Ю. А. Гольфанд, Об особом представлении $Sp(4, F_q)$, *Функц. анализ и его прил.*, 1978, том 12, выпуск 4, 83–84

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 4, 1978, 83—84

УДК 512.864

ОБ ОСОБОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ $Sp\ (4,\ F_q)$

Я. Ю. Гольфанд

Пусть G — группа симплектических матриц четвертого порядка над конечным полем F_q из $q = p^n$ элементов, $p \neq 2$, $U \subset G$ — максимальная унипотентная подгруппа. В заметке изучается единственное комплексное неприводимое представление группы G (известное под именем θ_{10}), не имеющее модели Уиттекера, т. е. не содержащее при ограничении на U никаких одномерных представлений U (см. [1], [2], стр. 160). Будем называть это представление *особым*.

1. Нам будет удобна реализация G в виде

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \in \operatorname{Mat}(2,\ F_q) \mid g^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix} \right\},$$

где $*$ — транспонирование относительно второй диагонали. Пусть $P_1 = M_1 U_1$ — параболическая подгруппа с полупростой частью $M_1 \cong GL\ (2,\ F_q)$ и коммутативным радикалом $U_1 \cong \{u_1\ (z),\ z \in \operatorname{Mat}\ (2,\ F_q),\ z^* = z\}$.

Зафиксируем аддитивный характер χ поля F_q и элемент $\tau \in F_q^* \setminus (F_q^*)^2$. Пусть $z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2,\ F_q)$. Через Λ_1 обозначим следующее одномерное предствление группы U_1: $\Lambda_1\ (u_1\ (z)) = \chi\ (\operatorname{Tr}\ (z_1 \cdot z))$. Стабилизатор Λ_1 в M_1 состоит из элементов $\{m_1\ (s) \mid s z_1 s^* = z_1\}$. Обозначим эту подгруппу O_2; порядок $|O_2| = 2\ (q+1)$, определители матриц s, $m_1\ (s) \in O_2$, равны ± 1. Пусть $\det$: $O_2 \to \{\pm 1\}$ — соответствующее одномерное представление O_2. Положим $Y = O_2 U_1$, для $y \in Y$ положим $\Lambda\ (y) = \Lambda\ (mu) = \det\ (m)\ \Lambda_1\ (u)$, $m \in O_2$, $u \in U_1$. Через T_1 обозначим представление P_1, индуцированное характером Λ подгруппы $Y \subset P_1$: $T_1 = \operatorname{Ind}\ (P_1,\ Y,\ \Lambda)$. Представление T_1 неприводимо; $\dim T_1 = |M_1| / |O_2| = q\ (q-1)\ (q^2-1)/2\ (q+1) = q\ (q-1)^2/2$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть T — особое представление G. Тогда ограничение $T \mid P_1 \cong T_1$.*

2. Ограничение T на P_2, вторую параболическую подгруппу, устроено более сложно.

В данной реализации P_2 состоит из матриц $(g_{ij}) \in G$ с условием $g_{21} = g_{31} = g_{42} = g_{43} = 0$. Разложение Леви имеет вид $P_2 = M_2 H$, где полупростая часть $M_2 \cong D \times S$, $D \cong F_q^*$, $S \cong SL\ (2,\ F_q)$, а унипотентный радикал H (одномерная группа Гейзенберга) состоит из элементов $h\ (x,\ y,\ z)$, $x,\ y,\ z \in F_q$, с умножением

$$h\ (x_1,\ y_1,\ z_1)\ h\ (x_2,\ y_2,\ z_2) = h\ (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Порядок $|H| = q^3$; M_2 действует в H следующим образом. Пусть $m_2\ (\alpha,\ a) \in M_2$, $\alpha \in F_q^*$, $a \in SL\ (2,\ F_q)$. Тогда $m_2\ (\alpha,\ a)\ h\ (x,\ y,\ z)\ m_2\ (\alpha,\ a)^{-1} = h\ ((\alpha x,\ \alpha y)\ a,\ \alpha^2 z)$.

Обозначим через $L\ (F_q)$ q-мерное пространство комплексных функций на F_q. В этом пространстве действует неприводимое представление W группы H. Операторы W_h, $h \in H$, имеют следующий вид:

$$(W_{h\,(x,\ y,\ z)}\ \varphi)\ (t) = \chi\ (z + 2ty + xy)\ \varphi\ (x + t) \qquad (\varphi \in L\ (F_q)).$$

Представление W единственным образом продолжается до представления группы $S \cdot H$ (это — частный случай общей конструкции А. Вейля [3]). Приведем явные выражения для операторов W_s, $s \in S$. Пусть π_1 — нетривиальный мультипликативный характер F_q^*, $\pi_1^2 \equiv 1$. Положим $\Gamma\ (\pi_1) = \sum\limits_{\lambda \neq 0} \pi_1\ (\lambda)\ \chi\ (\lambda)$. Операторы W_s, $s = s\ (a) \in S$, $a \in SL\ (2,\ F_q)$, имеют следующий вид:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \gamma \neq 0, \quad (W_{s(a)} \varphi)\ (t) = \frac{\pi_1\ (\gamma)}{\Gamma\ (\pi_1)} \sum_{t_1 \in F_q} \chi \left(\frac{\alpha t^2 + \delta t_1^2 - 2tt_1}{\gamma} \right) \varphi\ (t_1), \tag{1}$$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad (W_{s(a)} \varphi)\ (t) = \pi_1\ (\alpha)\ \chi\ (\alpha \beta t^2)\ \varphi\ (\alpha t). \tag{2}$$

Через $D_{\pm}$ обозначим подгруппу D, $D_{\pm} \cong \{\pm 1\}$. Пусть $\widetilde{T} = D_{\pm} SH$. Представление W продолжим на группу $\widetilde{T}$, полагая для $\varepsilon \in D_{\pm}$, $\varepsilon \neq 1$, $(T_\varepsilon\ \varphi)\ (t) = -\varphi\ (-t)$.

Ограничение W на подгруппу S приводимо и разлагается в сумму двух неприводимых W^+, W^-, действующих в подпространствах $L^+\ (F_q)$, $L^-\ (F_q)$ четных и не-четных функций на F_q соответственно. Продолжим представление W^- ($\dim W^- = (q-1)/2$) на всю группу $\widetilde{T}$, полагая $W^- \mid D_\pm = W^- \mid H = \mathrm{id}$. Положим $\widetilde{W} = W \otimes W^-$, $T_2 = \mathrm{Ind}\,(P_2, \widetilde{T}, \widetilde{W})$. Представление T_2 неприводимо; $\dim T_2 = q\,(q-1)^2/4$. Представление $T_{2,\tau}$ определим аналогично T_2, заменив характер $\chi\,(t)$ на характер $\chi_\tau\,(t) = \chi\,(\tau t)$. Оба эти представления не эквивалентны друг другу.

П р е д л о ж е н и е 2. *Ограничение* $T \mid P_2 \cong T_2 \oplus T_{2,\tau}$.

3. Неприводимость ограничения $T \mid P_1$ позволяет аналогично тому, как это сделано С. И. Гельфандом [4] для представлений дискретной серии $GL\,(n, F_q)$, построить такую реализацию представления T, при которой матричные элементы операторов T_g выражаются через единственную функцию $J\,(g)$ — *функцию Бесселя* представления T. $J\,(g)$ можно определить следующим образом. Пусть Θ — характер T. Тогда (см. [4])

$$J\,(g) = |\,Y\,|^{-1} \sum_{y \in Y} \Theta\,(gy)\,\Lambda\,(y^{-1}).$$

Функция $J\,(g)$ удовлетворяет соотношениям $J\,(y_1 g y_2) = \Lambda\,(y_1 y_2)\,J\,(g)$, $y_1, y_2 \in Y$, $g \in G$; $J\,(e) = 1$, а также ряду других; они получаются из соотношений работы [4] после надлежащей переформулировки для нашего случая.

П р е д л о ж е н и е 3 (см. [4]).

$$|\,O_2\,|^{-1} \sum_{m \in M_1} J\,(g_1 m)\,J\,(m^{-1} g_2) = J\,(g_1 g_2). \qquad (*)$$

С л е д с т в и е. *Пусть E — пространство комплексных функций на подгруппе $M_1 \subset P_1$, удовлетворяющих соотношению $f\,(sm) = \det\,(s)\,f\,(m)$, $m \in M_1$, $s \in O_2$. Определим скалярное произведение (f_1, f_2) и операторы T'_g формулами*

$$(f_1, f_2) = |\,O_2\,|^{-1} \sum_{m \in M_1} f_1\,(m)\,\overline{f_2\,(m)}, \qquad (T'_g f)\,(m) = |\,O_2\,|^{-1} \sum_{m_1 \in M_1} J\,(mgm_1^{-1})\,f\,(m_1).$$

Тогда: 1) *операторы T'_g задают унитарное представление группы G в пространстве E*; 2) *представление $T' \cong T$, T — особое представление.*

4. С помощью конструкций ограничений $T \mid P_1$, $T \mid P_2$ и формулы $(*)$ функцию $J\,(g)$ удается найти в явном виде. Приведем ответ для элементов $g \in G$ «общего положения».

Определим функцию $j_0\,(\lambda)$, $\lambda \in F_q$, формулой $j_0\,(\lambda) = \sum\limits_{t\bar{t} = \lambda} \chi\,(t + \bar{t})$, где $t \in F_{q^2}$, $\bar{t} = t^q$. Назовем $j_0\,(\lambda)$ *функцией Бесселя нулевого порядка* поля F_q.

П р е д л о ж е н и е. 4. *Пусть* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. *Тогда*

$$J\,(g) = q^{-2}\Lambda\,(ac^{-1} + c^{-1}d) \left\{ j_0 \left(\frac{(\beta - \tau\gamma)^2 - \tau\,(\alpha - \delta)^2}{\Delta^2} \right) - j_0 \left(\frac{(\beta + \tau\gamma)^2 - \tau\,(\alpha + \delta)^2}{\Delta^2} \right) \right\}.$$

Автор благодарен С. И. Гельфанду за ценные обсуждения и советы, а также Б. Ю. Вейсфейлеру за внимание к работе.

Институт проблем управления
АН СССР

Поступило в редакцию
27 апреля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S p r i n g e r T. A., Sem. Bourbaki, 1972/1973. № 429. **2.** Семинар по алгебраическим группам, М., «Мир», 1973. **3.** В е й л ь А., Математика **13**: 5 (1969), 33—94. **4.** Г е л ь ф а н д. С. И., Матем. сб. 83 (1970), 15—41.