Е. Л. Тонков, О множестве управляемости линейного уравнения,
Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 2, 269–278

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.— 392 с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением/Линейные системы.—М.: Наука, 1968.—476 с.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.—М.: Наука, 1972.—576 с.
4. Гичев Т. Р., Розов Н. Х.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 11, с. 1933—1939; 1980, т. 16, № 2, с. 208—213.
5. Гичев Т. Р., Розов Н. Х.— В сб.: Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. Тезисы докладов. Ч. I.— Алма-Ата: Наука, 1979, с. 47—49.
6. Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения.— София: БАН, 1979.—372 с.
7. Gičev T. R., Dontchev A. L. Linear optimal control system with singular perturbation and convex performance index.— Serdica, 1978, vol. 4, p. 24—35.
8. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.—272 с.
9. Gičev T. R., Dontchev A. L. Convergence of the solution of singularly perturbed linear differential equations.— Годишн. на вуз, сер. Прилож. мат., 1979, т. 15, № 1, с. 69—82.
10. Dontchev A. L., Gičev T. R. Convex singularly perturbed optimal control problem with fixed final state. Controllability and convergence.— Math. Operationsforsch. Statist., ser. Optimization, 1979, vol. 10, N 3, p. 345—355.

Институт математики и механики Болгарской Академии наук,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17 сентября 1982 г.

УДК 517.977.1

Е. Л. ТОНКОВ

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Эта статья продолжает исследования работ [1—6] и посвящена структуре множества управляемости уравнения

$$\dot{x}=A_0(t)x+B_0(t)u, \quad t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

фазовым пространством которого служит евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ размерности n, а множеством допустимых управлений — совокупность всех измеримых функций $t\to u(t)$ со значениями в фиксированном *компакте* $U\subset\mathbf{R}^m$. Часть результатов статьи анонсирована в [4, 5].

1. Основные определения и обозначения. Удобно в дальнейшем отождествлять уравнение (1) с функцией $t\to\varphi_0(t)=(A_0(t), B_0(t))$, определенной на $\mathbf{R}=(-\infty, \infty)$ и принимающей значения в пространстве $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^{n+m}, \mathbf{R}^n)$ линейных операторов из $\mathbf{R}^{n+m}$ в $\mathbf{R}^n$. Всюду далее предполагается, что функция φ_0 *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbf{R}$.

Пусть $D_\tau(\varphi_0, \sigma)\doteq D_\tau(\varphi_0, \sigma, U)$ — множество управляемости уравнения φ_0 на отрезке $[\tau, \tau+\sigma]$. Напомним, что $x^0\in D_\tau(\varphi_0, \sigma)$ в том и только в том случае, если найдется измеримое управление $u^0: [\tau, \tau+\sigma]\to U$ такое, что задача

$$\dot{x}=A_0(t)x+B_0(t)u^0(t), \quad x(\tau)=x, \quad x(\tau+\sigma)=0,$$

имеет решение. Уравнение φ_0 называется *глобально управляемым* *),

*) Часто пользуются таким определением (см., например, [9]): уравнение φ_0 глобально управляемо, если $D_0(\varphi_0)=\mathbf{R}^n$, где $D_0(\varphi_0)$ — объединение $D_0(\varphi_0,\sigma)$ по всем $\sigma\geqslant0$. Легко показать, что эти два определения эквивалентны.

если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$, что $O_\varepsilon \doteq \{x\in\mathbf{R}^n : |x|\leqslant\varepsilon\}\subset D_0(\varphi_0, \sigma)$.

В задачах управления в условиях неопределенности [7, 8], т. е. в тех случаях, когда возникает необходимость в позиционном управлении объектом, важно, чтобы свойство глобальной управляемости было равномерным относительно начального момента времени τ. Это обстоятельство приводит к следующему определению.

Определение 1. *Уравнение φ_0 называется равномерно глобально управляемым (вправо), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$, что $O_\varepsilon\subset D_\tau(\varphi_0, \sigma, U)$ при всех $\tau\geqslant 0$.*

Так как $D_\tau(\varphi_0, \sigma)=D_0(\varphi_\tau, \sigma)$, где $\varphi_\tau(t)\doteq\varphi_0(\tau+t)$ — сдвиг φ_0 на постоянную τ, то из равномерной глобальной управляемости уравнения φ_0 следует, что *множество управляемости* $D_0(\varphi_\tau)=\bigcup\limits_{\sigma\geqslant 0} D_0(\varphi_\tau, \sigma)$ уравнения φ_τ совпадает с $\mathbf{R}^n$ для каждого $\tau\geqslant 0$. Оказывается, что если дополнительно

$$U \text{ — компакт и } 0\in \operatorname{int}\ (\operatorname{conv} U) \tag{2}$$

($\operatorname{int} Q$ и $\operatorname{conv} Q$ — внутренность и выпуклая оболочка множества Q), то верно и обратное утверждение. Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение динамическую систему сдвигов ([10], гл. 6, § 9, [11]).

2. Динамическая система сдвигов. Пусть $\mathfrak{R}(\varphi_0)\doteq\operatorname{cl}\{\varphi_\tau : \tau\in\mathbf{R}\}$ — замыкание множества $\{\varphi_\tau : \tau\in\mathbf{R}\}$ сдвигов φ_0 в топологии равномерной сходимости на отрезках, т. е. $\varphi\in\mathfrak{R}(\varphi_0)$ в том и только в том случае, если найдется последовательность $\{\tau_i\}_0^\infty$, $\tau_0=0$, такая, что всякому $\varepsilon>0$ отвечает $i_0=i_0(\varepsilon)$, обеспечивающее неравенство

$$\max_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}} |\varphi_{\tau_i}(t)-\varphi(t)|<\varepsilon \text{ при всех } i\geqslant i_0$$

(при этом мы пишем $\varphi_{\tau_i}\xrightarrow{\text{лок}}\varphi$). Пусть, далее, $(\mathfrak{R}(\varphi_0), g^\tau)$ — динамическая система сдвигов; здесь $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ — фазовое пространство, g^τ — однопараметрическая группа движений в $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, определенная равенством $g^\tau(\varphi)\doteq\varphi(\tau+t)$, $t\in\mathbf{R}$, $\varphi\in\mathfrak{R}(\varphi_0)$.

Отметим, что функция $\rho(\varphi, \tilde{\varphi})=\sup_{t\in\mathbf{R}}\min[|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)|, \ |t|^{-1}]$, $\varphi, \tilde{\varphi}\in\mathfrak{R}(\varphi_0)$, задает метрику в $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, причем сходимость в метрике ρ эквивалентна сходимости, равномерной на отрезках ([10], с. 533), и пространство $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ с метрикой ρ компактно.

Множество $\{g^\tau(\varphi_0) : \tau\geqslant 0\}$ называется полутраекторией движения $\tau\to g^\tau(\varphi_0)$. Замыкание полутраектории обозначим через $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Отметим также, что $\mathfrak{R}(\varphi_0)=\operatorname{cl}\{g^\tau(\varphi_0) : \tau\in\mathbf{R}\}$. Уравнение φ_0 называется *рекуррентным*, если $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ — минимальное инвариантное относительно сдвигов компактное множество ([10], гл. 5, § 7). Если уравнение φ_0 рекуррентно, то $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)=\mathfrak{R}(\varphi_0)$ (см., например, [12], с. 102).

3. Критерий равномерной глобальной управляемости. Множество управляемости уравнения φ на отрезке $[0, \sigma]$ будем обозначать далее $D(\varphi, \sigma)$ (или $D(\varphi, \sigma, U)$), опуская индекс нуль, а множество управляемости (т. е. объединение $D(\varphi, \sigma)$ по всем $\sigma\geqslant 0$) — $D(\varphi)$ (или $D(\varphi, U)$). В [6] показано (лемма 9), что функция $\varphi\to D(\varphi, \sigma)$ непрерывна при каждом фиксированном σ, как функция из $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ в пространство непустых компактных множеств (расположенных в $\mathbf{R}^n$) с метрикой Хаусдорфа.

Пусть $l\to h(l, \varphi, \sigma)=\max\limits_x l'x$ при $x\in D(\varphi, \sigma)$ $(l\in S_1\doteq\{x\in\mathbf{R}^n : |x|=1\}$;

штрих означает операцию транспонирования) — опорная функция множества $D(\varphi, \sigma)$. Оказывается ([6], лемма 10), что функция $(l, \varphi) \to h(l, \varphi, \sigma)$ непрерывна на компакте $S_1 \times \mathfrak{R}(\varphi_0)$.

Лемма 1. *Если уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо, то*

$$D(\varphi, U) = \mathbf{R}^n \text{ для всех } \varphi \in \mathfrak{R}^+(\varphi_0). \tag{3}$$

Обратно, если выполнены условия (2) и (3), то уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо.

Доказательство. Пусть уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma > 0$, что для всех $l \in S_1$ выполнено неравенство $h(l, \varphi_\tau, \sigma) \geqslant \varepsilon$ при $\tau \geqslant 0$. Так как h непрерывна на $S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$, то $h(l, \varphi, \sigma) \geqslant \varepsilon$ для всех $(l, \varphi) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$.

Фиксируем последовательность $\{\varepsilon_i\}_0^\infty$ такую, что $\varepsilon_i \to \infty$. По ε_i построим σ_i из условия

$$\min\,[h(l, \varphi, \sigma_i) : (l, \varphi) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)] \geqslant \varepsilon_i. \tag{4}$$

Пусть $h(l, \varphi) \doteq \sup\,[l'x : x \in D(\varphi)]$ — опорная функция множества $D(\varphi) \doteq D(\varphi, U)$. Поскольку $D(\varphi, \sigma_i) \subset D(\varphi)$ при всех i, то из (4) и свойств опорной функции имеем: $h(l, \varphi) \geqslant \varepsilon_i$, поэтому $h(l, \varphi) = \infty$ для всех $(l, \varphi) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Следовательно, $D(\varphi) = \mathbf{R}^n$ при всех $\varphi \in \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$.

Допустим теперь, что выполнено условие (2). Если уравнение φ_0 не является равномерно глобально управляемым, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\sigma > 0$ найдутся $\tau = \tau(\sigma) > 0$ и $x^0 = x^0(\sigma) \in O_\varepsilon$, что $x^0 \notin D(\varphi_\tau, \sigma)$. Следовательно, найдется $l = l(\sigma) \in S_1$, при котором выполнено неравенство $h(l, \varphi_\tau, \sigma) < \varepsilon$.

Отметим далее, что из равенства $D(\varphi, \sigma, U) = D(\varphi, \sigma, \operatorname{conv} U)$ и условия (2) следует включение $D(\varphi, \sigma_1, U) \subset D(\varphi, \sigma_2, U)$ при $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$. Поэтому $h(l, \varphi, \sigma_1) \leqslant h(l, \varphi, \sigma_2)$, $\sigma_1 < \sigma_2$ и функция

$$l \to h(l, \varphi) = -\int_0^\infty l'X(0, t)B(t)u(t)\,dt,$$

где $X(t, s)$ — оператор Коши уравнения A (мы отождествляем уравнение $\dot{x} = A(t)x$ с задающей его функцией $t \to A(t)$), а $u(t)$ удовлетворяет условию максимума

$$\max_{u \in U}\,(-l'X(0, t)B(t)u) = -l'X(0, t)B(t)u(t), \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

является опорной функцией множества $D(\varphi)$ (см. [6, 9]).

Фиксируем последовательность $\{\sigma_i\}_0^\infty$, $\sigma_i \to \infty$, и построим последовательности $\{\tau_i\}_0^\infty$, $\{l_i\}_0^\infty$, $l_i \in S_1$, такие, что $h(l_i, \varphi_{\tau_i}, \sigma_i) < \varepsilon$. Так как множество $S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ компактно, то из последовательности $\{(l_i, \varphi_{\tau_i})\}_0^\infty$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть сама последовательность $\{(l_i, \varphi_{\tau_i})\}_0^\infty$ сходится к $(\tilde{l}, \tilde{\varphi})$. Далее, из последовательности $\alpha_i = h(l_i, \varphi_{\tau_i}, \sigma_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, выделим сходящуюся подпоследовательность (что возможно в силу неравенств $0 < \alpha_i < \varepsilon$), которую мы снова обозначим $\{\alpha_i\}_0^\infty$. Переходя в неравенстве $\alpha_i < \varepsilon$ к пределу, получим $\lim \alpha_i \neq \lim h(l_i, \varphi_{\tau_i}, \sigma_i) = h(\tilde{l}, \tilde{\varphi}, \infty) \doteq h(\tilde{l}, \tilde{\varphi}) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $D(\tilde{\varphi}) = \mathbf{R}^n$. Поэтому, если выполнено условие (3), то уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо.

4. Достаточные условия равномерной глобальной управляемости. Формулируемая ниже теорема анонсирована в [4].

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2). Если* *(а) уравнение φ_0 равномерно локально управляемо (т. е. найдутся такие ε и σ, что $O_\varepsilon \subset D(\varphi, \sigma)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$),*

(б) характеристические ([13], с. 21) показатели уравнения A_0 неположительны,

(в) уравнение A_0 приводимо (ляпуновским преобразованием к уравнению с постоянным оператором), то уравнение φ_0 равномерно глобально управляемо.

Замечание 1. Уравнение φ_0 называется *предельно рекуррентным*, если найдется рекуррентное уравнение $\tilde{\varphi}_0$, что $|\varphi_0(t)-\tilde{\varphi}_0(t)|\to 0$ при $t\to\infty$. В [4] показано, что условие (а) выполнено, если уравнение φ_0 предельно рекуррентно и предельное уравнение $\tilde{\varphi}_0$ вполне управляемо (т. е. $D(\tilde{\varphi}_0, \mathbf{R}^m)=\mathbf{R}^n$). Более того ([6], теорема 2), если уравнение φ_0 равномерно локально управляемо, то найдется такое $\varepsilon>0$, что всякое уравнение $\tilde{\varphi}_0$ из множества $M_\varepsilon(\varphi_0) \doteq \bigcup_{T\geqslant 0} M_{\varepsilon, T}(\varphi_0)$ равномерно локально управляемо. Здесь $M_{\varepsilon, T}(\varphi_0)$ — множество ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbf{R}$ уравнений $\tilde{\varphi}_0$ таких, что $|\varphi_0(t)-\tilde{\varphi}_0(t)|\leqslant\varepsilon$ при $t\geqslant T$.

Замечание 2. Число

$$\Omega(A_0) \doteq \inf_{T\geqslant 0} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln |X_0(sT, (s-1)T),$$

где X_0 — оператор Коши уравнения A_0, называется *верхним центральным показателем* ([13], с. 116) уравнения A_0. Так как для приводимых уравнений наибольший характеристический показатель $\lambda_n(A_0)$ уравнения A_0 совпадает с $\Omega(A_0)$, то условие (б) при выполнении условия (в) эквивалентно неравенству $\Omega(A_0)\leqslant 0$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Если выполнено условие (2) и уравнение φ_0 равномерно локально управляемо, то найдутся такие константы (не зависящие от l, φ), что $\delta_1>0$ и для всех $(l, \varphi)\in S_1\times\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ выполнены неравенства*

$$\delta_1\vartheta(l, A)\leqslant h(l, \varphi)\leqslant\delta_2\vartheta(l, A), \tag{5}$$

где $\vartheta(l, A)=\int_0^\infty |l'X(0, t)|dt$, $X(t, s)$ — оператор Коши уравнения A.

Эта лемма в случае почти-периодического уравнения φ_0 доказана в [2]. Не сложно убедиться, что доказательство из [2] полностью переносится на рассматриваемый здесь случай с заменой $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ на $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$.

5. Ляпуновские преобразования. Пусть L_0 — ляпуновское преобразование, приводящее уравнение A_0 к уравнению с оператором F_0 (не обязательно постоянным), т. е. L_0 — абсолютно непрерывная функция $t\to L_0(t)$, определенная при всех $t\in\mathbf{R}$, принимающая значения в пространстве линейных операторов в $\mathbf{R}^n$ и такая, что

$$\operatorname{vrai\,sup} \{|L_0(t)|+|L_0^{-1}(t)|+|\dot{L}_0(t)|\}<\infty, \quad t\in\mathbf{R}$$

(при этом $F_0=(\dot{L}_0+L_0A_0)L_0^{-1}$ и, следовательно, функция $t\to F_0(t)$ измерима и $\operatorname{vrai\,sup}|F_0(t)|<\infty$, $t\in\mathbf{R}$).

Лемма 3 ([2], лемма 9). *Всякая функция L из $\mathfrak{R}(L_0)$ является ляпуновским преобразованием. Далее, для каждого A из $\mathfrak{R}(A_0)$ из всякой последовательности $\{\tau_i\}_0^\infty$, $\tau_0=0$, удовлетворяющей условию $A_{\tau_i}\xrightarrow{\text{лок}} A$, можно выделить подпоследовательность (обозначим ее снова $\{\tau_i\}_0^\infty$), такую, что $L_{\tau_i}\xrightarrow{\text{лок}} L$, $L_{\tau_i}^{-1}\xrightarrow{\text{лок}} L^{-1}$, $\dot{L}_{\tau_i}$ сходится слабо (на каждом* *отрезке) к $\dot{L}$, причем F — слабый предел последовательности $F_{\tau_i} = (\dot{L}_{\tau_i} + L_{\tau_i} A_{\tau_i}) L_{\tau_i}^{-1}$, $i=0, 1, \ldots$ Кроме того, существует константа M (не зависящая от $L \in \mathfrak{R}(L_0)$), что неравенство*

$$\operatorname{vrai\,sup} \{ |L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)| \} \leqslant M$$

выполнено для всех $L \in \mathfrak{R}(L_0)$.

Обозначим $\mathfrak{S}(F_0)$ замыкание (в топологии слабой сходимости на отрезках) функции $F_0 = (\dot{L}_0 + L_0 A_0) L_0^{-1}$, т. е. $F \in \mathfrak{S}(F_0)$, если существует последовательность $\{\tau_i\}_0^\infty$ такая, что $F_{\tau_i} \doteq g^{\tau_i}(F_0)$ сходится слабо к F на каждом отрезке. В силу леммы 3, для всякой $F \in \mathfrak{S}(F_0)$ найдутся A из $\mathfrak{R}(A_0)$ и L из $\mathfrak{R}(L_0)$, что L приводит A к $F = (\dot{L} + LA) L^{-1}$. Поэтому $\mathfrak{S}(F_0)$ совпадает с множеством уравнений $F = (\dot{L} + LA) L^{-1}$, где A пробегает $\mathfrak{R}(A_0)$, а преобразование L из $\mathfrak{R}(L_0)$ отвечает уравнению A в смысле леммы 3. В частности, если L_0 приводит A_0 к уравнению с постоянным оператором F_0, то $\mathfrak{S}(F_0) = \{F_0\}$ и, следовательно, всякое уравнение A из $\mathfrak{R}(A_0)$ приводится некоторым преобразованием $L \in \mathfrak{R}(L_0)$ к уравнению F_0.

Пусть последовательность $\{\tau_i\}_0^\infty$ такова, что $\tau_0 = 0$, $A_{\tau_i} \xrightarrow{\text{лок}} A$, $L_{\tau_i} \xrightarrow{\text{лок}} L$, $L_{\tau_i}^{-1} \xrightarrow{\text{лок}} L^{-1}$, $\dot{L}_{\tau_i}$ сходится слабо к $\dot{L}$. Так как $X_\tau(t, s) \doteq X(\tau + t, \tau + s)$ — оператор Коши уравнения A_τ, то $Y_\tau(t, s) = L_\tau(t) X_\tau(t, s) L_\tau^{-1}(s)$ — оператор Коши уравнения F_τ. Поэтому Y_{τ_i} сходится (равномерно на компактах $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : |t - s| \leqslant \mathrm{const}\}$) к оператору Коши Y уравнения $F = (\dot{L} + LA) L^{-1}$.

Лемма 4 ([2], лемма 10). *Существуют константы $d_1 > 0$, $d_2 \geqslant d_1$, такие, что всякой паре $(l, A) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(A_0)$ и любому $\tau \geqslant 0$ отвечает вектор $q = q(\tau, l, A) \in S_1$, при котором выполнены неравенства*

$$d_1 \vartheta(q, g^\tau(F)) \leqslant \vartheta(l, g^\tau(A)) \leqslant d_2 \vartheta(q, g^\tau(F)), \tag{6}$$

где $F = (\dot{L} + LA) L^{-1}$, а L отвечает A в смысле леммы 3.

6. Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что $h(l, \varphi) = \infty$ для всех $(l, \varphi) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. В силу (5) достаточно показать, что $\vartheta(l, A) = \infty$ для всех $(l, A) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(A_0)$.

Пусть L_0 — ляпуновское преобразование, приводящее A_0 к уравнению F_0 с постоянным оператором F_0. Из (6) следует, что $\vartheta(l, A) = \infty$ для всех $(l, A) \in S_1 \times \mathfrak{R}^+(A_0)$ в том и только в том случае, если $\vartheta(q, F_0) = \infty$ для любого $q \in S_1$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — такой фиксированный базис в $\mathbb{R}^n$, что матрица $\mathcal{F}_0$, отвечающая оператору F_0 в базисе $e_1, \ldots, e_n$, имеет жорданову форму. Тогда

$$\exp(-t\mathcal{F}_0) = \operatorname{diag}[\exp(-tQ_1), \ldots, \exp(-tQ_p)],$$

$Q_1, \ldots, Q_p$ — жордановы клетки матрицы $\mathcal{F}_0$. Обозначим $q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}$ координаты вектора q в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Поскольку $|q| > |q^{(i)}|$ для любого $i = 1, \ldots, n$, то $|q' \exp(-t\mathcal{F}_0)|$ не меньше модуля i-й координаты вектора $q' \exp(-t\mathcal{F}_0)$. Так как первая координата вектора $q' \exp(-t\mathcal{F}_0)$ равна $q^{(1)} \exp(-t\alpha_1)$ и $\operatorname{Re} \alpha_1 = \lambda_1(A_0)$ — характеристический показатель уравнения A_0, то из условия (б) теоремы 1 имеем неравенство $|q' \exp(-t\mathcal{F}_0)| \geqslant |q^{(1)}|$ при $t \geqslant 0$. Поэтому если $q^{(1)} \neq 0$, то $\vartheta(q, \mathcal{F}_0) = \infty$.

Аналогично доказывается, что если $q' = (0, \ldots, 0, q^{(s)}, \ldots, q^{(n)})$, то $|q' \exp(-t\mathcal{F}_0)| \geqslant |q^{(s)} \exp(-t\lambda_{j(s)}(A_0))| \geqslant |q^{(s)}|$, и поэтому $\vartheta(q, \mathcal{F}_0) = \infty$ для $q^{(s)} \neq 0$.

7. Вероятностные характеристики множества управляемости. Пусть $M(\varphi_0)$ — множество инвариантных вероятностных мер на $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Напомним, что $\mu \in M(\varphi_0)$, если мера μ задана на σ-алгебре борелевских множеств пространства $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$; $\mu(g^\tau(G))=\mu(G)\geqslant 0$ для всякого $\tau\geqslant 0$ и любого μ-измеримого множества $G\subset\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ и $\mu(\mathfrak{R}^+(\varphi_0))=1$. Так как пространство $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ компактно (в метрике ρ), то в силу теоремы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова ([10], с. 514; [14], с. 42) множество $M(\varphi_0)$ не пусто. Аналогично не пусто множество $M(A_0)$ вероятностных инвариантных мер на $\mathfrak{R}^+(A_0)$.

Замечание 3. Пусть Σ — множество ω-предельных точек движения $\tau\to\varphi_\tau$ ($\varphi\in\Sigma$, если найдется такая последовательность $\{\tau_i\}_0^\infty$, $\tau_0=0$, что $\tau_i\to\infty$ и $\varphi_{\tau_i}\xrightarrow{\text{лок}}\varphi$), $\theta^+=\mathfrak{R}^+(\varphi_0)\setminus\Sigma$, $M_0(\varphi_0)$ — подмножество мер из $M(\varphi_0)$, сосредоточенных на Σ (т. е. $\mu(\theta^+)=0$). В силу компактности Σ, $M_0(\varphi_0)\neq\varnothing$ (отметим, что если уравнение φ_0 рекуррентно, то $\theta^+=\varnothing$). Так как $D(\varphi)$ не зависит от $\varphi(t)$ при $t\leqslant 0$, то, не уменьшая общности, будем считать, что множество α-предельных точек движения $\tau\to\varphi_\tau$ совпадает с Σ (при необходимости можно изменить φ_0, определив новое уравнение $\tilde{\varphi}_0$ равенством $\tilde{\varphi}_0(t)=\varphi_0(t)$ при $t\geqslant 0$ и $\tilde{\varphi}_0(t)=\varphi_0(-t)$ при $t\leqslant 0$). Тогда $\mathfrak{R}(\varphi_0)=\theta\cup\Sigma$, где $\theta=\mathfrak{R}(\varphi_0)\setminus\Sigma$, и поэтому всякую меру μ из $M_0(\varphi_0)$ можно доопределить на все пространство $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, положив $\tilde{\mu}(G)=$ $=\mu(G)$, если $G\subset\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ и $\tilde{\mu}(\theta)=0$. Это замечание понадобится при доказательстве теоремы 2.

Всякому борелевскому множеству Q из $\mathfrak{R}^+(A_0)$ поставим в соответствие множество $Q_{\varphi_0}\doteq\{\varphi=(A, B)\in\mathfrak{R}^+(\varphi_0) : A\in Q\}$, расположенное в $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$, и определим меру ν_μ на $\mathfrak{R}^+(A_0)$ равенством $\nu_\mu(Q)=\mu(Q_{\varphi_0})$. Поскольку $[\mathfrak{R}^+(A_0)]_{\varphi_0}=\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ и $[g^\tau(Q)]_{\varphi_0}=g^\tau(Q_{\varphi_0})$, $\tau\geqslant 0$, то $\nu_\mu\in M_0(A_0)$.

Пусть $\varphi\in\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$, $G\subset\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Если существует предел

$$\omega(\varphi, G)\doteq\lim\frac{1}{T}\operatorname{mes}\{[0, T]\cap C(\varphi, G)\},\quad T\to\infty,$$

где $C(\varphi, G)=\{\tau\geqslant 0 : g^\tau(\varphi)\in G\}$, mes — мера Лебега на прямой, то число $\omega(\varphi, G)$ называется *частотой попадания* траектории $g^\tau(\varphi)$ в множество G.

Мера μ из $M_0(\varphi_0)$ называется *эргодической*, если для всякого инвариантного множества G его мера $\mu(G)$ равна нулю или единице. Если существует эргодическая мера, то динамическая система $(\mathfrak{R}^+(\varphi_0), g^\tau)$ называется *эргодической*. В случае эргодической системы, из теоремы Биркгофа — Хинчина ([14], с. 20) следует равенство $\mu(G)=\omega(\varphi, G)$ для любого μ-измеримого множества $G\subset\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ и почти всех (в смысле меры μ) φ из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Поэтому в эргодическом случае $\mu(\mathfrak{M})$ характеризует вероятность того, что уравнение φ из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ глобально управляемо. Так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное множество, то либо почти всякое уравнение из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ глобально управляемо, либо почти всякое уравнение из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ не является глобально управляемым.

Теорема 2. *Пусть множество U удовлетворяет условию (2), система $(\mathfrak{R}^+(\varphi_0), g^\tau)$ эргодична и μ — фиксированная эргодическая мера. Если*

(а) уравнение φ_0 равномерно локально управляемо,

(б) характеристические показатели почти всякого (в смысле меры ν_μ) уравнения A из $\mathfrak{R}^+(A_0)$ неположительны, то почти всякое (в смысле меры μ) уравнение φ из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ глобально управляемо.

8. **Доказательство теоремы 2.** Пусть L_0 — ляпуновское преобразование, приводящее A_0 к треугольному виду F_0 (в силу теоремы Перрона ([13], с. 261), такое преобразование существует). В некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ оператор $F_0(t)$ задается нижне-треугольной матрицей. Эту матрицу мы будем обозначать $F_0(t)$. Далее, из леммы 3 следует, что

всякое уравнение F из $\mathfrak{S}^+(F_0)$ имеет треугольный вид. Обозначим $\mathfrak{S}^+(\xi_0)$ множество уравнений $\xi=(F, I)$ вида $\dot{y}=F(t)y+v$, где F пробегает $\mathfrak{S}^+(F_0)$. Отметим, что функция

$$q\to\vartheta(q, F)\doteq\int_0^\infty |q'Y(0, t)|dt,$$

где $Y(t, s)$ — оператор Коши уравнения F, является опорной функцией множества управляемости $D(\xi, O_1^n)$ уравнения ξ с ограничивающим множеством $U=O_1^n\doteq\{v\in\mathbf{R}^n : |v|\leqslant 1\}$. Поэтому из лемм 2 и 4 и условия (а) следует, что $\varphi\in\mathfrak{N}=\{\varphi\in\mathfrak{N}^+(\varphi_0) : D(\varphi)\neq\mathbf{R}^n\}$, в том и только в том случае, если уравнение ξ, отвечающее φ в смысле леммы 3, удовлетворяет включению $\xi\in N\doteq\{\xi\in\mathfrak{S}^+(\xi_0) : \min_q\vartheta(q, F)<\infty, q\in S_1\}$.

Обозначим через $\hat{Q}$ множество абсолютно регулярных ([15], [16], с. 78) уравнений из $\mathfrak{R}^+(A_0)$. В. М. Миллионщиковым доказано [15], что почти всякое (относительно любой меры $\nu\in M(A_0)$) уравнение из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ абсолютно регулярно (в [15] рассматривается пространство $\mathfrak{R}(A_0)$ с инвариантными мерами на $\mathfrak{R}(A_0)$, но мы предполагаем, что ν можно продолжить на $\mathfrak{R}^+(A_0)$; см. замечание 3).

Пусть далее, Q состоит из всех таких $A\in\hat{Q}$, для которых характеристические показатели неположительны. В силу условия (б) теоремы 2 $\nu_\mu(Q)=1$, следовательно, $\mu(Q_{\varphi_0})=1$. Множество всех F из $\mathfrak{S}^+(F_0)$, когда A пробегает Q, обозначим через H. Пусть далее, $H_{\xi_0}\doteq\{\xi\in\mathfrak{S}^+(\xi_0) : F\in H\}$. Отметим, что всякое уравнение F из H правильное ([13], с. 68) и его характеристические показатели $\lambda_i(F)\leqslant 0$.

Пусть $f_0^{(1)}(t), \ldots, f_0^{(n)}(t)$ — диагональные элементы матрицы $F_0(t)$; $f^{(1)}(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ — диагональные элементы матрицы $F(t)$.

Всякой A из $\mathfrak{R}^+(A_0)$ поставим в соответствие какое-нибудь одно (безразлично какое) ляпуновское преобразование $L=L_A$ из множества $\{L\}_A\subset\mathfrak{R}^+(A_0)$ всех ляпуновских преобразований, приводящих A к треугольному виду. Тогда $\mathscr{L}\doteq\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{R}^+(A_0)} L_A\subset\mathfrak{R}^+(L_0)$.

Введем в рассмотрение множества

$$\Xi\doteq\{\xi=(F, I) : F=(\dot{L}_A+L_AA)L_A^{-1}, \ A\in\mathfrak{R}^+(A_0)\},$$

$$M^{(1)}\doteq\left\{\xi\in\Xi : \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t f^{(1)}(s)ds\right)dt=\infty\right\},$$

$$M^{(i)}\doteq\left\{\xi\in M^{(i-1)} : \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t f^{(i)}(s)ds\right)dt=\infty\right\}, \quad i=2, \ldots, n,$$

$$N_p^{(1)}\doteq\left\{\xi\in\Xi : \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t f^{(1)}(s)ds\right)dt\leqslant p\right\},$$

$$N_p^{(i)}\doteq\left\{\xi\in M^{(i-1)} : \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t f^{(i)}(s)ds\right)dt\leqslant p\right\}, \quad i=2, \ldots, n.$$

Определим, кроме того, множества $\mathfrak{M}^{(i)}$ и $\mathfrak{N}_p^{(i)}$ следующим образом: $\varphi\in\mathfrak{M}^{(i)}$ в том и только в том случае, если $\xi\in M^{(i)}$, где ξ однозначно определяется по A и L_A; аналогично $\varphi\in\mathfrak{N}_p^{(i)}$ в том и только в том случае, если соответствующее $\xi\in N_p^{(i)}$.

Можно показать, что любому φ из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$ отвечает такое $\xi\in\Xi$, для которого выполнено равенство $C(\varphi, \mathfrak{R}_p^{(i)})=C(\xi, N_p^{(i)})$. Поэтому $\mu(\mathfrak{R}_p^{(i)})=$ $=\omega(\varphi, \mathfrak{R}_p^{(i)})=\omega(\xi, N_p^{(i)})$ при почти всех φ из $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$. Кроме того, $\mathfrak{R}\subset$ $\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{R}^{(i)}$, где $\mathfrak{R}^{(i)}\doteq\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\mathfrak{R}_p^{(i)}$, и поэтому

$$\mu(\mathfrak{R})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\mathfrak{R}^{(i)}),\quad \mu(\mathfrak{R}^{(i)})\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\mu(\mathfrak{R}_p^{(i)}).$$

Докажем, что $\omega(\xi, N_p^{(i)})=0$ для всех $\xi\in H_{\xi_0}$, всех $i=1, \ldots, n$ и всех $p=1, 2, \ldots$

Обозначим $h_i(t)=\int\limits_0^t f^{(i)}(s)ds$, $i=1, \ldots, n$, и рассмотрим множества $B_\tau(h_i)=\{t\geqslant\tau : h_i(t)-h_i(\tau)\leqslant 1\}$. Оказывается, что множество $C(\xi, N_p^{(i)})$ содержится в множестве $\{\tau\geqslant 0 : \operatorname{mes} B_\tau(h_i)\leqslant pe\}$. Действительно, если $\tau\in C(\xi, N_p^{(i)})$, то

$$\int_0^\infty \exp\left(-\int_\tau^{\tau+t} f^{(i)}(s)ds\right)dt=\int_0^\infty \exp\,[h_i(\tau)-h_i(\tau+t)]dt\leqslant p.$$

Так как $e^{-1}\operatorname{mes} B_\tau(h_i)\leqslant\int\limits_{B_\tau(h_i)}\exp\,[h_i(\tau)-h_i)\tau+t)]dt\leqslant\int\limits_0^\infty\exp\,[h_i(\tau)-$ $-h_i(\tau+t)]dt$, то $\operatorname{mes} B_\tau(h_i)\leqslant pe$, поэтому $\tau\in\{\tau\geqslant 0 : \operatorname{mes} B_\tau(h_i)\leqslant pe\}$. Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма 5 ([2], лемма 12). *Пусть непрерывная функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что предел $\lim\frac{h(t)}{t}$, $t\to\infty$, существует и неположителен. Тогда для любого a предел $\lim\frac{1}{T}\operatorname{mes}\{\tau\in[0, T] : \operatorname{mes} B_\tau(h)\leqslant a\}$, $T\to\infty$, существует и равен нулю.*

Поскольку для всякого уравнения ξ из H_{ξ_0} пределы $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{h_i(t)}{t}$ существуют и неположительны, $i=1, \ldots, n$, то из неравенств $\omega(\xi, N_p^{(i)})\leqslant$ $\leqslant\lim\frac{1}{T}\operatorname{mes}\{\tau\in[0, T] : \operatorname{mes} B_\tau(h_i)\leqslant pe\}$, $T\to\infty$, и леммы 5 имеем: $\omega(\xi, N_p^{(i)})=0$ при $\xi\in H_{\xi_0}$, $i=1, \ldots, n$, $p>0$. Поэтому $\omega(\varphi, \mathfrak{R}_p^{(i)})=0$ для всех $\varphi\in Q_{\varphi_0}$ и всех $p>0$. Так как $\omega(\varphi, \mathfrak{M}^{(i)})=1-\omega(\varphi, \mathfrak{R}^{(i)})$, то $\omega(\varphi, \mathfrak{M}^{(i)})=$ $=1$ для всех $\varphi\in Q_{\varphi_0}$ и всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Поскольку μ — эргодическая мера, то $\mu(\mathfrak{R}^{(i)})=\omega(\varphi, \mathfrak{R}^{(i)})$ при почти всех $\varphi\in\mathfrak{R}^+(\varphi_0)$, и поэтому $\mu(\mathfrak{R}^{(i)})=0$, $\mu(\mathfrak{R})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\mathfrak{R}^{(i)})=0$ и $\mu(\mathfrak{M})=1-$ $-\mu(\mathfrak{R})=1$.

9. Почти-периодическое уравнение. Предположим, что функция $t\to$ $\to\varphi_0(t)$ почти-периодична в смысле Бора. Тогда $\mathfrak{R}^+(\varphi_0)=\mathfrak{R}(\varphi_0)$ и динамическая система $(\mathfrak{R}(\varphi_0), g^\tau)$ строго эргодична, т. е. $M(\varphi_0)$ состоит из единственной эргодической меры ([10], с. 531).

Теорема 3. *Пусть множество U удовлетворяет условию (2) и уравнение φ_0 почти-периодично. Тогда почти всякое уравнение φ из $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ глобально управляемо в том и только в том случае, если*

(а) уравнение φ_0 вполне управляемо, т. е. $D(\varphi_0, \mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$,

(б) верхний центральный показатель $\Omega(A_0)$ уравнения A_0 неположителен.

Доказательство. Из почти-периодичности и полной управляемости уравнения φ_0 следует его равномерная локальная управляемость ([4], теорема 3), поэтому условие (а) теоремы 2 выполнено.

Покажем, что выполнено условие (б) теоремы 2. Так как уравнение A_0 почти-периодично, то верхний центральный показатель $\Omega(A_0)$ совпадает с верхним особым показателем ([13], с. 193)

$$\Omega_0(A_0) \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \left[\sup_{t\geqslant 0} |X_0(t+T, t)| \right].$$

Непосредственно из определения $\Omega_0(A_0)$ следует, что $\Omega_0(A)=\Omega_0(A_0)$ для всех $A\in\mathfrak{R}(A_0)$, поэтому $\Omega_0(A)\leqslant 0$. Кроме того, для каждого абсолютно регулярного уравнения A из $\mathfrak{R}(A_0)$ старший характеристический показатель $\lambda_n(A)$ совпадает с $\Omega(A)$ ([15], [16], с. 85). Поскольку почти все A из $\mathfrak{R}(A_0)$ абсолютно регулярны, то $\lambda_n(A)\leqslant 0$ при почти всех $A\in\mathfrak{R}(A_0)$. Таким образом, условие (б) теоремы 2 выполнено. В силу теоремы 2 почти все уравнения из $\mathfrak{R}(A_0)$ глобально управляемы, т. е. $\mu(\mathfrak{M})=1$.

Допустим теперь, что $\mu(\mathfrak{M})=1$. Тогда найдется по крайней мере одно глобально управляемое уравнение φ, т. е. $D(\varphi, U)=\mathbb{R}^n$. Тем более $D(\varphi, \mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$, следовательно, уравнение φ вполне управляемо. Из почти-периодичности φ_0 следует, что $\mathfrak{R}(\varphi)=\mathfrak{R}(\varphi_0)$, поэтому ([4], теорема 2) всякое уравнение из $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, в том числе и уравнение φ_0, вполне управляемо. Мы показали, что условие (а) теоремы 3 выполнено.

Покажем, что выполнено условие (б) теоремы 3. Пусть Q — множество абсолютно регулярных уравнений из $\mathfrak{R}(A_0)$, ν — единственная (в силу строгой эргодичности) инвариантная вероятностная мера на $\mathfrak{R}(A_0)$. Так как $\nu(Q)=1$ и $\nu(Q)=\nu_\mu(Q)=\mu(Q_{\varphi_0})$, то $\mu(Q_{\varphi_0})=1$. Следовательно, Q_{φ_0} и $\mathfrak{M}$ имеют не пустое пересечение. Фиксируем $\varphi\in Q_{\varphi_0}\cap\mathfrak{M}$. В силу леммы 2 для всех $l\in S_1$ выполнено равенство $\vartheta(l, A)=\infty$, причем уравнение A правильное. Покажем, что $\lambda_n(A)\leqslant 0$. Действительно, если $\lambda_n(A)=\lambda>0$, то найдется такое $l_0\in S_1$, что решение $\psi(t)=l'_0 X(0, t)$ сопряженного уравнения $\dot{\psi}=-\psi A(t)$ имеет показатель $-\lambda<0$. Из определения характеристического показателя следует, что при некоторых $\varepsilon>0$ и M выполнены неравенства $-\lambda+\varepsilon<0$ и $|\psi(t)|\leqslant M\exp[-(\lambda-\varepsilon)t]$, поэтому $\vartheta(l_0, A)=\int_0^\infty |\psi(t)|dt<\infty$. Следовательно, $\lambda_n(A)\leqslant 0$.

Так как уравнение A абсолютно регулярно, то из цитированных результатов В. М. Миллионщикова следует равенство $\lambda_n(A)=\Omega_0(A)$; но $\Omega_0(A)=\Omega_0(A_0)$, поэтому $\Omega_0(A_0)\leqslant 0$.

Замечание 5. Условия (а) и (б) теоремы 3 не гарантируют равномерную глобальную управляемость уравнения φ_0. В [1] построен пример почти-периодического уравнения φ_0, удовлетворяющего условиям (а) и (б) теоремы 3 и такого, что множество $\mathfrak{R}$ не пусто.

Замечание 6. Вопрос о мере множества $\mathfrak{M}$ для почти-периодического уравнения φ_0 изучался в работе [2], где показано, что $\mu(\mathfrak{M})=1$, если выполнены условия (а) и (б) (теоремы 3) и условие

(в) пространство решений E_0 уравнения A_0 допускает регулярное разбиение на одномерные подпространства, т. е.

$$\operatorname*{infimum}_{0\leqslant t<\infty} \{\sphericalangle(x_i(t), \pi(x_{i-1}(t), \ldots, x_1(t)))\}>0, \quad i=1, \ldots, n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — базис E_0, $\pi(x_{i-1}(t), \ldots, x_1(t))$ — линейная оболочка значений решений $x_{i-1}(t), \ldots, x_1(t)$ в точке t.

Из теоремы 3 следует, что условие (в) излишне для справедливости утверждения $\mu(\mathfrak{M})=1$. Отметим также, что теорема о необходимости условий (а) и (б) теоремы 3 (для справедливости равенства $\mu(\mathfrak{M})=1$) приведена в [5].

Литература

1. Блинов И. Н., Тонков Е. Л. О глобальной управляемости условно-периодической линейной системы.— Мат. заметки, 1982, т. 32, № 2, с. 169—174.
2. Иванов А. Г., Тонков Е. Л., Шнейберг И. Я. О мере множества глобально управляемых систем.— Нелинейн. колебания и теор. управления.— Ижевск, 1981, № 3, с. 3—32.
3. Тонков Е. Л.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1804—1813.
4. Тонков Е. Л.— Докл. АН СССР, 1983, т. 256, № 2, с. 290—294.
5. Тонков Е. Л.— УМН, 1981, т. 36, вып. 4 (220), с. 226.
6. Тонков Е. Л.— Математическая физика, 1982, вып. 32.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.—456 с.
8. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности.— М.: Наука, 1977.—392 с.
9. Conti R.— J. Differ. Equat., 1965, vol. 1, N 4, p. 427—445.
10. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1949.—550 с.
11. Миллионщиков В. М.— Мат. сб.. 1968, т. 77, № 2, с. 163—173.
12. Боуэн Р. Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.—244 с.
13. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.—576 с.
14. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.—383 с.
15. Миллионщиков В. М.— Мат. сб., 1969, т. 78, № 2, с. 179—201.
16. Изобов Н. А.— Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Матем. анализ / Итоги науки и техники, 1974, т. 12, с. 71—146.

Удмуртский государственный университет им. 50-летия СССР

Поступила в редакцию 4 мая 1982 г.

УДК 517.927.25

М. В. ФЕДОРЮК

ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ. II

Эта статья — продолжение работы [1]. Нумерация параграфов сквозная, обозначения единые. Заметим, что при записи асимптотических рядов употребляется символ $=$ вместо $\sim$, т. е. равенство понимается с точностью до $O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda\to\infty)$.

§ 3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.1.)

1. Формальные асимптотические решения. Запишем уравнение (1.1) в виде

$$w''+\tilde{p}(z)w'+[\mu^2\tilde{q}(z)+\tilde{r}(z)]w=0, \tag{3.1}$$

$$\lambda=\mu^2,\quad \tilde{p}(z)=\frac{p(z)}{1-z^2},\quad \tilde{q}(z)=\frac{q(z)}{1-z^2},\quad \tilde{r}(z)=\frac{r(z)}{1-z^2}.$$

Построим формальные асимптотические решения (ФАР) при $\mu\to\infty$. Полагая $y=w'/w$, получаем уравнение Риккати

$$y'+y^2+\tilde{p}(z)y+\mu^2\tilde{q}(z)+\tilde{r}(z)=0.$$

Будем искать ФАР y в виде ряда $y=\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\mu^{-k}y_k(z)$.