, g_{ij}) (S^1-связность порождается канонической 1-формой α на T^*M) ([5, 6, 7, 8]). Касательное пространство $T_\gamma CM$ многообразия геодезических CM в точке γ изоморфно пространству нормальных якобиевых полей вдоль геодезической γ многообразия M.

Теорема 3. *Ограничение симплектической формы* (1), *определяемой на* $\Pi(M)$ *связностью Леви — Чивита, на конечномерное подпространство нормальных якобиевых полей вдоль геодезической γ совпадает с формой Риба — замкнутой невырожденной 2-формой на CM, задающей симплектическую структуру.*

В заключение докажем гамильтоновость (симплектичность) некоторых лагранжевых систем классической теории поля.

Теорема 4. *Лагранжевы системы $\delta S/\delta u^i = 0$, задаваемые действием вида*

$$S = \int [f_{ij}(u)\,u_x^i u_t^j + H(u, u_x, u_{xx}, \ldots)]\,dx\,dt, \tag{4}$$

где $f_{ij}(u)$, $H(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ — произвольные функции, являются гамильтоновыми системами вида

$$L_{ij}u_t^j = \frac{\delta H}{\delta u^i}, \tag{5}$$

где L_{ij} — однородный симплектический оператор первого порядка (3) (*метрика $g_{ij}(u)$ в этом случае может быть вырожденной*). *Верно и обратное: всякая гамильтонова система* (5) *с произвольным однородным симплектическим оператором первого порядка L_{ij} является лагранжевой системой, задаваемой действием вида* (4).

Результаты легко обобщаются на случай произвольного числа независимых пространственных переменных $x, y, z, \ldots$ Отметим также, что лагранжиан в (4) вырожден по t, и стандартное построение канонического гамильтонова формализма (для многомерных лагранжианов см. (13) в [9]) для динамики по t невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дорфман И. Я.* // ДАН СССР.— 1988.— Т. 302, № 4. — С. 792—795. 2. *Соколов В. В.* // ДАН СССР.— 1984. — Т. 277, № 1. — С. 48—50. 3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* // ДАН СССР.— 1983. — Т. 270, № 4.— С. 781—785. 4. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* // Функцион. анализ и его прил.— 1979. — Т. 13, № 4.— С. 13—30. 5. *Reeb G.* // Comptes Rendus.— 1949 — V. 229, № 20.— P. 969—971. 6. *Reeb G.* // Bull. Cl. Sciences. Acad. Royale Belg. 5 Série.— 1950.— V. 36, № 4.— P. 324—329. 7. *Weinstein A.* // J. Diff. Geom.— 1974. — V. 9, № 4.— P. 513—517. 8. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими.— М.: Мир, 1981. 9. *Мохов О. И.* // Изв. АН СССР, сер. мат.— 1987. — Т. 51, № 6. — С. 1345—1352.

Научно-производственное объединение
ВНИИФТРИ

Поступило в редакцию
23 февраля 1989 г.