Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, О классификации двумерных локальных тел. II, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 135–136

DOI: 10.4213/rm342

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 февраля 2025 г., 12:05:36

О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕЛ. II

А. Б. Жеглов

1. В работе [1] была приведена классификация двумерных локальных тел в случае, когда канонический автоморфизм имеет бесконечный порядок, и в случае, когда тело расщепимо, канонический автоморфизм имеет конечный порядок, тело вычетов является полем и характеристика тела равна нулю.

В настоящей работе мы изучаем расщепимые двумерные локальные тела, у которых канонический автоморфизм имеет конечный порядок и характеристика тела не равна нулю. Как следствие мы получаем некоторые результаты, касающиеся строения группы Брауэра двумерного локального поля (исчерпывающее изложение почти всех известных на настоящий момент результатов о строении группы Брауэра гензелевых полей можно найти в [2], а также в [3]). В частности, это положительный ответ на гипотезу о равенстве экспоненты и индекса произвольного тела из группы Брауэра C_2-поля (см., например, [2; § 3.4.5]) в случае, когда C_2-поле имеет вид $k((u))((t))$, k – алгебраически замкнуто.

Напомним некоторые определения из [1].

Определение 1. Пусть K и k – произвольные тела. Будем говорить, что K является n-мерным локальным телом, имеющим тело k последним телом вычетов, если тело K имеет следующую структуру. Или $n = 0$ (и при этом $K = k$), или K обладает дискретным нормированием $\nu\colon K^* \cup \{0\} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, где $\nu\colon K^* \to \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм, $\nu(0) = \infty$ и $\nu(a+b) \geqslant \inf(\nu(a), \nu(b))$; и его кольцо нормирования $\mathcal{O} := \{x \in K : \nu(x) \geqslant 0\}$ является полным и отделимым относительно топологии, задаваемой ν, и его тело вычетов является $(n-1)$-мерным локальным телом с последним телом вычетов k.

Определение 2. Изоморфизмом локальных тел K и K' будем называть изоморфизм их как колец, сохраняющий нормирования $\nu, \overline{\nu}$, где $\overline{\nu}$ – дискретное нормирование тела $\overline{K}$.

Произвольное двумерное локальное тело будем называть расщепимым, если существует гомоморфизм $\overline{K} \hookrightarrow \mathcal{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\wp = \overline{K}$.

Элементы $z \in \mathcal{O}, \nu(z) = 1$, и $u \in \overline{\mathcal{O}} \subset \overline{K}, \overline{\nu}(u) = 1$, будем называть локальными параметрами (или переменными) тела K.

Рассмотрим кольцо некоммутативных полиномов от двух переменных $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$. Определим отображение $\sigma\colon \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle \to \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta, \delta_i; i \geqslant 1\rangle$ со значениями в кольце некоммутативных многочленов от переменных $\alpha, \delta, \delta_i; i \geqslant 1$, как отображение, которое заменяет в каждом слове, начиная с правого конца, сочетания типа $\delta^i\alpha$ на δ_i, т.е. $\sigma(\alpha^{a_1}\delta^{b_1}\dots\alpha^{a_n}\delta^{b_n}) = \alpha^{a_1}\delta_{b_1}\dots\delta_{b_{n-1}}\alpha^{a_n-1}\delta^{b_n}$, где $a_1, b_n \geqslant 0, a_i, b_j \geqslant 1, i > 1, j < n$, – натуральные числа.

В кольце $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$ определим многочлены S_i^k как сумму всех мономов, принадлежащих орбите монома $\underbrace{\alpha\dots\alpha}_{i-k}\underbrace{\delta\dots\delta}_{k}$ под действием группы подстановок S_i: $S_i^k = \sum_{\tau\in S_i/G}\tau(\underbrace{\alpha\dots\alpha}_{i-k}\underbrace{\delta\dots\delta}_{k})$, где G – стационарная подгруппа.

Пусть K расщепимо. Фиксируем некоторые параметры z и u. Тогда имеет место

Предложение 1. *$K = \overline{K}((z))$ как векторное пространство, закон умножения двух рядов из которого задается с помощью тождества* $za = a^{\alpha}z + a^{\delta_1}z^2 + a^{\delta_2}z^3 + \cdots$, *где $a \in \overline{K}$, α – некоторый автоморфизм, $\delta_i\colon \overline{K} \to \overline{K}$ – некоторые линейные отображения, удовлетворяющие тождеству*:

$$\delta_i(ab) = \sum_{k=0}^{i}\sigma(\delta^{i-k}\alpha)(a)\sigma(S_i^k\alpha)(b), \qquad a, b \in \overline{K}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96050) и фонда INTAS (грант № 93-2805).

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = \mathrm{Id}$. *Тогда*

$$\delta_i(ab) = \delta_i(a)b + \sum_{k=1}^{i} \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1,\dots,j_l)} C^l_{i-k+1}\delta_{j_1}\dots\delta_{j_l}(b).$$

Здесь $\delta_0 = \alpha$, $0 < l \leqslant \min\{i-k+1, k\}$, $j_m \geqslant 1$, $\sum j_m = k$, *вектор* $(j_1, \dots, j_l)$ *принадлежит орбите целочисленного вектора с суммой координат, равной* k, *под действием группы подстановок* S_l.

Замечание. Предложение справедливо для расщепимого тела произвольной характеристики с произвольным (некоммутативным) телом вычетов. Все нижеследующие результаты являются преимущественно его следствиями.

2. Пусть $\overline{K}$ – поле и z – параметр тела K. Отображение $\phi\colon K \mapsto K$, $\phi(x) = zxz^{-1}$, переводит в себя $\mathscr{O}$ и $\wp$, т.е. дает автоморфизм α поля $\overline{K}$. Он не зависит от выбора z.

Теорема 1. *Пусть* K *– расщепимое двумерное локальное тело*, $\operatorname{char} K = p > 0$, $\overline{K}$ *– поле, последнее поле вычетов* $k = \overline{\overline{K}} \subset Z(K)$, $\alpha = \mathrm{id}$.

Тогда тело K *является конечномерным над своим центром тогда и только тогда, когда* K *изоморфно телу вида* $k((u))((z))$ *с соотношением* $z^{-1}uz = u + xz^i$, *где* $x \in \overline{K}^p$, $(i, p) = 1$.

Следствие 2. *В условиях теоремы если* K *конечномерно над своим центром, то его индекс* $\operatorname{ind} K = p$.

Следствие 3. *Пусть выполнены все условия теоремы, кроме условия* $\alpha = \mathrm{id}$. *Пусть* α *имеет конечный порядок, а* K *– конечномерное тело индекса* p^k.

Тогда либо K *циклично, либо* $\alpha = \mathrm{id}$ *и* K *имеет вид, описанный в теореме.*

Следствие 4. *Пусть* $F = F_0((t_1))((t_2))$ *– двумерное локальное поле,* F_0 *– алгебраически замкнутое поле. Пусть* $A \in \mathrm{Br}(F)$ *– тело.*

Тогда $A \cong B \otimes C$, *где* B *– циклическое тело,* $(\operatorname{ind} B, p) = 1$, C *– тело индекса* p^k, *имеющее вид, описанный предыдущим следствием.*

Следствие 5. *Гипотеза о том, что экспонента тела в группе Брауэра* C_2*-поля равна его индексу, имеет положительное решение в случае поля* $F_0((t_1))((t_2))$.

Замечание. Характеристика поля F_0 в последнем следствии не имеет значения.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю А.Н. Паршину и Е.В. Цинку за постоянное внимание к работе, а также В.И. Янчевскому за ценные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Жеглов А. Б. // УМН. 1999. Т. 54. №4. С. 169–170. [**2**] Платонов В. П., Янчевский В. И. // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 77. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 144–262. [**3**] Jacob B., Wadsworth A. // J. Algebra. 1990. V. 128. P. 126–179.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.10.2000