



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Винницкий, О представлении целых функций рядами  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ ,  
*Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 3, 361–372

<https://www.mathnet.ru/mzm6520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 06:53:45



## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$$

Б. В. Винницкий

А. Ф. Леонтьевым [1] показано, что если  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  — целая функция типа  $\sigma < \infty$  порядка  $\rho$ ,  $a_n \neq 0$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{\rho/n} > 0$ , то каждую целую функцию  $F(z)$  можно представить во всей плоскости рядом  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ . В настоящей заметке мы распространим это утверждение А. Ф. Леонтьева на случай, когда  $f(z)$  — функция произвольного порядка  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq \infty$ . В основе наших доказательств будет лежать следующая

ТЕОРЕМА Л (см. [1]). Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \\ L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n -$$

целые функции, причем  $L(z)$  имеет бесконечное множество нулей  $\{\lambda_n\}$  и все они простые, и при любом  $\rho \in [0; \infty)$  выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left( \left| \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right| + \rho \left| \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \right| + \dots + \rho^{n-1} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \right) < \infty. \quad (0.1)$$

Тогда

$$F(z) - \sum_{n=1}^k \frac{\omega_L(\lambda_n; F)}{L'(\lambda_n)} f(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z) / a_n,$$

где

$$\omega_L(z; F) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + z \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} + \dots + z^{n-1} \frac{b_0}{a_0} \right),$$

$A_n^{(k)}(z)$  — тейлоровские коэффициенты целой функции  $\Phi(\lambda, z, k)$  (как функции от  $\lambda$ ), определяемой для  $\lambda$ , лежащих внутри  $\Gamma_k$  посредством равенства

$$\Phi(\lambda, z, k) = (L(\lambda)/2\pi i) \int_{\Gamma_k} (f(z\mu)/((\mu - \lambda)L(\mu))) d\mu,$$

а  $\Gamma_k$  — замкнутые контуры, внутри которых лежит  $k$  нулей  $L(z)$ .

1. Пусть целая функция  $f(z)$  такая, что: а)  $a_n \neq 0$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ ; б) последовательность  $\kappa_n = |a_{n-1}/a_n|$  не убывает при  $n \geq n_0$ ; д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n/\kappa_{n+1} = p > 0$ . Пусть, далее  $\beta(x) \uparrow \infty, x \rightarrow \infty$ , — положительная и непрерывная на  $[x_0; \infty)$  функция такая, что  $\eta_1(x) = x/\beta(x) \uparrow \infty, x \rightarrow \infty$ , при любом  $c \in (1; \infty)$  выполняется

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \beta(cx)/\beta(x) < \infty \quad (1.1)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \beta(\kappa_n) = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим через  $A_\beta$  класс целых функций  $F(z)$ , для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \beta(\kappa_n) = 0. \quad (1.3)$$

**ЛЕММА 1.** Пусть целая функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям а) и б),  $\eta(x)$  — функция, обратная к  $\eta_1(x)$ , а  $L(z)$  такая, что

$$в) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \exp(\Phi_f^*(\ln M_L(r)))/\eta(r) = \tau < \infty,$$

где  $M_f(r) = \max \{|f(z)| : |z| = r\}$ , а  $\Phi_f^*(x)$  — функция, обратная к  $\ln M_f(e^x)$ . Тогда, если  $F \in A_\beta$ , то при любом  $\rho \in [0; \infty)$  выполняется (0.1).

**Доказательство.** Пусть  $\mu_f(r)$  и  $\nu_f(r)$  — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ . Для всяких  $\sigma > 0$  и  $r > 0$  имеем

$$\frac{1}{|a_n|} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leq \frac{\mu_L((1+\sigma)r)}{|a_n| r^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (1+\sigma)^{-k} \leq \\ \leq M_L((1+\sigma)r) / (|a_n| ((1+\sigma)r)^n \sigma), \quad (1.4)$$

откуда, учитывая а), при  $\sigma \geq \sigma_0(\tau_1, r)$ ,  $\tau_1 > \tau$ , находим

$$\frac{1}{|a_n|} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leq \\ \leq \frac{M_L(\tau_1 \eta((1+\sigma)r))}{\sigma r |a_n| (\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma)r))^n} \left( \frac{\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma)r)}{(1+\sigma)r} \right)^n.$$

Известно (см. [2, стр. 17]), что  $\mu_f(r) = |a_n| r^n$  при  $r \in [\kappa_n; \kappa_{n+1}]$ . Поэтому, замечая, что при  $r > 0$  и  $\varepsilon > 0$  выполняется

$$M_f(r) \leq K(\varepsilon) \mu_f((1+\varepsilon)r), \quad K(\varepsilon) = (1+\varepsilon)/\varepsilon, \quad (1.5)$$

из (1.4), взяв  $\sigma = \sigma_n$  так, чтобы  $\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma_n)r) = \kappa_n$ , при  $n \geq n_0(\varepsilon, r)$  находим

$$\frac{1}{|a_n|} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leq K(\varepsilon) \left[ \frac{\kappa_n}{\eta_1(\kappa_n/(1+\varepsilon)\tau_1)} \right]^n \leq \\ \leq [K_1 \beta(\kappa_n)]^n. \quad (1.6)$$

Поскольку  $F \in A_\beta$ , то отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left( \left| \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right| + \dots + r^{n-1} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} < \infty$$

при любом  $r \in [0; \infty)$ . Поэтому лемма 1 доказана.

Предположим, что: г)  $L(z)$  имеет бесконечное множество нулей  $\{\lambda_n\}$  и все они простые. Если выполнены условия а) б), в), г) и  $F \in A_\beta$ , то  $\omega_L(\lambda_k; F) = O(1)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Действительно, обозначая  $l_k(z) = L(z)/(z - \lambda_k)$ , имеем (см. [1])

$$\omega_L(\lambda_k; F) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n^{(k)} / a_n, \quad l_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n.$$

Так как  $M_{l_k}(r) \leq M_L(r+1)$  при всех  $r > 0$  и  $k \geq 1$ ,

то по неравенствам Коши находим

$$\left| \frac{c_n^{(k)}}{a_n} \right| \leq \frac{M_L(r+1)}{|a_n| r^n} \leq \frac{M_f(\tau_1 \eta(r+1))}{|a_n| ((1+\varepsilon)\tau_1 \eta(r+1))^n} \cdot \left( \frac{(1+\varepsilon)\tau_1 \eta(r+1)}{r} \right)^n.$$

Положив в этих соотношениях  $r = r_n$  так, чтобы  $(1 + \varepsilon) \tau_1 \eta(r_n + 1) = \kappa_n$ , при всех  $n \geq 0$  и  $k \geq 1$  найдем  $|c_n^{(k)}/a_n| \leq (K\beta(\kappa_n))^n$ , где  $K > 0$  — постоянная. Отсюда следует требуемое утверждение.

Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$  сходится регулярно в  $\mathbb{C}$ , если при любом  $r \in [0; \infty)$  выполняется  $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| M_f(r|\lambda_n|) < \infty$ .

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть целые функции  $f(z)$  и  $L(z)$  такие, что выполнены условия а), б), в), г), д). Тогда для того, чтобы каждую целую функцию  $F \in A_\beta$  можно было представить рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z), \quad d_n = \omega_L(\lambda_n; F)/L'(\lambda_n), \quad (1.7)$$

регулярно сходящимся во всей плоскости, необходимо и достаточно выполнения условий:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(r|\lambda_n|)/|L'(\lambda_n)| < \infty$  при  $r \in [0; \infty)$ ;

2) при любых  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $n \geq 0$  имеет место представление

$$\lambda^n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n L(\lambda)/((\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)).$$

**Доказательство.** Достаточность. Поскольку  $\omega_L(\lambda_n; F) = O(1)$ , то из 1) следует регулярная сходимость ряда (1.7) во всей плоскости. Поэтому, поскольку (см. [1])  $\omega_L(\lambda_n; F) = L(\lambda)/(\lambda - \lambda_n)$  при  $F(z) = f(\lambda z)$ , из 2) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda) f(\lambda_n z)}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda) \lambda_n^k}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)} \right) z^k = f(\lambda z), \end{aligned} \quad (1.8)$$

т. е. при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  функцию  $F(z) = f(\lambda z)$  можно представить рядом (1.7). Пусть теперь  $F(z) —$

произвольная функция из  $A_\beta$ . Так как

$$\Phi(\lambda, z, k) = f(\lambda z) - \sum_{n=1}^k \frac{L(\lambda) f(\lambda_n z)}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)}, \quad (1.9)$$

то при  $|z| \leq \rho$ ,  $|\lambda| \leq r$  и всех  $k \geq 1$  и  $n \geq 0$  по неравенствам Коши находим

$$\left| \frac{A_n^{(k)}(z)}{a_n} \right| \leq \frac{M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r+1)}{|a_n| r^n}, \quad K(\rho) > 0, \quad (1.10)$$

откуда в силу в) при  $r \geq r_0$  находим

$$\left| \frac{A_n^{(k)}(z)}{a_n} \right| \leq K_1(\rho) \frac{M_f(a\eta(r))}{|a_n| (a(1+\varepsilon)\eta(r))^n} \cdot \left( \frac{a(1+\varepsilon)\eta(r)}{r} \right)^n,$$

где  $a = a(\rho)$  и  $K_1(\rho)$  — постоянные. Положив в последнем соотношении  $r = r_n$  так, чтобы  $a(1+\varepsilon)\eta(r_n) = \kappa_n$  при всех  $k \geq 1$  и  $n \geq 0$ , имеем  $|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leq (K_2(\rho) \beta(\kappa_n))^n$ . Так как  $F \in A_\beta$ , то отсюда следует, что при  $|z| \leq \rho$  и всех  $k = 1, 2, \dots$ , выполняется

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z)/a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| (K_2(\rho) \beta(\kappa_n))^n \leq K(\rho),$$

где  $K(\rho)$  не зависит от  $k$ . Далее, из (1.8) следует, что  $\Phi(\lambda, z, k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем стремление равномерно по  $\lambda$  и  $z$ , когда  $|\lambda| \leq r$ ,  $|z| \leq \rho$ ,  $0 \leq r$ ;  $\rho < \infty$ . Поэтому последовательность  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z)/a_n$  равномерно в любом круге стремится к 0 при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, согласно теореме Л, справедливо представление (1.7) и достаточность доказана.

Необходимость условий 1) и 2) следует из (1.8), если учесть, что из д) вытекает существование числа  $b < \infty$  такого, что при  $r \geq r_0(b)$  выполняется

$$r M_f(r) \leq M_f(br). \quad (1.11)$$

**ТЕОРЕМА 1.2.** Для всякой целой функции  $f(z)$ , удовлетворяющей условиям а), б), д) и всякой непрерывно дифференцируемой и положительной на  $[x_0; \infty)$  функции  $\beta(x) \uparrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , такой, что

$$x\beta'(x)/\beta(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

существует целая функция  $L(z)$  такая, что условия в), г), 1) и 2) выполняются.

**Доказательство.** Из (1.12) следует, что функция  $\eta_1(x) = x/\beta(x)$  монотонно стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow \infty$  и что (ср. [3, пример 410]) при любом  $c \in (0; \infty)$  при  $x \rightarrow \infty$  выполняется

$$\beta(cx) \sim \beta(x), \quad \eta_1(cx) \sim c\eta(x), \quad \eta(cx) \sim c\eta(x), \quad (1.13)$$

где  $\eta(x)$  — функция, обратная к  $\eta_1(x)$ .

Пусть  $\{n_k\}$  — множество значений, принимаемых функцией  $v_f(r)$  при  $r > \kappa_n$ , т. е. в силу б), это — последовательность, для которой  $\kappa_{n_1} < \kappa_{n_1+1} = \kappa_{n_1+2} \doteq \dots = \kappa_{n_2} < \kappa_{n_2+1} = \dots = \kappa_{n_2+2} = \dots = \kappa_{n_3} < \dots < \kappa_{n_k+1} = \kappa_{n_k+2} = \dots = \kappa_{n_{k+1}} < \dots$ , а  $\kappa_{n_k}$  — точки скачка  $v_f(r)$ . Пусть, далее,  $\bar{\rho}_1 = \kappa_{n_1}$  и

$$\bar{\rho}_j = \kappa_{n_{k_j}} \stackrel{\text{df}}{=} \min \{ \kappa_{n_k} : 8/p \leq \kappa_{n_k} / \bar{\rho}_{j-1} \}, \quad j > 1,$$

где  $p$ ,  $0 < p \leq 1$ , определено в условии д). Поскольку  $\kappa_{n_{k+1}} = \kappa_{n_k+1}$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_{n_k} / \kappa_{n_{k+1}} = p, \quad (1.14)$$

и

$$8/p \leq \bar{\rho}_j / \bar{\rho}_{j-1} \leq (\kappa_{n_{k_j}} / \kappa_{n_{k_{j-1}}}) (8/p) \leq 9/p^2, \quad j \geq j_0.$$

Положив  $\rho_n = \bar{\rho}_{j_0+n}$ ,  $n \geq 0$ , имеем

$$8/p \leq \rho_{n+1} / \rho_n \leq 9/p^2, \quad n \geq 0. \quad (1.15)$$

Далее, согласно (1.13), при  $n \rightarrow \infty$  выполняется  $\eta(\rho_{n+1})/\eta(\rho_n) \geq \eta((8/p)\rho_n)/\eta(\rho_n) \sim 8/p$ , и в силу (1.14) заключаем, что при любом достаточно большом  $m$  найдется  $n_k$  такое, что  $\eta(\rho_m) < \kappa_{n_k} < \eta(\rho_{m+1})$ . Поэтому  $\Delta_n \stackrel{\text{df}}{=} v_f(\eta(\rho_n)) - v_f(\eta(\rho_{n-1})) \geq 1$  при  $n \geq n_0$ . Для простоты изложения будем считать, что  $\Delta_n \geq 1$  при всех  $n \geq 1$  и положим

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (z/\rho_n)^{\Delta_n}). \quad (1.16)$$

Покажем, что это — искомая целая функция. Пусть  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  — все нули  $L(z)$ ,  $m_L(r) = \min \{ |L(z)| : |z| = r \}$ ,

$$n(r) = \sum_{|\lambda_n|=r} 1, \quad N(r) = \int_0^r n(t) d \ln t,$$

$$L_n(z) = L(z)/(1 - (z/\rho_n)^{\Delta_n}), \quad r_n = (\rho_n + \rho_{n+1})/2.$$

Учитывая (1.15) и обозначая  $m = \max \{n: \rho_n \leq r\}$ ,  
имеем

$$\begin{aligned} \ln M_L(r) &\leq \sum_{\rho_n \leq r} \Delta_n \ln \frac{r}{\rho_n} + \sum_{\rho_n \leq r} \ln \left(1 + \left(\frac{\rho_n}{r}\right)^{\Delta_n}\right) + \\ &+ \sum_{\rho_n > r} \ln \left(1 + \left(\frac{r}{\rho_n}\right)^{\Delta_n}\right) \leq N(r) + \sum_{n=1}^m \ln \left(1 + \frac{\rho_n}{\rho_m}\right) + \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\rho_{m+1}}{\rho_n}\right) = N(r) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Аналогично,

$$\ln m_L(r_n) \geq \sum_{k=1}^n \Delta_k \ln \frac{r_n}{\rho_k} + O(1) = N(r_n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

$$\ln m_{L_n}(\rho_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k \ln \frac{\rho_n}{\rho_k} + O(1) = N(\rho_n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Далее, при  $\rho_n \leq r < \rho_{n+1}$  и  $r \rightarrow \infty$  находим

$$n(r) = \nu_f(\eta(\rho_n)) + O(1) \leq \nu_f(\eta(r)) + O(1), \quad (1.20)$$

и, в силу (1.15),

$$n(r) = \nu_f\left(\eta\left(\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \rho_{n+1}\right)\right) + O(1) \geq \nu_f(\eta((8/p)r)) + O(1). \quad (1.21)$$

Используя (1.12) и известное соотношение между  $\nu_f(r)$  и  $\mu_f(r)$ , в силу (1.11) получаем

$$\begin{aligned} N(r) &\leq \int_{\eta(r_0)}^{\eta(r)} \frac{\nu_f(t)}{t} \left(1 - t \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right) dt + O(\ln r) \leq \\ &\leq \ln M_f(\tau_f(r)), \quad r \geq r_0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.17) следует в). Далее, поскольку  $\eta(x)/x \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , то для любого  $q \in (0; \infty)$  из (1.21), (1.11) и (1.5) при больших  $r$  находим

$$N(r) \geq \int_{r_0}^r \frac{\nu_f(\eta((8/p)t))}{t} dt + O(\ln r) \geq \ln M_f(qr). \quad (1.22)$$

Так как имеются такие  $\varphi_k \in [0; 2\pi)$ , что при  $\nu_f(\eta(\rho_n)) - \nu_f(\eta(\rho_1)) < k \leq \nu_f(\eta(\rho_{n+1})) - \nu_f(\eta(\rho_1))$ ,



$n > 1$ , выполняется

$$|L'(\lambda_k)| = \frac{\Delta_{n+1}}{\rho_{n+1}} |L_{n+1}(\rho_{n+1} e^{i\varphi_k})|, \quad |\lambda_k| = \rho_{n+1},$$

то для доказательства свойства 1) достаточно показать сходимости при любом  $r \in [0; \infty)$  ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n M_f(\rho_n r) / m_{L_n}(\rho_n).$$

Из (1.22), (1.19) и (1.11) следует существование постоянных  $a > 1$  и  $b > 1$  таких, что при фиксированном  $r$  и больших  $n$  выполняется

$$\frac{\rho_n M_f(\rho_n r)}{m_{L_n}(\rho_n)} \leq \frac{M_f(a\rho_n)}{M_f(ab\rho_n)} \leq \frac{1}{\rho_n},$$

откуда в силу (1.15) следует 1).

И наконец, в силу 1) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k L(\lambda) / ((\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n))$$

сходится абсолютно. С другой стороны, из (1.19) и (1.22) получаем

$$\left| \lambda^k - \sum_{m: |\lambda_m| \leq r_n} \frac{\lambda_m^k L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m) L'(\lambda_m)} \right| = \\ = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_n} \frac{t^k L(\lambda) dt}{(\lambda - t) L(t)} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. теорема 1.2 доказана.

**ТЕОРЕМА 1.3.** Пусть целая функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям а), б), д). Тогда для всякой целой функции  $F(z)$  найдется целая функция  $L(z)$ , все нули  $\{\lambda_n\}$  которой простые и такая, что  $F(z)$  разлагается в ряд (1.7), регулярно сходящийся во всей плоскости.

Для доказательства теоремы 1.3 согласно выше приведенным утверждениям достаточно показать, что для всякой целой функции  $F(z)$  найдется функция  $\beta(x) \uparrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , такая, что выполняются условия (1.2), (1.3) и (1.12). Такую функцию  $\beta(x)$  можно построить следующим образом. Пусть  $\gamma_n = |a_n| + |b_n|$ . Имеем  $\sqrt[n]{\gamma_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому существует последовательность  $u_n \uparrow \infty$  такая, что  $\sqrt[n]{\gamma_n} u_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $0 < \varphi(x) \uparrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,

— непрерывно дифференцируемая на  $[x_0; \infty)$  функция со свойством:  $\varphi(\kappa_n) \leq u_n$ . Очевидно, функция  $\beta(x) = \varphi(x)$  удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Далее, условию (1.12) удовлетворяют все непрерывно дифференцируемые функции  $\beta(x)$ , для которых функция  $\ln \beta(x)$  выпуклая кверху относительно  $\ln x$  и удовлетворяет условию:  $\ln \beta(x) = o(\ln x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому нетрудно построить функцию  $\beta(x)$ ,  $0 < \beta(x) \uparrow \infty$ , такую, чтобы  $\beta(x) \leq \varphi(x)$  и выполнялось (1.12).

**З а м е ч а н и е.** Можно убедиться, что утверждение теоремы 1.3 остается в силе, если условия б) и д) заменить на такое: для функции  $f(z)$  существует целая функция  $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$  такая, что последовательность  $\kappa_n(f_1) = |A_{n-1}/A_n|$  не убывает и

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n/a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n/a_n|} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n/\kappa_{n+1} > 0.$$

2. Здесь мы рассмотрим случай, когда

$$\text{б')} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n/\kappa_{n+1} = 0.$$

Очевидно, что из б') следует б) и что д) не выполняется.

Пусть  $\beta_n \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , — последовательность положительных чисел таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \beta_n = 0, \quad (2.1)$$

а  $A(\beta)$  — класс целых функций  $F(z)$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \beta_n = 0. \quad (2.2)$$

Пусть, далее,

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_n)$$

— целая функция такая, что: в)  $M_L(\kappa_n) \leq |a_n| (\tau \beta_n \kappa_n)^n$ ,  $\tau \in (0, \infty)$ ; г')  $\arg \lambda_n = \text{const}$  и  $|\lambda_n| \neq |\lambda_k|$  при  $n \neq k$ .

Предположим, что выполняются условия а), б'), в'), г') и  $F \in A(\beta)$ . Тогда легко проверить, что выполняется условие (0.1) теоремы Л и, поскольку в силу г') при всех  $r > 0$  и  $k \geq 1$  выполняется  $M_{l_k}(r) \leq M_L(r)/|\lambda_k|$ ,  $\omega_L(\lambda_k; F) = O(1/\lambda_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть целые функции  $f(z)$  и  $L(z)$  такие, что выполняются условия а), б'), в'), г'). Тогда для того, чтобы каждую целую функцию  $F \in A(\beta)$  можно было представить рядом (1.7), регулярно сходящимся во всей плоскости, необходимо и достаточно выполнения условий 2) и

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_f(r|\lambda_n|)/|\lambda_n L'(\lambda_n)| < \infty \text{ при } r \in [0; \infty).$$

**Доказательство.** Достаточность. Из 3) следует регулярная сходимость ряда (1.7), а из 2) — представление (1.8). Далее, для функции  $\Phi(\lambda, z, k)$  имеем оценку  $|\Phi(\lambda, z, k)| \leq M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r)$  при  $|\lambda| \leq \leq r$ ,  $|z| \leq \rho$  и всех  $k \geq 1$ , где  $K(\rho)$  не зависит от  $r$  и  $k$ . Поэтому по неравенствам Коши находим

$$|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leq (M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r))/(|a_n| r^n). \quad (2.3)$$

Ниже мы воспользуемся следующим утверждением: Если выполняется условие б'), то при любом  $\rho$ ,  $1 < \rho < \infty$ , и всех  $n \geq 0$  имеем  $M_f(\rho \kappa_n) \leq K_1(\rho) |a_n| (\rho \kappa_n)^n$ . Это утверждение не совсем в такой форме имеется в работах Валирона (см., например, [4]). Его легко получить, оценивая сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$  через максимальный член, учитывая, что  $\mu_f(r) = |a_n| r^n$  при  $r \in [\kappa_n; \kappa_{n+1}]$ , в частности, в силу б') при  $r = \rho \kappa_n$ , и что  $|a_k/a_n| \leq \kappa_n^{n-k}$ ,  $|a_k/a_n| \leq \kappa_{n+1}^{n-k}$ .

Положив в (2.3)  $r = \kappa_n$  и учтя в'), имеем  $|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leq \leq K(\rho) (\rho^n + (\beta_n \tau)^n)$ . Отсюда, как и раньше, получаем требуемый результат.

**ТЕОРЕМА 2.2.** Пусть целая функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям а), б'), а  $\beta_n \uparrow \infty$  — последовательность положительных чисел со свойствами:

$$t_n \stackrel{\text{df}}{=} \beta_n / \beta_{n-1} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

$$t_n \kappa_{n-1} / \kappa_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Тогда существует целая функция  $L(z)$ , удовлетворяющая условиям в'), г'), 3), 2).

**Доказательство.** Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\kappa_n t_{n+1} / (\kappa_{n+1} t_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.5')$$

и что при  $n \geq n_0$  выполняется

$$\kappa_{n-1} < \kappa_n/t_n < \kappa_n. \quad (2.5'')$$

Пусть  $\lambda_n = \kappa_n/t_n$  при  $n \geq n_0$  и  $\lambda_n = \lambda_{n_0}n/n_0$  при  $0 < n < n_0$ , а  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_n)$ . Покажем, что это — иско-  
мая целая функция. Поскольку в силу (2.5')  $\lambda_n/\lambda_{n+1} \rightarrow 0$   
при  $n \rightarrow \infty$ , то  $L(z)$  — целая функция. Далее, используя  
(2.5') и (2.5''), при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \ln M_L(\kappa_n) &= \sum_{k=1}^n \ln(\kappa_n/\lambda_k) + \sum_{k=1}^n \ln(1 + \lambda_k/\kappa_n) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + \kappa_n/\lambda_k) = \sum_{k=1}^n \ln(\kappa_n/\lambda_k) + O(1) = \\ &= \ln(O(1) |a_n| (\beta_n \kappa_n)^n), \end{aligned}$$

т. е. в') доказано.

Аналогичным образом, при  $n \rightarrow \infty$  находим

$$\begin{aligned} \ln m_L(2\lambda_n) &\geq \sum_{k=1}^n \ln(2\lambda_n/\lambda_k) + O(1) = \\ &= \ln(O(1) |a_n| \beta_n^n (2\lambda_n)^n) = \ln(O(1) \mu_{f_2}(2\lambda_n)), \quad (2.6) \end{aligned}$$

где  $\mu_{f_2}(r)$  — максимальный член ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n^n z^n = f_2(z)$ ,  
так как в силу (2.5)  $2\lambda_n \in [\kappa_n(f_2); \kappa_{n+1}(f_2)]$ ,  $\kappa_n(f_2) =$   
 $= |a_{n-1} \beta_{n-1}^{n-1} / a_n \beta_n^n|$ .

Далее, при  $n \rightarrow \infty$  выполняется

$$\begin{aligned} \ln |\lambda_n L'(\lambda_n)| &= \\ &= (\ln |L(z)/(1 - z/\lambda_n)|) |_{z=\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\lambda_n/\lambda_k)^n + \\ &+ O(1) = \ln(O(1) |a_n| (\beta_n \kappa_n/t_n)^n). \quad (2.7) \end{aligned}$$

Так как  $t_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то в силу (2.5'') при любом  
 $r \geq 1$  при  $n \geq n_0(r)$  имеем  $r\lambda_n \in [\kappa_{n-1}; \kappa_n]$ . Поэтому, ис-  
пользуя (1.5), находим  $M_f(r\lambda_n) \leq K(\varepsilon) |a_{n-1}| ((1 + \varepsilon)r\lambda_n)^{n-1}$   
при больших  $n$ . В силу этого в (2.7) получаем

$$M_f(r\lambda_n) / |\lambda_n L'(\lambda_n)| \leq K(\varepsilon) ((1 + \varepsilon)r/\beta_{n-1})^{n-1}, \quad n \geq n_0(r),$$

так что условие 3) выполнено. Далее, из (2.6), в силу транс-  
цендентности  $f_2(z)$  и равенства

$$\left| \lambda^m - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^m L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=2\lambda_n} \frac{L(\lambda) t^m dt}{(\lambda - t) L(t)} \right|,$$

справедливого при больших  $n$ , получаем 2). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что если  $f(z)$  такая, что выполняются условия а), б'), то для любой целой функции  $F(z)$  существует последовательность  $\beta_n \uparrow \infty$  со свойствами (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5). Такую последовательность  $\beta_n$  строим следующим образом. Пусть  $0 < u_n \uparrow \infty$  — последовательность такая, что  $(|a_n| + |b_n|)^{1/n} u_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так что любая  $\{\beta_n\}$ ,  $\beta_n \leq u_n$ , удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Далее, из б') следует существование последовательности  $\{t_n^*\}$  такой, что  $\kappa_{n-1} t_n^* / \kappa_n \rightarrow 0$ ,  $0 < t_n^* \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Построим мажоранту Ньютона  $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/u_n)^n z^n$  целой функции  $f_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/u_n)^n z^n$ . Имеем  $\bar{t}_n \stackrel{df}{=} \frac{df}{dz} = (u_n^*)^n / (u_{n-1}^*)^{n-1} \rightarrow \infty$ ,  $u_n^* \rightarrow \infty$ ,  $u_n^* \leq u_n$ . Пусть  $t_n = \min(t_n^*, \bar{t}_n)$  и  $\beta_0 = u_0^*$ , а  $\beta_n = \beta_{n-1}^{n-1} t_n$ . Имеем  $t_n \leq t_n^*$ ,  $\beta_n \leq u_n^*$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ ,  $\beta_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так что построенная последовательность  $\beta_n$  искомая. Поэтому из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть целая функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям а), б'). Тогда для всякой целой функции  $F(z)$  можно указать целую функцию  $L(z)$ , все нули  $\{\lambda_n\}$  которой простые и такую, что  $F(z)$  разлагается в ряд (1.7), регулярно сходящийся во всей плоскости.

Автор благодарит М. Н. Шеремета за внимание к работе.

Львовский государственный  
университет

Поступило  
7.III.1978

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Леонтьев А. Ф., Представление функций обобщенными рядами Дирихле, Успехи матем. наук, 24, № 2 (1969), 97—164.
- [2] Поляна Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 2, М., ГИТТЛ, 1956.
- [3] Е в г р а ф о в М. А. и др., Сборник задач по теории аналитических функций, М., «Наука», 1972.
- [4] V a l i r o n G., Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes, Enseign. Math., 4, № 4 (1958), 229—271.