



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 3–25

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ»
ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА
ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА,
Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2018 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2015–2016 гг.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

ЗАСЕДАНИЕ 326 (19 декабря 2014 г.)

Л. В. Фомин.

Ползучесть и длительная прочность стержней и пластин при растяжении и изгибе с учётом влияния агрессивной среды.

ЗАСЕДАНИЕ 327 (13 февраля 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Уравнения совместности в напряжениях в многомерной упругой среде.

Путём приравнивания нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера ранга $2n - 4$ либо дуального к нему тензора Римана выведены $n^2(n^2 - 1)/12$ независимых уравнений совместности в напряжениях в n -мерной изотропной упругой среде. Исследован вопрос об эквивалентности системы этих уравнений системам, следующим только из равенства нулю всех $n(n + 1)/2$ компонент тензора Риччи либо только одного инварианта кривизны. Показано, что ответ на этот вопрос зависит от размерности пространства. Выделены три случая: $n = 2$ (плоская задача теории упругости), $n = 3$ (пространственная задача теории упругости) и $n \geq 4$.

ЗАСЕДАНИЕ 328 (27 февраля 2015 г.)

С. А. Степин, В. В. Фуфаев.

Об одной модельной задаче Штурма—Лиувилля.

В случае потенциала, выраженного полиномом третьей степени, исследовано распределение собственных значений несамосопряженной задачи Штурма—Лиувилля, модельной по отношению к задаче Орра—Зоммерфельда. Изучена геометрическая структура конфигурации спектра в пределе исчезающей вязкости и получены локализационные формулы для собственных значений.

ЗАСЕДАНИЕ 329 (20 марта 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Механические и топологические аналогии в многомерной динамике.

Получены новые случаи интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела и обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Найдены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (в частности, динамика многомерного твердого тела). Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них обнаруживаются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов). Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды. Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка.

Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

- (1) Движение закрепленного на обобщенном сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).
- (2) Движение свободного многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).
- (3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, а также находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

ЗАСЕДАНИЕ 330 (27 марта 2015 г.)

А. С. Семенов.

Задача о динамическом сжатии тонкого идеального жёсткопластического слоя.

Приведено сравнение асимптотических решений задач о течении идеального жёсткопластического материала между сближающимися жёсткими плитами в квазистатической (решение Прандтля) и существенно динамической постановках. Показано, что динамические слагаемые в уравнениях движения оказывают влияние прежде всего на асимптотики давления. Выявлены два малых безразмерных параметра, от соотношения которых зависят силовые режимы движения плит навстречу друг другу.

ЗАСЕДАНИЕ 331 (3 апреля 2015 г.)

В. А. Кадьмов, Н. А. Белов, Е. Н. Сосенушкин.

Пластическое течение в тонком слое: аналитическое решение новой задачи и сравнение с экспериментом.

В докладе приведены и проанализированы результаты экспериментов по осадке и растеканию между сближающимися жесткими плитами тонких образцов из модельного материала, имеющих форму прямоугольника в плане. Течение ограничено неподвижными стенками штампа, которые расположены вдоль длинных сторон прямоугольных образцов. Выявлены количественные закономерности наблюдаемого течения; в частности, показано, что профиль (скоростей) перемещений является выпуклым в направлении течения, а не постоянным.

Представлены положения двумерной теории течения в тонком пластическом слое, предложенной А. А. Ильюшиным на основе осреднения по толщине слоя. Обсуждаются общая и упрощенная постановки краевой задачи с непроницаемыми и свободными границами. Показано, что результаты проведенных экспериментов принципиально невозможно описать с помощью решения задачи в упрощенной постановке. В рамках общей постановки найдено приближенное аналитическое решение задачи, которое хорошо согласуется с результатами эксперимента вдали от свободной границы и центральной части образца.

ЗАСЕДАНИЕ 332 (7 апреля 2015 г. (выездное))

С. А. Агафонов.

Устойчивость по Ляпунову: классические и современные концепции.

ЗАСЕДАНИЕ 333 (24 апреля 2015 г.)

Т. М. Мельник.

Изгиб стержня, неоднородного в поперечном сечении.

ЗАСЕДАНИЕ 334 (15 мая 2015 г.)

А. В. Архангельский.

Развитие идеи компактности в Московской математической школе.

ЗАСЕДАНИЕ 335 (22 мая 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Одноосное растяжение тонкого жёсткопластического листа при наличии шейки.

Неодноосность напряжённого состояния и неоднородность поля скоростей вблизи области шейки при безынерционном пластическом растяжении тонких листов, прутков, тонкослойных оболочек давно нашли экспериментальное подтверждение. Предложено много математических моделей, описывающих различные аспекты эволюции шейки от её случайного образования вплоть до разрушения растягиваемого тела.

В работе с привлечением методики асимптотического интегрирования найдены поправки к одноосному полю напряжений и однородному полю скоростей в задаче о растяжении плоского тонкого жёсткопластического листа переменной толщины при задании скорости взаимного удаления торцов листа друг от друга. Используется приближение тонкого слоя с естественным малым геометрическим (асимптотическим) параметром, равным отношению средней толщины листа к его длине.

ЗАСЕДАНИЕ 336 в рамках XVII Международной конференции «DYNAMICAL SYSTEMS MODELING AND STABILITY INVESTIGATION» (29 мая 2015 г.).

1. *Д. В. Георгиевский.*

Эквивалентность систем уравнений совместности в напряжениях в \mathbf{R}^n .

Путём приравнивания нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера ранга $2n - 4$ либо дуального к нему тензора Римана $\mathbf{R}^{\{4\}}(\varepsilon(\mathbf{x}))$ выведены $n^2(n^2 - 1)/12$ независимых уравнений совместности в напряжениях в n -мерной изотропной упругой среде:

$$2R_{rmst}(\varepsilon(\sigma(\mathbf{x}))) = \sigma_{rs,mt} + \sigma_{mt,rs} - \sigma_{ms,rt} - \sigma_{rt,ms} + \\ + \frac{\nu}{1 + \nu} (\Theta_{,rt}\delta_{ms} + \Theta_{,ms}\delta_{rt} - \Theta_{,mt}\delta_{rs} - \Theta_{,rs}\delta_{mt}) = 0, \quad (1)$$

где запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей координате, ν — коэффициент Пуассона, присутствующий в обратном законе Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} (-\nu\Theta\delta_{ij} + (1 + \nu)\sigma_{ij}), \quad \Theta = \sigma_{kk}; \quad (2)$$

по повторяющимся два раза индексам ведётся суммирование от 1 до n .

Исследуется вопрос (см. [1–5]) об эквивалентности системы (1) другим известным в теории упругости системам уравнений совместности в напряжениях, следующим только из равенства

нулю всех $n(n+1)/2$ компонент тензора Риччи:

$$\Delta\sigma_{ms} + \frac{1 + (3-n)\nu}{1+\nu} \Theta_{,ms} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta\Theta \delta_{ms} - \sigma_{mr,rs} - \sigma_{sr,rm} = 0 \quad (3)$$

либо только одного инварианта кривизны:

$$\Delta\Theta = \frac{1+\nu}{1+(2-n)\nu} \sigma_{mr,mr}. \quad (4)$$

Показано, что ответ на этот вопрос зависит от размерности пространства. Выделяются три случая: $n = 2$ (плоская задача теории упругости), $n = 3$ (пространственная задача теории упругости) и $n \geq 4$.

Библиография

1. *Бородачѳв Н. М.* Решения пространственной задачи теории упругости в напряжениях// Прикл. мех. — 2006. — 42, № 8. — С. 3–35.
2. *Георгиевский Д. В.* Общие решения не эквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2012. — 6. — С. 26–32.
3. *Победра Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
4. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Levi-Civita symbols, generalized vector products, and new integrable cases in mechanics of multidimensional bodies// J. Math. Sci. — 2012. — 187, №. 3. — С. 280–299.
5. *Pobedrya B. E., Georgievskii D. V.* Equivalence of formulations for problems in elasticity theory in terms of stresses// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — 13, №. 2. — С. 203–209.

2. М. В. Шамолин.

Обзор случаев интегрируемости в многомерной динамике неконсервативных систем.

Результаты работы являются развитием одной некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [2]).

Как известно, понятие интегрируемости является, вообще говоря, достаточно расплывчатым. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Трансцендентность понимается здесь не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек в комплексной плоскости (см. [1]).

В ранних работах автора была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. В более поздних работах автора плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай; при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем автором была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда взаимодействие среды с n -мерным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$ -мерного диска; при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости (см. [1–3]).

Библиография

1. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
2. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
3. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.

ЗАСЕДАНИЕ 337 (5 июня 2015 г.)

В. В. Власов, Н. А. Раутман, Р. Перес Ортиз.

Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

ЗАСЕДАНИЕ 338 (26 июня 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Многопараметрические системы маятникового типа.

Рассмотрен некоторый класс механических систем колебательного типа, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, содержащими в качестве параметров классы допустимых функций, имеющими знакопеременную диссипацию и обладающими свойствами динамической симметрии. Изучаются свойства математических моделей таких систем в зависимости от функций.

Для некоторых классов маятниковых систем, правые части которых зависят от гладких функций, проведен качественный анализ, т.е. пространство рассматриваемых систем разбито на области с различным поведением траекторий на фазовом цилиндре квазискоростей. Изучены самостоятельные качественные проблемы, например, вопросы относительной грубости в пространстве правых частей динамических систем.

1. *Некоторые обобщения: системы, зависящие от функциональных классов.* Рассматривается класс динамических систем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(a + b \cos x)y - (c + d \cos x) \sin x \tag{1}$$

с аналитической правой частью, где a, b, c, d — параметры, которые могут принимать любые значения из \mathbb{R} . Уравнения (1) являются частным случаем системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -h(x, p)y - q(x, p)$$

с позиционно-вязким трением, когда

$$h(x, p) = (a + b \cos x)y, \quad q(x, p) = (c + d \cos x) \sin x.$$

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\dot{x} = y + \varepsilon \frac{F(x)}{\cos x}, \quad \dot{y} = -F(x), \tag{2}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, в правую часть которой входит функция $F(x)$ вида

$$F(x) = R(x)s(x), \tag{3}$$

где $R(x) \in \mathcal{R}$, $s(x) \in \Sigma$ (см. описания этих классов ниже). При $\varepsilon = 1$ система (2) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы. Система вида (2) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре; при этом $\varepsilon = 1$, переменная x имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная y — угловой скорости. Кроме того, система вида (2) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела; при этом $\varepsilon = -1$, переменная x имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная y — угловой скорости.

Для качественного описания пары функций $R(x)$, $s(x)$ используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из 2π -периодических гладких функций (s — четная, а R — нечетная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(x) > 0$ при $x \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций \mathcal{R}); $s(x) > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$, $s(x) < 0$ при $x \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций Σ). Как R , так и s меняют знак при замене x на $x + \pi$. В частности, аналитические функции типа функций Чаплыгина

$$R = R_0(x) = A \sin x \in \mathcal{R}, \quad s = s_0(x) = B \cos x \in \Sigma, \quad A, B > 0, \quad (4)$$

служат типичными представителями описанных выше классов.

В рассматриваемой динамической системе (2) возникает произведение (3). Из вышеперечисленных условий следует, что F — достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(x) > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций Φ).

В силу определения класса функций Φ можно сделать вывод, что правая часть системы (2) является гладкой вектор-функцией, поэтому саму систему (2) можно рассматривать на двумерном цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \bmod 2\pi\}$.

Итак, в данном случае нам приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью пары функций, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

Система (2) эквивалентна системе

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -F(x) + \varepsilon u \frac{d}{dx} g(x), \quad (5)$$

где $g(x) = F(x)/\cos x$ — гладкая функция.

В частности, при выполнении условий (4) система (5) примет вид аналитической системы:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -AB \sin x \cos x + \varepsilon AB u \cos x, \quad (6)$$

и при $a = AB$, $b = -\varepsilon AB$, $u \leftrightarrow y$ совпадает с системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ay \cos x - b \sin x \cos x.$$

Основной результат касается фазового портрета системы (5) для всех функций $F \in \Phi$.

Ранее было проведено полное исследование динамической системы (2) на фазовом цилиндре. Система (2) определена с помощью пространства функций Φ и имеет фазовый портрет, не меняющий своего топологического типа при варьировании функции F вдоль всего класса Φ .

Напомним также, что система вида (2) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре; при этом $\varepsilon = 1$, переменная x имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная y — угловой скорости. Также система вида (2) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела, при этом $\varepsilon = -1$, переменная x имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная y — угловой скорости.

2. Несохранение топологических особенностей фазовых портретов общей системы. Будем рассматривать более общую систему, чем система (2), а именно,

$$\dot{x} = y + A_1 \frac{F(x)}{\cos x}, \quad \dot{y} = A_2 F(x) - hy, \quad A_1 > 0, \quad A_2 < 0, \quad (7)$$

на фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \bmod 2\pi\}$, в правую часть которой входит функция $F(x)$, пробегающая функциональный класс Φ . Система (7) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы и дополнительного демпфирования со стороны среды.

Итак, в данном случае нам опять приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью функции, что значительно усложняет проведение качественного анализа. Система (7) эквивалентна

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = A_2 F(x) + u \frac{d}{dx} g(x) - h(u - g(x)), \quad (8)$$

где по-прежнему $g(x) = A_1 F(x) / \cos x$ — гладкая функция. В частности, при выполнении условий (4) ($F(x) = AB \sin x \cos x$ — функция типа функций Чаплыгина) система (7) примет вид аналитической:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -AB \sin x \cos x + ABu \cos x - hu + hAB \sin x, \quad (9)$$

и при $A_1 = 1, A_2 = -1, a = h, b = -AB, c = -hAB, d = AB, u \leftrightarrow y$ совпадает с системой (1).

Система частного вида (4) сохраняет все топологические особенности строения фазового портрета общей системы (5). Однако система (9) не обладает таким свойством по отношению к системе (7) по следующей причине. Пространство векторных полей систем вида (7) разбивается по крайней мере на два класса, в каждом из которых соответствующий фазовый портрет имеет определенный тип. По мере исследования системы (7) будет указано, для каких функций $F \in \Phi$ проводится качественный анализ.

3. Замечания об интегрируемости системы. У рассматриваемой системы при некоторых условиях существуют притягивающие и отталкивающие не только точки покоя, но и предельные циклы. Таким образом, если у системы (7) и существует первый интеграл на всем фазовом цилиндре, то он является разрывной функцией не только в отталкивающих и притягивающих точках, но и на целых замкнутых кривых.

Вопросы интегрируемости систем через конечную комбинацию элементарных функций в данной работе подробно не рассматриваются.

ЗАСЕДАНИЕ 339 (11 сентября 2015 г.)

Н. Л. Поляков.

О теоремах невозможности и возможности в теории принятия решений.

Теоремами невозможности принято называть утверждения, относящиеся к теории коллективного выбора (“social choice theory”) и утверждающие, что при тех или иных условиях не существует правила агрегирования индивидуальных систем предпочтений, которое обладает некоторыми естественными свойствами. Первым и самым известным результатом в этой области была теорема (парадокс) Эрроу (1950), устанавливающая отсутствие «хороших» правил агрегирования для рациональных систем предпочтений. Наиболее сильным обобщением теоремы Эрроу в настоящее время является, по-видимому, результат работы [1]. Как показывают исследования последних десятилетий, несуществование удовлетворительных правил агрегирования есть обычное явление для весьма широкого класса условий. Редкие нарушения этой закономерности называются теоремами возможности.

Доклад посвящен распространению результатов теории коллективного выбора на значительно более широкий класс моделей. А именно, вместо частной задачи построения коллективной функции выбора по индивидуальным функциям выбора участников, рассматривается задача агрегирования процедур принятия решений, т.е. произвольных функций из конечного множества Q (условий) в конечное множество A (решений). Ставится вопрос, какие симметричные (т.е. не зависящие от вида конкретных условий) множества процедур принятия решений могут сохраняться естественным правилом агрегирования.

Для получения ответа автор строит классификацию клонов правил агрегирования, сохраняющих какой-либо симметричный класс процедур принятия решений. Вне соображений мотивации, эта классификация есть описание решетки симметричных консервативных клонов с носителем A . Оказывается, каждый такой клон может быть представлен в виде пересечения четырех простейших клонов специального вида. Первый из них состоит из всех консервативных функций на множестве A , которые совпадают с некоторой проекцией на множестве последовательностей, содержащих не более r различных элементов множества A (для некоторого числа r). Второй состоит

из всех консервативных функций, удовлетворяющих условию 2-монотонности на множестве последовательностей, содержащих не более m различных элементов множества A (для некоторого числа m). Третий клон определяется устойчивым справа и слева отношением эквивалентности R : он состоит из всех консервативных функций, которые совпадают с некоторой проекцией на каждом классе эквивалентности отношения R . Наконец, четвертый клон определяется замкнутым относительно двойственности постовским классом Π функций, сохраняющих ноль и единицу; в него включаются все консервативные функции f , ограничения которых на каждое множество B_n , где B — двухэлементное подмножество множества A , а n — арность функции f , принадлежат клону с носителем B , который натурально эквивалентен классу Π .

Библиография

1. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу Докл. РАН. — 2014. — 456, № 2. — С. 143–145.

ЗАСЕДАНИЕ 340 (25 сентября 2015 г.)

А. Г. Галканов.

Критерий приводимости квадратичной формы к полному квадрату и его применения.

ЗАСЕДАНИЕ 341 (16 октября 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Об интегрируемости динамических систем в элементарных функциях.

Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д.

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не только в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область.

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \end{aligned} \tag{1}$$

имеющей особенность типа $1/x$? Другими словами, изучается вопрос существования первых интегралов для класса неавтономных однородных систем второго порядка. Вводя подстановки $y = ux$, $z = vx$, приведем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= \frac{ax + bux + (c - d_1)vx + (c_1 - f)v^2x + (c_2 - e)vux + c_3u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{gx + (h - d_1)ux + ivx + i_1v^2x + (i_2 - f)vux + (i_3 - e)u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \end{aligned} \quad (2)$$

которой поставим в соответствие следующее неавтономное уравнение с алгебраической правой частью:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - v[d_1 + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - u[d_1 + eu + fv]}.$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned} [g + (h - d_1)u + iv + i_1v^2 + (i_2 - f)uv + (i_3 - e)u^2]dv &= \\ &= [a + bu + (c - d_1)v + (c_1 - f)v^2 + (c_2 - e)uv + c_3u^2]du. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (3).

1. *Некоторые случаи наличия рационального первого интеграла.* В рассматриваемых случаях изучаемая неавтономная система второго порядка обладает полным набором (двумя) первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Оба первых интеграла являются, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных с точки зрения комплексного анализа. При этом один из предъявляемых первых интегралов является рациональной однородной функцией — отношением $\frac{P_m(x, y, z)}{Q_m(x, y, z)}$ двух однородных полиномов $P_m(x, y, z)$, $Q_m(x, y, z)$ степени m .

2. *Некоторые случаи наличия трансцендентного первого интеграла.* Будем интегрировать уравнение (3) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$\varrho(u) = \frac{1}{u^s}, \quad s > 1, \quad s \neq 2, \quad s \neq 3.$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$g = 0, \quad i = 0, \quad i_1 = 0, \quad h = \frac{c + (s - 2)d_1}{s - 1}, \quad i_2 = \frac{2c_1 + (s - 3)f}{s - 1}, \quad i_3 = \frac{c_2 + (s - 3)e}{s - 2}. \quad (4)$$

Введем 9 параметров β_1, \dots, β_9 и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\beta_1 = a, \quad \beta_2 = b, \quad \beta_3 = c, \quad \beta_4 = c_1, \quad \beta_5 = c_2, \quad \beta_6 = c_3, \quad \beta_7 = d_1, \quad \beta_8 = e, \quad \beta_9 = f. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение (3) при выполнении групп условий (4), (5) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + \beta_6u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{(\beta_3 - \beta_7)u/(s - 1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s - 1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s - 2)}, \quad (6)$$

а система (2) — к виду

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + \beta_6u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v},$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u/(s - 1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s - 1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s - 2)}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v},$$

после чего уравнение (6) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, получаем инвариантное соотношение

$$\frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1}v + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1}v^2 + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2}uv + \frac{\beta_1}{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}u + \frac{\beta_6}{s-3}u^2}{u^{s-1}} = C_1 = \text{const},$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в виде

$$\frac{\frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1}zx^{s-2} + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1}z^2x^{s-3} + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2}yzx^{s-3} + \frac{\beta_1}{s-1}x^{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}yx^{s-2} + \frac{\beta_6}{s-3}y^2x^{s-3}}{y^{s-1}} = C_1 = \text{const}. \quad (7)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1x + \beta_2y + \beta_3z + \beta_4z^2/x + \beta_5zy/x + \beta_6y^2/x}{\beta_7x + \beta_8y + \beta_9z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\beta_3 + (s-2)\beta_7}{s-1}y + \frac{2\beta_4 + (s-3)\beta_9}{s-1}\frac{zy}{x} + \frac{\beta_5 + (s-3)\beta_8}{s-2}\frac{y^2}{x}}{\beta_7x + \beta_8y + \beta_9z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема. Система третьего порядка ($s > 1$, $s \neq 2$, $s \neq 3$)

$$\dot{\alpha} = \beta_7 \sin \alpha + \beta_8 z_1 + \beta_9 z_2,$$

$$\dot{z}_2 = \beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 z_1 \cos \alpha + \beta_3 z_2 \cos \alpha + \beta_4 z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\dot{z}_1 = \frac{\beta_3 + (s-2)\beta_7}{s-1} z_1 \cos \alpha + \frac{2\beta_4 + (s-3)\beta_9}{s-1} z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\beta_5 + (s-3)\beta_8}{s-2} z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

зависящая от 9 параметров β_1, \dots, β_9 , рассмотренная на множестве

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R}^1 : 0 < \alpha < \pi \right\} \times \mathbb{R}^2 \{z_1, z_2\},$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\frac{P_{s-1}(z_2, z_1, \sin \alpha)}{z_1^{s-1}} = C_1 = \text{const},$$

где

$$\begin{aligned} P_{s-1}(z_2, z_1, \sin \alpha) &= \frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1} z_2 \sin^{s-2} \alpha + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1} z_2^2 \sin^{s-3} \alpha + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2} z_1 z_2 \sin^{s-3} \alpha + \\ &+ \frac{\beta_1}{s-1} \sin^{s-1} \alpha + \frac{\beta_2}{s-2} z_1 \sin^{s-2} \alpha + \frac{\beta_6}{s-3} z_1^2 \sin^{s-3} \alpha \end{aligned}$$

— однородная функция степени $s-1$ по совокупности переменных $(z_2, z_1, \sin \alpha)$.

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (8) используется найденный первый интеграл (7), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

3. Заключение. Рассмотренные в работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции. В работе в целом было приведено несколько случаев полной интегрируемости в динамике пространственного движения тела в неконсервативном поле. При этом мы имели дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

- (1) выделенный выше класс систем с отмеченными симметриями на касательном расслоении к сфере;
- (2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним, что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы;
- (3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать первые интегралы (или же доказывать их отсутствие) для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями.

ЗАСЕДАНИЕ 342 (23 октября 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Обобщённое представление Галёркина для трансверсально изотропной теории упругости.

Для трансверсально изотропной линейно упругой среды описан алгоритм расщепления системы уравнения равновесия в перемещениях с объёмными силами, приводящий к трем не связанным уравнениям с некоторыми каноническими дифференциальными операторами четвертого порядка относительно трех компонент вектора перемещений. Показано, что в частном случае изотропии предложенный алгоритм математически эквивалентен известному в теории упругости представлению Галёркина.

ЗАСЕДАНИЕ 343 (30 октября 2015 г.)

Н. С. Стеценко.

Определение свойств линейно вязкоупругих материалов из специальных экспериментов.

В докладе рассматривается общая задача идентификации моделей линейной вязкоупругости, а именно, способы нахождения ядер релаксации из двух типов экспериментов: эксперимента, в котором деформация возрастает линейно до некоторого момента и затем выходит на постоянную, и эксперимента, в котором на начальном этапе деформация возрастает по кубическому закону, а затем вновь выходит на постоянную.

Проведено сравнение ядер релаксации, определенных двумя способами на основании данных этих двухзвенных экспериментов: методами, предложенными в [1, 2], и методом, в котором сразу делается предположение о представлении ядра релаксации отрезком ряда Прони. На конкретном примере показано хорошее совпадение ядер, определенных разными способами, при меньшей трудозатратности последнего. Аналитически и численно изучено выполнение «правила $10t_0$ », приведен пример модели линейно вязкоупругого материала и процесса деформации, для которого это правило не выполняется.

Библиография

1. *Lee S., Knauss W. G.* A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests// Mech. Time-Dependent Materials. — 2000. — 4, № 1. — С. 1–7.
2. *Stankiewicz A.* Identification of relaxation modulus of viscoelastic materials from non-ideal ramp-test histories—problem and method// ТЕКА Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. — 2013. — 13, № 1. — С. 169–176.

ЗАСЕДАНИЕ 344 (20 ноября 2015 г.)

С. В. Яблонский.

Вихревое течение в свободно подвешенных плёнках.

Впервые в ультратонких свободно подвешенных плёнках на основе смектических жидких кристаллов акустическим способом индуцировано вихревое течение. Обнаружены ряд особенностей вихревого течения, требующих объяснения. Во-первых, всегда появляется лишь чётное количество вихрей. Во-вторых, в квадратной рамке на частоте акустического возбуждения, соответствующей вырожденной моде, например, 2, 1 или 1, 2, можно индуцировать разное количество вихрей

(2 или 4) в зависимости от неоднородности акустического поля. Обнаружен порог возникновения вихревого течения. Данная работа выполнена благодаря новому методу визуализации макроскопического течения: наблюдением за дефектами на поверхности плёнки.

ЗАСЕДАНИЕ 345 (27 ноября 2015 г.)

А. Н. Емельянов.

Эффективные характеристики в моментной теории упругости.

ЗАСЕДАНИЕ 346 (11 декабря 2015 г.)

А. В. Хиженков.

О расщеплении уравнений микрополярной теории призматических тел.

ЗАСЕДАНИЕ 347 (12 февраля 2016 г.)

В. К. Ковальков.

Вопросы исследования свойств биологических тканей и органов.

ЗАСЕДАНИЕ 348 (19 февраля 2016 г.)

М. В. Шамолин.

Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам.

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы с пространствами положений, являющимися сферами конечной размерности. Фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Например, изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле наличия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость в элементарных функциях некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

1. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha), \quad \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2 f(\alpha), \quad \dot{z}_1 = z_1 z_2 f(\alpha), \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha) \quad (2)$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ к двумерной сфере $\mathbb{S}^2\{(\alpha, \beta_1) : 0 \leq \alpha \leq \pi, \beta \bmod 2\pi\}$.

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (1) и уравнение (2) задают координаты z_1 , z_2 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (1) является независимой подсистемой третьего порядка (ввиду цикличности переменной β).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) - \dot{\beta}^2 \frac{1}{f(\alpha)} = 0, \quad \ddot{\beta} - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} = 0.$$

При $b = 0$ система (1), (2) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const},$$

$$F_2(z_1; \alpha) = z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const}, \quad F_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = C_3 = \text{const}.$$

При $b > 0$ система (1), (2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (4)$$

В случае (3) получаем класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В случае (4) получаем класс систем, соответствующих движению материальной точки на сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (1), (2) описывает геодезический поток на двумерной сфере.

В случае (3) если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система (1) описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \quad (5)$$

то система (1), (2) описывает также пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

2. *Случай (3).* Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Теорема 1. *В случае (6) система (1), (2) обладает полным набором (а именно, тремя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - ab\dot{\alpha} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \sin^{2a-1} \alpha \cos \alpha - \dot{\beta}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \\ \ddot{\beta} - b\dot{\beta} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = 0 \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

3. *Случай (4).* Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k \alpha}{\cos^k \alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Теорема 2. *В случае (7) система (1), (2) обладает полным набором (а именно, тремя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - kb\dot{\alpha}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin\alpha \cos\alpha = 0, \\ \ddot{\beta} - b\dot{\beta}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

4. *Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере.* Рассмотрим системы вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + bg(\alpha), & \dot{z}_3 &= F(\alpha) - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_2 &= z_2 z_3 f(\alpha) + z_1^2 f(\alpha) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \dot{z}_1 &= z_1 z_3 f(\alpha) - z_1 z_2 f(\alpha) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 f(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1}, \quad (9)$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ к трехмерной сфере

$$\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — силовое поле. Первое и последнее уравнения системы (8) и уравнение (9) задают координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (8) является независимой подсистемой пятого порядка (ввиду цикличности переменной β_2).

Система (8), (9) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) - \dot{\beta}_1^2 \frac{1}{f(\alpha)} - \dot{\beta}_2^2 \frac{\sin^2\beta_1}{f(\alpha)} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} - \dot{\beta}_2^2 \sin\beta_1 \cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0. \end{cases}$$

Для полного интегрирования системы (8), (9) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \rightarrow z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система принимает следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_3 + bg(\alpha), \quad \dot{z}_3 = F(\alpha) - z^2 f(\alpha), \quad \dot{z} = z z_3 f(\alpha), \quad (10)$$

$$\dot{z}_* = (\pm) z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \dot{\beta}_1 = (\pm) \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \quad (11)$$

$$\dot{\beta}_2 = (\pm) \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1}. \quad (12)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (10)–(12) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (10), один — системы (11), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (12) (т.е. всего четыре).

При $b = 0$ система (8), (9) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const},$$

$$F_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const},$$

$$F_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 = C_3 = \text{const},$$

$$F_4(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = C_4 = \text{const}.$$

При $b > 0$ система (8), (9) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим также два существенных случая (3) и (4) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере.

В случае (3) имеем класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В случае (4) имеем класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (8), (9) описывает геодезический поток на трехмерной сфере.

В случае (3) если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система (8), (9) описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если выполнены условия (5), то система (8), (9) описывает также четырехмерный (обобщенный сферический) маятник в неконсервативном поле и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

5. *Случай (3)*. Пусть выполнены условия (6) на силовое поле. В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Теорема 3. *В случае (6) система (8), (9) обладает полным набором (а именно, четырьмя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - ab\dot{\alpha} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \sin^{2a-1} \alpha \cos \alpha - \dot{\beta}_1^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0, \end{cases}$$

обладает четырьмя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

6. *Случай (4)*. Пусть выполнены условия (7) на силовое поле.

Теорема 4. *В случае (8) система (8), (9) обладает полным набором (а именно, четырьмя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - kb\dot{\alpha} \frac{\sin^{k-1} \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} + \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha} - \dot{\beta}_1^2 \sin \alpha \cos \alpha - \dot{\beta}_2^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 \frac{\sin^{k-1} \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 \frac{\sin^{k-1} \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0, \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

В предыдущих работах автора уже рассматривались задачи о движении свободного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики твердого тела задачу о движении точки по сферам размерности 2 и 3 в неконсервативных силовых полях.

ЗАСЕДАНИЕ 349 (4 марта 2016 г.)

В. И. Ванько.

Моделирование колебаний проводов расщеплённой фазы.

ЗАСЕДАНИЕ 350 (11 марта 2016 г.)

А. А. Козырев.

Одномерные и двумерные редукции уравнений пограничного слоя.

Предложен метод нахождения редукций уравнений с частными производными (УЧП), являющийся развитием прямого метода Кларксона—Крускала. Этот метод более прост в использовании и позволяет эффективно искать редукции УЧП с меньшим числом независимых переменных и к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Проведена групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. На основе результатов групповой классификации сделан вывод об отсутствии нестационарного аналога преобразования Степанова—Манглера.

Для уравнения стационарного плоского пограничного слоя найдены все редукции к ОДУ (одномерные редукции). Для уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя найдены все редукции к УЧП с двумя независимыми переменными (двумерные редукции) и к ОДУ (одномерные редукции). Показано, что исследуемые уравнения имеют редукции, не получаемые с помощью группового анализа.

Для уравнений стационарного плоского и осесимметричного пограничных слоев показана единственность преобразования Степанова—Манглера с точностью до преобразований эквивалентности.

ЗАСЕДАНИЕ 351 (18 марта 2016 г.)

Д. В. Георгиевский.

Тензорно нелинейные функции в теории определяющих соотношений: потенциальность и установочные эксперименты.

Рассмотрены изотропные квадратичные нелинейные тензор-функции, моделирующие в теории определяющих соотношений среды, в которых имеют место эффекты второго порядка, в частности, несоосность силового и кинематического тензоров. Интерес представляют тензор-функции, обладающие скалярным потенциалом и связывающие два симметричных девиатора второго ранга. В этом случае условия потенциальности проинтегрированы и показано, что в первый интеграл входят две произвольные функции квадратичного инварианта тензора-аргумента и одна произвольная функция его кубического инварианта. Проведено тензорно-нелинейное обобщение жестковязкопластической модели (двухконстантного тела Бингама).

Описана принципиальная схема установочных экспериментов для нахождения трех материальных функций тензорно-нелинейных определяющих соотношений в механике сплошной среды.

Данные материальные функции зависят от трех инвариантов напряженного состояния. Предлагается использовать длинные цилиндрические полые образцы, в которых можно осуществлять любую комбинацию следующих четырех реализуемых в эксперименте базисных напряженных состояний: одноосное растяжение, кручение, продольный сдвиг, всестороннее сжатие.

ЗАСЕДАНИЕ 352 (8 апреля 2016 г.)

В. И. Горбачев.

Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов.

ЗАСЕДАНИЕ 353 (22 апреля 2016 г.)

С. А. Довбыш.

Квазислучайные движения и неинтегрируемость в системах с непрерывной группой симметрий.

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные; наличие такой переменной равносильно существованию однопараметрической группы симметрий. Между тем, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведенной системы, получаемой редукцией по группе симметрий (исключением циклической переменной). Типичный пример — классическая задача о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Неинтегрируемость (отсутствие непостоянного аналитического первого интеграла) может быть вызвана существованием квазислучайных («хаотических», но детерминированных) движений. В настоящей работе получены простые конструктивно проверяемые условия, при выполнении которых квазислучайным движениям приведенной системы, получаемой редукцией по непрерывной группе симметрий, соответствуют движения с аналогичными свойствами в исходной системе, что гарантирует неинтегрируемость последней.

ЗАСЕДАНИЕ 354 (29 апреля 2016 г.)

В. В. Власов, А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов.

Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

ЗАСЕДАНИЕ 355 (29 мая 2016 г.)

А. В. Аксенов.

Фундаментальное решение уравнений в перемещениях в трансверсально-изотропной теории упругости.

В [2] для трансверсально изотропной линейно-упругой среды система уравнений в перемещениях была редуцирована к системе из трех линейных неоднородных уравнений относительно трех компонент вектора перемещений. Однородным уравнениям соответствуют канонические линейные дифференциальные уравнения с частными производными четвертого порядка. Полученные канонические уравнения являются обобщением бигармонического уравнения, описывающего перемещения изотропной линейно-упругой среды. Для нахождения перемещений трансверсально изотропной линейно-упругой среды при наличии заданной объемной силы необходимо знать фундаментальные решения канонических уравнений.

Фундаментальные решения линейных уравнений математической физики зачастую являются инвариантными относительно преобразований, допускаемых исходным уравнением (см. [3]). Для построения фундаментального решения в настоящей работе используется алгоритм, предложенный автором в [1]. Алгоритм основан на использовании симметрий, допускаемых линейным дифференциальным уравнением с частными производными с дельта-функцией в правой части.

Основным результатом работы является построение в элементарных функциях инвариантного фундаментального решения уравнения трансверсально изотропной линейно-упругой среды.

Библиография

1. Аксенов А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Докл. РАН. — 1995. — 342, № 2. — С. 151–153.

2. *Георгиевский Д. В.* Обобщенное представление Галеркина для трансверсально изотропной линейно-упругой среды // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 6. — С. 883–887.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

ЗАСЕДАНИЕ 356 (3 июня 2016 г.)

В. Путкарадзе.

О динамике трубок с жидкостью: геометрические методы, точные решения, вариационные интеграторы.

Разрабатывается трехмерная геометрически точная теория течения жидкости в гибкой трубе переменного поперечного сечения. Предлагаемый подход основан на редукции симметрий, точном геометрическом описании упругих стержней в сочетании с уравнениями движения жидкости и законом сохранения объема. Получены трехмерные уравнения движения, проведен анализ линейной устойчивости и показано, что построенная теория вводит важные поправки к ранее полученным результатам, как относительно согласованности длины волны, так и в эффектах, возникающих из динамического изменение поперечного сечения трубы. Получены и проанализированы несколько аналитических нелинейных решений уравнения типа бегущей волны в двумерном случае. Приведена вариационная дискретизация задачи как по пространственным, так и по временной переменной. Представлены также результаты экспериментов.

ЗАСЕДАНИЕ 357 (10 июня 2016 г.)

Д. Зенков.

Об уравнениях Гамеля для бесконечномерных механических систем.

Уравнения Эйлера–Лагранжа, будучи универсальными, не всегда эффективны для анализа механических систем. Например, при помощи этих уравнений затруднительно исследовать движение волчка Эйлера. В 1902 г. А. Пуанкаре систематически использовал подход Эйлера для систем на группах Ли. Г. Гамель в 1904 г. распространил результат Пуанкаре на конечномерные механические системы на произвольных конфигурационных пространствах. В работе представлен формализм Гамеля для бесконечномерных систем, таких как непрерывные среды с ограничениями на скорости, в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечномерных многообразиях.

ЗАСЕДАНИЕ 358 (17 июня 2016 г.)

Э. Б. Завойчинская.

О критерии поэтапного усталостного разрушения металлов на различных масштабно-структурных уровнях при одноосном нагружении несимметричным циклом.

ЗАСЕДАНИЕ 359 (16 сентября 2016 г.)

А. В. Влахова.

Влияния разрушения на динамику систем с качением. Моделирование движений элементов промежуточного слоя между перекатывающимися телами.

ЗАСЕДАНИЕ 360, юбилейное, посвященное 50-летию профессора Д. В. Георгиевского (30 сентября 2016 г.).

Д. В. Георгиевский, Г. С. Тлюстангелов.

Экспоненциальные оценки возмущений жёсткопластического растекания-стока кольца.

Изучена эволюция во времени плоской картины малых возмущений, налагаемых на радиальное растекание либо сток кольца из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки. На расширяющихся (сужающихся) границах кольца и в основном процессе, и в возмущенном приняты условия прилипания. С помощью метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах в соответствующем комплекснозначном гильбертовом пространстве, линеаризованная задача в возмущениях сведена к одному соотношению для квадратичных функционалов, из которого выведены новые верхние

экспоненциальные оценки роста либо затухания кинематических возмущений. Показано, что угловые гармоники с разными номерами эволюционируют качественно неодинаково.

ЗАСЕДАНИЕ 361 (7 октября 2016 г.)

В. А. Титов.

Контроль бортовой микрогравитационной обстановки и продление сроков эксплуатации долговременной орбитальной станции.

К конструкциям долговременной орбитальной станции (ДОС) предъявляются противоречивые требования высокой надежности и массового совершенства. При длительной эксплуатации конструкционная надежность должна периодически подтверждаться оценками уровней внутренних силовых факторов в сечениях и остаточного прочностного ресурса, определяемого многократными режимами динамического нагружения. Достоверность оценок обеспечивается:

- (i) высокой степенью адекватности используемых динамических моделей конструкции ДОС своим натурным объектам;
- (ii) полнотой исходных данных по внешним силовым воздействиям на конструкцию ДОС.

Для оценок адекватности динамических моделей своим натурным объектам и идентификации внешних силовых воздействий применяются методы решения прямой и обратной задач динамического нагружения свободной конструкции с использованием фактической телеметрической информации о бортовых микроускорениях. Эти методы реализованы в рамках специального комплекса программно-математического обеспечения (ПМО). На основании практического опыта использования ПМО сформулированы рекомендации по контролю бортовой микрогравитационной обстановки и распространению ПМО при решении поставленных задач для перспективных ДОС.

ЗАСЕДАНИЕ 362 (14 октября 2016 г.)

Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. А. Кадымов.

Статическая и кинематическая модели механики деформируемого твердого тела.

Рассматриваются инвариантные характеристики напряженно-деформированного состояния, возникающего при выполнении различных операций обработки металлов давлением. При помощи тригонометрической формы представления напряжений и деформаций на девиаторной плоскости представлены статическая и динамическая модели, соответствующие напряженному и деформированному состояниям, где траектории главных напряжений и главных деформаций представляются дугами окружностей, что свидетельствует о немонотонности процессов изменения формы.

ЗАСЕДАНИЕ 363. Выездное заседание в Доме учёных России, посвящённое 80-летию со дня рождения академика Д. В. Аносова (21 октября 2016 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 364 (11 ноября 2016 г.)

Д. А. Загора.

Об экспоненциальной устойчивости решений одной задачи для вязкоупругого тела.

В докладе рассмотрена задача о движениях вязкоупругого тела. Эта задача описывается уравнением гиперболического типа, возмущенным интегральным слагаемым с операторным ядром специального вида. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости решений однородного уравнения, а также утверждение о стабилизации решения.

ЗАСЕДАНИЕ 365 НАУЧНЫЕ ВЫСТУПЛЕНИЯ АСПИРАНТОВ НА ТЕМУ ГОТОВНОСТИ КАНДИДАТСКИХ ДИССЕРТАЦИЙ (18 ноября 2016 г.).

1. *А. Н. Емельянов.*

Метод осреднения в микрополярной теории упругости.

2. *Г. С. Тлюстангелов.*

Устойчивость радиально-вращательного растекания-стока кольца.

3. *А. У. Садрисламов.*

Численный анализ колебания газового пузырька вблизи резонансных частот.

ЗАСЕДАНИЕ 366 (9 декабря 2016 г.)

В. П. Сушицкий.

Устойчивость колебаний вязкоупругого стержня под действием периодически изменяющейся следящей силы в упругой среде.

Изучено поведение вязкоупругого стержня, находящегося под действием периодически изменяющейся следящей силы в упругой среде. Вязкоупругое поведение стержня представлено моделью Кельвина—Фойгта. Для исследования устойчивости стержня применен динамический метод, основанный на рассмотрении колебаний системы около исследуемого положения равновесия. Получено уравнение колебаний стержня, сведенное впоследствии к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, легко поддающейся анализу на устойчивость нулевого решения. При помощи пакета Wolfram Mathematica 8.0 с большой точностью получено критическое значение следящей силы, зависящее от прочностных и геометрических свойств стержня, а также от модуля упругости среды. Показано, что наличие упругой среды приведет лишь к увеличению частоты колебаний стержня и не скажется на значении критической силы.

ЗАСЕДАНИЕ 367 ВЫЕЗДНОЕ ЗАСЕДАНИЕ В РАМКАХ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СИСТЕМЫ АНОСОВА И СОВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА» (МОСКВА, 19–23 ДЕКАБРЯ 2016 Г.), ПОСВЯЩЕННОЙ 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА Д. В. АНОСОВА (22 декабря 2016 г.).

М. В. Шамолин.

Новые случаи интегрируемых систем с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере.

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем с диссипацией на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [1]). Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Как известно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций. В данной работе получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них обнаруживаются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n - 3$:

$$\ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \left[\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_1 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \quad (1a)$$

$$\ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \left[\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_2 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \sin \eta_1 \cos \eta_1 = 0, \quad (1b)$$

$$\ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - \left[\dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_3 + \dot{\eta}_5^2 \sin^2 \eta_3 \sin^2 \eta_4 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_3 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \sin \eta_2 \cos \eta_2 = 0, \quad (1c)$$

.....

$$\ddot{\eta}_{n-3} + b_* \dot{\eta}_{n-3} \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_{n-3} \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_{n-3} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + \dots + 2\dot{\eta}_{n-4} \dot{\eta}_{n-3} \frac{\cos \eta_{n-4}}{\sin \eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin \eta_{n-3} \cos \eta_{n-3} = 0,$$

$$\ddot{\eta}_{n-2} + b_* \dot{\eta}_{n-2} \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_{n-2} \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_{n-2} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + \dots + 2\dot{\eta}_{n-3} \dot{\eta}_{n-2} \frac{\cos \eta_{n-3}}{\sin \eta_{n-3}} = 0,$$

где $b_* > 0$, описывающую закрепленный n -мерный маятник в неконсервативном поле сил. Переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$T\mathbb{S}^{n-1} \{ \dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2} \} \quad (2)$$

к $(n - 1)$ -мерной сфере

$$\mathbb{S}^{n-1} \left\{ \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2} : 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi \right\}.$$

Рассматриваемая система (1) является динамической системой с переменной диссипацией (см. [1–3]) на касательном расслоении (2).

Теорема. Система (1) на касательном расслоении (2) обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда рассматриваемые функции (первые интегралы) имеют существенно особые точки, соответствующие притягивающим или отталкивающим предельным множествам в фазовом пространстве системы.

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 3$ независимых первых интегралов. Однако после некоторой замены переменных система (1) распадается

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -w_{n-1} - b_* \sin \xi, & w'_{n-1} &= \sin \xi \cos \xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w'_{n-2} &= w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} w'_s &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2 \cos \eta_s}{w_s \sin \eta_s}, \\ \eta'_s &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}), \quad s = 1, \dots, n-3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}). \quad (5)$$

Видно, что в системе (3)–(5) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3), $n-3$ независимых систем второго порядка (4) (после замены независимой переменной), а также уравнение (5) на η_{n-2} . Для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для каждой из систем (4) (их общее число равно $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5) (*m.e.* всего n интегралов).

Один из первых интегралов системы (3) следующий:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1} \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_{n-2} \sin \xi} = C_1 = \text{const}, \quad (6)$$

а дополнительный первый интеграл системы (3) имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2 \left(\sin \xi, \frac{w_{n-1}}{\sin \xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (7)$$

Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5). Указанные интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \eta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \quad (8)$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) = \eta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \text{const}; \quad (9)$$

при этом в левую часть равенства (9) вместо C_{n-2} , C_{n-1} необходимо подставить первые интегралы (8) при $s = n-4$, $n-3$.

Библиография

1. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
2. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
3. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 4–254.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 16–45.

2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: Ин-т кибернетики НАН Грузии, 2009. — 62. — С. 3–15.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. Тбилиси: НАН Грузии, 2009. — 65. — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: НАН Грузии, 2012. — 76. — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: НАН Грузии, 2015. — 88. — С. 3–24.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. Тбилиси: НАН Грузии, 2015. — 98. — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: Груз. техн. ун-т, 2016. — 100. — С. 3–11.

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru