

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. Ya. Blinkin, Optimal control of road traffic,  
*Avtomat. i Telemekh.*, 1976, Issue 5, 27–33

<https://www.mathnet.ru/eng/at7755>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

April 21, 2025, 18:22:10



**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМ  
ПОТОКОМ НА АВТОМОБИЛЬНОЙ МАГИСТРАЛИ**

**М. Я. БЛИНКИН**

(Москва)

Изучается детерминированная идеализация задачи управления транспортным потоком на автомобильной магистрали. Модель строится на основе гидродинамических аналогий, переменные управления характеризуют воздействия на работу въездов на магистраль, скорости движения и смены полос движения. После естественной дискретизации задача укладывается в рамки теории дискретного оптимального управления.

Рассматриваемая задача возникла в связи с необходимостью разработки первой отечественной системы управления транспортным потоком на автомобильной магистрали, общая характеристика которой дана в статьях [1, 2]. Под автомобильной магистралью понимается многополосная автомобильная дорога с разделением встречных потоков, без пересечений потоков в одном уровне и с въездами только на специальных перекрестках.

Понятие управления транспортным потоком на автомобильной магистрали включает в себя три момента: глобальное управление въездами, т. е. дозирование величин входящих с каждого въезда потоков с учетом загрузки магистрали в целом; предписывание определенных скоростей по полосам движения на каждом участке магистрали; назначение определенного порядка смены полос. Во всех случаях речь идет о макровоздействиях, т. е. управлении транспортным потоком в целом, а не отдельными автомобилями.

Настоящая работа посвящена постановке и решению нелинейной задачи оптимального управления транспортным потоком на автомобильной магистрали. В первом разделе формируется модель, описывающая движение транспортного потока в макроскопических терминах. Во втором разделе в построенную модель вводятся управляющие переменные и обсуждается возможность их физической реализации. Третий раздел посвящен формулировке задачи оптимального управления транспортным потоком. Далее приводится пример оптимального управления транспортным потоком на участке автомобильной магистрали.

Задачам, близким к кругу вопросов настоящей статьи, посвящен ряд зарубежных работ. Так, задача глобального управления въездами в «статике» сводится в [3] к схеме линейного программирования, а в [4], в несколько иной постановке, к схеме динамического программирования. Задача поддержания транспортного потока на автомобильной магистрали в некотором номинальном состоянии путем дозирования потоков на въездах рассмотрена в рамках техники линейного оптимального управления в [5]. Наш подход отличается рассмотрением многополосных моделей, характером введения управляющих переменных и применяемым аппаратом оптимизации.

## 1. Модель транспортного потока на автомобильной магистрали

В связи с тем, что при управлении транспортным потоком возможные управляющие воздействия носят не локальный, т. е. относящийся к одному автомобилю, а глобальный характер, в качестве фазовых переменных системы «транспортный поток» будем рассматривать макроскопические величины, определяющие плотность  $\rho(x, t)$  и скорость  $v(x, t)$  транспортного потока. Построенные далее модели в значительной степени базируются на гидродинамических представлениях, т. е. на точке зрения, восходящей к известной работе Лайтхилла и Уайтхема [6]. Модель включает два уравнения, связывающих фазовые переменные  $\rho(x, t)$ ,  $v(x, t)$ . Первое уравнение представляет собой стандартное уравнение неразрывности и записывается в виде

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = Q(x, t),$$

где  $Q(x, t)$  — функция источников. Это уравнение выражает тот факт, что приращение плотности  $\rho(x, t)$  представляет собой алгебраическую сумму входящих и выходящих потоков из участка автомобильной магистрали. Заметим, что выходящий поток в произвольном сечении участка равен

$$(2) \quad \lambda(x, t) = \rho(x, t) v(x, t).$$

Для составления второго уравнения модели необходимо учесть три следующих эффекта, имеющих место в плотном транспортном потоке.

1. *Эффект инерции.* Его смысл состоит в том, что транспортный поток имеет тенденцию сохранять скорость при переходе от предыдущего участка к последующему, вызывая соответствующее изменение скорости на последующем участке.

2. *Эффект торможения перед более плотным потоком последующего участка или, соответственно, всасывания в менее плотный поток.* Этот эффект позволяет ввести в уравнение движения величину, аналогичную давлению в сжимаемой жидкости.

3. *Эффект релаксации к равновесному состоянию.* Этот эффект соответствует экспериментально наблюдаемому факту, что в равновесных состояниях скорость транспортного потока является функцией плотности

$$(3) \quad v = v^*(\rho).$$

Соотношение, учитывающее все перечисленные эффекты, которое будем называть уравнением движения, аналогично уравнению движения сжимаемой жидкости [7]: с учетом введенного эффекта релаксации оно может быть представлено следующим образом:

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\tau} [v - v^*(\rho)].$$

Здесь  $P = P(x, t)$  — давление,  $\tau$  — параметр релаксации. Член  $\frac{\partial v}{\partial x}$  отражает первый из упомянутых эффектов,  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$  — второй и  $\frac{1}{\tau} [v - v^*(\rho)]$  — третий эффект — эффект релаксации.

Как и для идеального газа, для случая транспортного потока давление  $P$  представляет собой функцию плотности  $\rho(x, t)$ . Следуя этой аналогии, положим

$$(5) \quad P = D\rho^\gamma, \quad D = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Численные значения связаны с характером зависимости  $v^*(\rho)$ . Так,  $\gamma = 1$  соответствует логарифмической гипотезе Гринберга,  $\gamma = 3$  — линейной

гипотезе Гриншилдса. Упомянутые, а также другие известные гипотезы верифицируются на обширном статистическом материале в работе [8].

Уравнения (1), (4) будем называть моделью транспортного потока на автомобильной магистрали.

Отметим, что соотношение для плотности и интенсивности равновесных состояний, следующее из (2) и (3), т. е. уравнение

$$(6) \quad \lambda = \rho v^*(\rho),$$

принято называть основной диаграммой, или  $\lambda$ - $\rho$ -диаграммой, транспортного потока. Фундаментальным экспериментальным фактом является характер этой зависимости, в силу которого  $\lambda(0) = \lambda(\bar{\rho}) = 0$ , где  $\bar{\rho}$  — критическая плотность, а производная  $d\lambda/d\rho$ , называемая волновой скоростью, меняет знак только один раз.

## 2. Управляющие параметры в модели транспортного потока

Введение управлений в построенную модель транспортного потока будем проводить одновременно с приведением этой модели к дискретному виду, удобному для дальнейшего изучения. С этой целью рассмотрим  $m$ -полосную автомобильную магистраль, транспортный поток на которой движется в одном направлении.

Магистраль разделена на  $n$  участков, на каждом из которых может находиться съезд и (или) въезд. Граничные сечения участков выбираются таким образом, что въезды расположены в начале, а съезды в конце участка (рис. 1). Будем производить дискретизацию модели (1), (5) как по пространству, так и по времени. Пространственный шаг  $l$  — это, вообще говоря, переменная длина участка, шаг по времени  $\Delta$  является величиной, равной (быть может, кратной) частоте спроса датчиков движения. Для действующих систем в США и ФРГ  $l \leq 1$  км (см. [5]).  $\Delta$  имеет порядок 0,01 часа. В дискретной модели в качестве фазовых переменных будем использовать величины  $\rho_{i,j}(t)$  и  $v_{i,j}(t)$  — плотность и скорость транспортного потока на  $j$ -й полосе  $i$ -го участка магистрали.

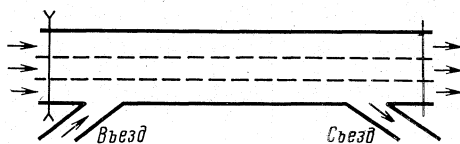


Рис. 1. Схема участка автомобильной магистрали

При дискретизации уравнения неразрывности необходимо уточнить природу функций источников. В данном случае эти функции таковы:  $q_{i,\alpha,\beta}(t)$  — поток, переходящий в пределах  $i$ -го участка с полосы  $\alpha$  на полосу  $\beta$ ;  $f_i^+(t)$  — поток, прибывающий на магистраль с  $i$ -го въезда;  $f_i^-(t)$  — поток, уходящий с магистрали на  $i$ -м съезде.

Заметим, что поток на  $i$ -м въезде не может превышать величины динамической пропускной способности въезда, зависящей от плотности потока на предшествующем участке, т. е.  $f_i^+(t) \leq c_i(\rho_{i-1}(t))$ , где функция  $c_i$  зависит как от геометрических характеристик въезда, так и от качества локального управления, т. е. автоматического выбора подходящих интервалов в потоке. Из соображений глобального управления даже при наличии очередей на въездах не обязательно полное использование пропускной способности въезда. Вводя управляющий параметр  $\xi$ , имеем

$$(7) \quad f_i^+(t) = \xi_i c_i(\rho_{i-1}(t)),$$

где  $0 \leq \xi_i \leq 1$ . Очевидно, что управляющий параметр  $\xi_i$  означает, какую долю динамической пропускной способности данного въезда разрешено использовать из соображений управления транспортным потоком на ма-

гистралей в целом. Поток на съезде  $f_i^-(t)$  не может, разумеется, превышать интенсивности крайней полосы, т. е.

$$(8) \quad f_i^-(t) = r_i \rho_{i-1,1}(t) v_{i-1,1}(t),$$

где  $r_i$  — параметр пользования съездом ( $0 \leq r_i \leq 1$ ).

Для выражения величины потока, переходящего с полосы  $\alpha$  на полосу  $\beta$  в пределах  $i$ -го участка, воспользуемся моделью Оливера — Лэма [9], которая при подходящем подборе параметров представляется вполне удовлетворительной. Вводя управляющий параметр смены полосы —  $\theta_{i,\alpha,\beta}$  ( $\theta_{i,\alpha,\beta} = 1$  — разрешение,  $\theta_{i,\alpha,\beta} = 0$  — запрет), имеем:

$$(9) \quad q_{i,\alpha,\beta}(t) = \theta_{i,\alpha,\beta} P_{i,\alpha,\beta} \rho_{i,\alpha}^2 [\bar{\rho}_{i,\beta} - \rho_{i,\beta}(t)],$$

где  $\bar{\rho}_{i,\beta}$  — критическая плотность;  $P_{i,\alpha,\beta}$  — параметр перехода (величина порядка  $0,01 \text{ км}^3/\text{час}$ ). Таким образом, первое уравнение модели имеет вид

$$(10a) \quad \rho_{ij}(t+1) = \rho_{ij}(t) + \frac{\Delta}{l_i} [\rho_{i-1,j}(t) v_{i-1,j}(t) - \rho_{i,j}(t) v_{i,j}(t) + q_{i,j-1,j}(t) + q_{i,j+1,j}(t) - q_{i,j,j-1}(t) - q_{i,j,j+1}(t)],$$

где  $j > 1$ ,  $1 < i < n$ . Для  $j=1$ , учитывая, что въезды и съезды происходят только с крайней полосы, имеем:

$$(10b) \quad \rho_{i,1}(t+1) = \rho_{i,1}(t) + \frac{\Delta}{l_i} [\rho_{i-1,1}(t) v_{i-1,1}(t) (1 - r_{i-1}(t)) - \rho_{i,1}(t) v_{i,1}(t) + q_{i,2,1}(t) - q_{i,1,2}(t) + c_i(\rho_{i-1,1}(t)) \xi_i].$$

Уравнения для граничных участков пишутся таким же образом с очевидными видоизменениями.

Второе уравнение напомним с учетом управления скоростями, т. е. в предположении, что релаксация происходит не к максимально возможной при данной плотности  $\rho$  равновесной скорости  $v^*(\rho)$ , а к рекомендованному значению  $\chi v^*(\rho)$ , где  $\chi$  — управляющий параметр по скорости ( $0 \leq \chi \leq 1$ ). Таким образом, имеем

$$(11) \quad v_{i,j}(t+1) = v_{i,j}(t) - \Delta \left\{ v_{i,j}(t) \frac{2[v_{i,j}(t) - v_{i-1,j}(t)]}{l_i + l_{i-1}} + \frac{1}{\tau} [v_{i,j}(t) - \chi_{i,j} v_{i,j}^*(\rho_{i,j}(t))] + a \rho_{i,j}(t) \frac{2[\rho_{i+1,j}(t) - \rho_{i,j}(t)]}{l_i + l_{i+1}} \right\}.$$

Здесь слагаемое для давления выписано в предположении, что  $\gamma=3$ , т. е. по простейшей гипотезе Гриндшилдса. Так как вклад третьего слагаемого невелик, здесь нет нужды пользоваться более тонкими допущениями. Функцию  $v^*(\rho)$  для второго слагаемого необходимо выбирать гораздо аккуратнее, руководствуясь экспериментальными данными для конкретного участка магистрали. Параметр  $\tau$  имеет величину порядка  $0,002$  часа,  $a$  — порядка  $1,25 \text{ км}^4/\text{час}$ .

Для полноты описания системы представляется естественным ввести уравнение, характеризующее изменение длин очередей на въездах:

$$(12) \quad L_i(t+1) = L_i(t) + \Delta [f_i(t) - c_i(\rho_{i-1}(t)) \xi_i],$$

где  $f_i(t)$  — интенсивность спроса на  $i$ -й въезд.

### 3. Задача оптимального управления

Введем совокупные переменные: фазового состояния  $x = \{\rho_{i,j}; v_{i,j}; L_i\}$  —  $n(2m+1)$ -мерный вектор; входа  $z = \{g_j; f_i; r_i\}$  —  $(2n+m)$ -мерный вектор; управления  $u = \{\xi_i; \chi_{i,j}; \theta_{i,j,k}\}$  —  $n(3m+1)$ -мерный вектор, где  $g_j$  — интенсивность въезда на начальный участок магистрали. В введенных переменных имеем следующее уравнение:

$$(13) \quad x(t+1) = A[x(t), z(t)] + B[x(t)]u(t),$$

где вектор-функция  $A$  и матрица  $B$  заданы правыми частями уравнений (10а), (10б), (11), (12). Имеют место ограничения на переменные управления:

$$(14a) \quad 0 \leq u_i \leq 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq n(m+1),$$

$$(14b) \quad u_i = 0 \vee 1 \quad \text{при} \quad n(m+1) < i \leq n(3m+1)$$

и фазовые переменные:

$$(15a) \quad x_i \geq 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq n(2m+1),$$

$$(15b) \quad x_i \leq \bar{x}_i \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq nm.$$

Заметим, что в физически содержательной ситуации из ограничений на фазовые переменные только условия неотрицательности очередей ( $x_i \geq 0$  при  $2nm < i \leq n(2m+1)$ ) могут выступать в качестве «активных».

Выбор целевого функционала должен отражать неизбежный при высоком уровне спроса на пользование магистралью компромисс между плот-

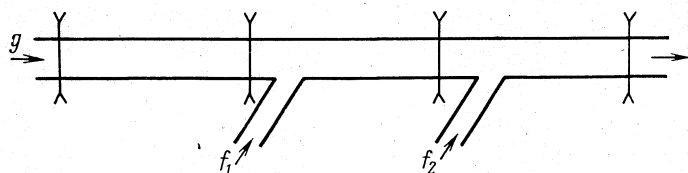


Рис. 2. Три однополосных участка с двумя въездами

ностью потока на магистрали и ожиданием въезда. Повышение плотности приводит к снижению скорости, т. е. к увеличению временных потерь транспортного потока на магистрали, кроме того, создает опасность переуплотнения потока, чреватого образованием заторов. С другой стороны, очереди на въездах — это потери времени в системе в чистом виде. Представляется разумным следующий вид целевого функционала (функционала обобщенной задержки), значение которого нужно минимизировать:

$$(16) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N (Qx(t), x(t)),$$

где  $N\Delta$  — временной интервал, в течение которого производится управление, а

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

— блок-матрица, блоки которой  $Q_1$  и  $Q_2$  — положительно определенные и симметрические матрицы размеров соответственно  $m \times m$  и  $n \times n$ . Таким образом, при управлении транспортным потоком на автомобильной магистрали минимизируется взвешенная сумма квадратов плотностей потока и длин очередей на въездах. При этом выбор весов требует, естественно, технико-экономического анализа. Функционал, выраженный формулой (16), может быть дополнен терминальным членом, выражающим «штраф» за большие колебания на правом конце траектории.

Задача (13) при ограничениях (14) и (15), целевом функционале (16) и заданной функции на входе  $z(t)$  представляет собой стандартную задачу дискретного оптимального управления. Задача имеет большую размерность (60–80 в практически интересных случаях), но весьма простую структуру: каждая фазовая координата зависит от 6, 4 и 2 переменных соответственно для плотности, скорости и длины очереди, кроме того, легко видеть, что гамильтониан задачи линеен по переменной управления  $u$ . Решение задачи удобно осуществлять методами возможных направлений [10].

Нормальному ненапряженному режиму работы магистрали соответствует такое оптимальное управление  $u(t)$ , для которого  $u_i(t) \equiv 1$  для всех  $i$ , т. е. на въездах только ограничения локального управления, смены полос разрешены, скорости на участке ограничены только по условиям данного участка. В этом случае нет нужды в координированном ограничении скоростей и глобальном управлении въездами.

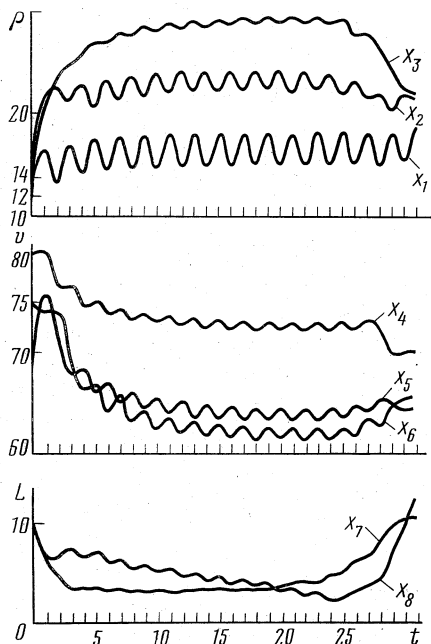


Рис. 3. Оптимальные траектории (8 фазовых переменных)

**Пример.** Рассмотрим три однополосных участка с двумя въездами в начале второго и третьего участков (рис. 2). Примем следующие значения параметров:  $l_1=l_2=l_3=1$  км,  $\Delta=0,01$  час,  $\tau=0,002$  час,  $a=1,25$  км<sup>2</sup>/час. Зададимся следующими  $v$ - $\rho$ -диаграммами для последовательных участков:  $v_1^*(\rho)=96-1,25\rho$ ,  $v_2^*(\rho)=84-1,2\rho$ ,  $v_3^*(\rho)=96-1,25\rho$ , и линейными функциями динамической пропускной способности для обоих въездов —  $c=1360-0,7v\rho$ . В целевом функционале положим:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и введем терминальное слагаемое

$$J_1 = 10 \sum_{i=4}^6 [x_i(N+1) - x_i(N)]^2,$$

выражающее «штраф» за большие колебания скорости потока на правом конце траектории. Наконец, будем считать функцию входа на начальный участок периодической:  $f(t) = 1200 + (-1)^t 200$  авт/час, а функции спроса

на въездах — постоянными и равными 300 авт/час. Рассмотрим промежуток уравнивания, равный 30 тактам, т. е. 18 мин. Оптимальная траектория при данных начальных значениях переменных приведена на рис. 3. Графики  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  относятся к плотностям потока (авт/км),  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  — к средним скоростям (км/час),  $x_7(t)$ ,  $x_8(t)$  — к средним длинам очередей.

Достаточные условия оптимальности, учитывая линейность по переменным управления и выпуклость множества  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ , проверяются непосредственно.

Оптимальное управление здесь дает выигрыш 4,6% в смысле введенного целевого функционала по сравнению с некоординированным случаем.

Поступила в редакцию  
27 октября 1975 г.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А. П., Фримштейн М. И. Система автоматического регулирования автомобильного движения. Автомобильные дороги, № 1, стр. 7–8, 1972.
2. Блинкин М. Я., Васильев А. П., Фримштейн М. И. Выбор стратегии управления движением на скоростных автомобильных магистралях. В сб. «Некоторые вопросы исследования транспортных потоков», вып. 4, стр. 5–15. Изд. ЦЭМИ АН СССР, 1973.
3. Chen Cheng-I., Cruz J. B., Paquet J. G. Entrance ramp control for travel — rate maximization in expressways. Transpn. Res., vol. 8, No. 6, pp. 503–508, 1974.
4. Wang C. F. On a ramp flow assignment problem. Transpn. Sci., vol. 6, No. 2, pp. 114–130, 1972.
5. Изаксен Л., Пейн Г. Наблюдение и регулирование движения на скоростных автомагистралях. В сб. «Транспорт 80-х годов», стр. 22–36. «Мир», 1974.
6. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. Roy. Soc., A, vol. 229, pp. 317–345, 1955.
7. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. «Наука», 1973.
8. Drake J., Schofer J., May A. A statistical analysis of speed-density hypothesis. Vehicular traffic science, pp. 112–117, American Elsevier, New York, 1967.
9. Oliver R. M., Lam T. Statistical experiments with a two-lane flow model. Vehicular traffic science, pp. 170–180, American Elsevier, New York, 1967.
10. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. «Наука», 1973.

---

#### OPTIMAL CONTROL OF ROAD TRAFFIC

М. Я. BLINKIN

A deterministic idealization of the problem of road traffic control is studied. The model is built around hydrodynamic analogies; the control variables characterize control actions on the operation of on-ramp blows, speed and lane changing. Following a natural discretization the problem can be handled by theory of optimal discrete control.