Л. А. Аксентьев, Точные оценки для гармонических в круге функций,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 3–8

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 517.544

Л. А. Аксентьев

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(z)$ и $F(z)$ — функции, регулярные в круге $|z|<1$ и удовлетворяющие условию Гёльдера в замкнутом круге, причем $f(0)=F(0)=0$. Функции $f(e^{i\theta})=p(\theta)+iq(\theta)$ и $F(e^{i\theta})=P(\theta)+iQ(\theta)$ являются граничными значениями функций $f(z)$ и $F(z)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для фиксированного значения φ и любого θ выполняется неравенство*

$$|P(\varphi+\theta)-P(\varphi-\theta)|\leqslant K|p(\varphi+\theta)-p(\varphi-\theta)| \tag{1}$$

и функция $p(\varphi+\theta)-p(\varphi-\theta)$ неотрицательна или неположительна при $0<\theta<\pi$, то имеет место точная оценка

$$|Q(\varphi)|\leqslant K|q(\varphi)|. \tag{2}$$

Оценка достигается с помощью функции $Kf(e^{i\varphi})$.

Доказательство. Возьмем формулу Гильберта для сопряженных гармонических функций ([1], с. 64)

$$Q(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta. \tag{3}$$

После подстановки $\theta-\varphi=\tau$ получим

$$Q(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\varphi+\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau. \tag{4}$$

Пределы можно оставить прежними в силу периодичности подынтегральной функции. В (4) заменим τ на $-\tau$

$$Q(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\varphi-\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau. \tag{5}$$

Сложим (4) и (5) и оценим полученный интеграл, используя (1):

$$|Q(\varphi)|\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P(\varphi+\tau)-P(\varphi-\tau)|\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p(\varphi+\tau)-p(\varphi-\tau)|\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right|d\tau=$$

$$=\frac{K}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[p(\varphi+\tau)-p(\varphi-\tau)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau\right|.$$

Знак абсолютной величины можно вынести за знак интеграла в силу четности подынтегральной функции и сохранения ею знака в интервале $(0, \pi)$. После применения к последнему неравенству формул (4) и (5) для функции $p(\theta)+iq(\theta)$ получим (2). Для доказательства точности оценки (2) нужно положить $P(\theta)=Kp(\theta)$. Теорема доказана.

Положим $f(z)=z$ и учтем, что $\cos(\varphi+\theta)-\cos(\varphi-\theta)=-2\sin\theta\sin\varphi$ сохраняет знак в интервале $0<\theta<\pi$. Тогда получим

Следствие 1. Если $|P(\theta_1)-P(\theta_2)|\leqslant K|\cos\theta_1-\cos\theta_2|$ для любых θ_1 и θ_2, то $|Q(\varphi)|\leqslant K|\sin\varphi|$ при произвольном φ.

Можно применить это следствие к интегральному представлению, которое встречается в теории фильтрации. Именно, для граничных значений $F(t)=P(t)+iQ(t)$, $-1<t<1$, функции $F(\zeta)=\frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\zeta)}$, $\operatorname{Im}\zeta<0$, получим следующее утверждение.

Следствие 2. При выполнении условия $|P(t_1)-P(t_2)|\leqslant K|t_1-t_2|$ справедливо неравенство

$$|Q(t)|\leqslant K\sqrt{1-t^2}. \tag{6}$$

Оценка точная и достигается функцией $Kf(\zeta)=K(\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})$.

Доказательство. Формула $Q(t)=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}$, связывающая вещественную и мнимую части $F(t)$ на $(-1, 1)$, переходит после замены $t=\cos\varphi$, $\tau=\cos\theta$ в формулу

$$Q(\cos\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta.$$

Остается применить следствие 1 к функции $P(\cos\varphi)+iQ(\cos\varphi)$.

Оценка (6) была мной получена раньше по-другому и применена в [2].

Точную оценку для функции $Q(\varphi)$, когда сопряженная с ней функция $P(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера, дает

Теорема 2. *Если для любых точек $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_2}$ единичной окружности выполняется неравенство*

$$|P(\theta_1)-P(\theta_2)|\leqslant K|\theta_1-\theta_2|^{\alpha} \tag{7}$$

при фиксированной постоянной α, $0<\alpha\leqslant 1$, то имеет место точная оценка

$$|Q(\varphi)|\leqslant KM(\alpha), \tag{8}$$

где

$$M(\alpha)=\frac{2^{\alpha}}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta^{\alpha}}{\sin\theta}\,d\theta. \tag{9}$$

Оценка (8) *достигается с помощью функции $K[p(\theta)+iq(\theta)]=Kf(e^{i\theta})$, для которой $p(-\theta)=-p(\theta)$ и*

$$p(\theta)=\begin{cases}2^{\alpha-1}\theta^{\alpha}, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\\[2mm] 2^{\alpha-1}(\pi-\theta)^{\alpha}, & \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Складывая (4) и (5), имеем

$$Q(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{P(\varphi+\tau)-P(\varphi-\tau)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau. \tag{11}$$

Функция, которая стоит перед котангенсом под знаком интеграла, допускает следующие оценки на основании (7):

$$\left|\frac{P(\varphi+\tau)-P(\varphi-\tau)}{2}\right| \begin{cases} \leqslant K2^{\alpha-1}|\tau|^{\alpha}, & (12)\\ = \left|\dfrac{P(\psi-\pi+\tau)-P(\psi+\pi-\tau)}{2}\right| \leqslant K2^{\alpha-1}|\pi-\tau|^{\alpha}, & (13)\\ \leqslant K2^{\alpha-1}|\pi+\tau|^{\alpha}. & (14)\end{cases}$$

Оценка (13) получена после преобразования $\varphi=\psi-\pi$, использования равенства $P(\psi-\pi-\tau)=P(\psi+\pi-\tau)$ (в силу периодичности функции P) и условия (7). Оценка (14) возникает из (13) после замены τ на $-\tau$. Оценки (12)—(14) на основании обозначения (10) можно записать в виде одного неравенства

$$\left|\frac{P(\varphi+\tau)-P(\varphi-\tau)}{2}\right| \leqslant K|p(\tau)|. \tag{15}$$

Применим (15) к оценке интеграла (11) и преобразуем получающийся интеграл:

$$|Q(\varphi)| \leqslant \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|p(\tau)|\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right|d\tau =$$

$$= \frac{K2^{\alpha-1}}{\pi}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tau^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-\tau)^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau\right] = KM(\alpha),$$

причем $M(\alpha)$ определяется формулой (9). Оценка (8) получена.

Точность оценки проверяется легко. В самом деле,

$$Kq(0) = -\frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}p(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta = -KM(\alpha),$$

$$Kq(\pi) = -\frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}p(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\pi}{2}\,d\theta = -\frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}p(\tau+\pi)\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau = KM(\alpha).$$

Остается показать, что функция $p(\theta)$, определенная равенством (10), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом 1. При любых $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$ найдутся такие точки $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$, что $p(\tilde{\theta}_1) = p(\theta_1)$, $p(\tilde{\theta}_2) = p(\theta_2)$ и $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{в силу четности периодической функции } p(\theta) \text{ относительно } \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому достаточно рассмотреть $p(\theta)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Если $\theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ или $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, то $|p(\theta_1)-p(\theta_2)| \leqslant 2^{\alpha-1}|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}$ в силу монотонного возрастания функции θ^{α}. Так как $2^{\alpha-1} \leqslant 1$, то

$|p(\theta_1)-p(\theta_2)|\leqslant|\theta_1-\theta_2|^\alpha$. Если $0\leqslant\theta_1\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\theta_2\leqslant0$, то получим $|p(\theta_1)-p(-\theta_2)|=2^{\alpha-1}(\theta_1^\alpha+\theta_2^\alpha)\leqslant2^{\alpha-1}2\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^\alpha=|\theta_1+\theta_2|^\alpha$, причем $|p(\theta_1)-p(-\theta_2)|=|\theta_1+\theta_2|^\alpha$ для $\theta_1=\theta_2$, т. е. коэффициент 1 нельзя уменьшить. Теорема 2 полностью доказана.

Оценка (8) при $\alpha=1$ была установлена раньше другим методом Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [3]. Постоянная $M(1)$ выражается через постоянную Каталана G ([4], с. 207 и 447): $M(1)=\frac{4G}{\pi}\approx1{,}166$. Это несколько лучше оценки, которая была получена И. С. Красновидовой и В. С. Рогожиным [5], $2\ln2\approx1{,}386$. При $\alpha=1$ определяется в квадратурах функция $f(e^{i\theta})$, с помощью которой достигается оценка (8). Именно, $f(z)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^z\ln\frac{i-z}{i+z}\frac{dz}{z}$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg\frac{i-z}{i+z}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Экстремумы мнимой части $f(z)$ достигаются в точках $z=\pm1$. Действительно,

$$f(1)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\ln\frac{i-t}{i+t}\frac{dt}{t}=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{2i}{1+t^2}\ln t\,dt=\frac{i4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\operatorname{tg}\theta\,d\theta=-i\frac{4G}{\pi}$$

([4], с. 207),

$$f(-1)=-f(1)=i\frac{4G}{\pi}.$$

В случае $0<\alpha<1$ можно дать несколько приближенных выражений для $M(\alpha)$. Например,

$$M(\alpha)\leqslant\frac{2^\alpha}{\alpha}\frac{2G}{\pi}\approx\frac{2^\alpha}{\alpha}0{,}58 \tag{16}$$

или

$$M(\alpha)\leqslant\frac{2^\alpha}{\alpha}\frac{2}{3}\frac{2G}{\pi}+2^\alpha\frac{2G}{3\pi}\approx\frac{2^\alpha}{\alpha}0{,}39+2^\alpha0{,}19. \tag{17}$$

Оба выражения при $\alpha=1$ превращаются в $\frac{4G}{\pi}=M(1)$. Оценка (16) меньше оценки С. Н. Кудряшова [6]: $\frac{2^\alpha}{\alpha}\ln2\approx\frac{2^\alpha}{\alpha}0{,}69$.

В заключение отметим некоторые применения к обратным краевым задачам, точнее к однолистности интегрального представления

$$z(\zeta)=\int\limits_0^\zeta\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta\right)d\zeta\qquad(\ln z'(e^{i\theta})=P(\theta)+iQ(\theta)). \tag{18}$$

1. *Достаточное условие выпуклости* [7], [6] *в форме*

$$|P'(\theta_1)-P'(\theta_2)|\leqslant\frac{1}{M(\alpha)}|\theta_1-\theta_2|^\alpha \tag{19}$$

является неулучшаемым.

В самом деле, если при $\varepsilon>0$ $|P'(\theta_1)-P'(\theta_2)|\leqslant\frac{1+\varepsilon}{M(\alpha)}|\theta_1-\theta_2|^\alpha$, то на основании теоремы 2 $|Q'(\theta)|\leqslant1+\varepsilon$, причем существует функция $p(\theta)+iq(\theta)=\ln z'(e^{i\theta})$, у которой $q'(\theta_0)=-(1+\varepsilon)$. Тогда для $\gamma(\theta)=\frac{\pi}{2}+\theta+q(\theta)$ получим $\gamma'(\theta_0)=-\varepsilon$. Образ единичной окружности будет выпуклым, если $\gamma'(\theta) \geqslant 0$ при всех значениях θ. Следовательно, выпуклость получится наверняка лишь при $\varepsilon = 0$, т. е. коэффициент в условии (19) нельзя увеличить.

2. *Если* $P'(\theta)$ *в интервале* $(-\pi, \pi)$ *удовлетворяет условию*

$$|P'(\theta_1) - P'(\theta_2)| \leqslant A|\cos\theta_1 - \cos\theta_2|, \tag{20}$$

где A $(2{,}9 < A < 3)$ *является вещественным корнем уравнения*

$$\sqrt{A^2-1} = \pi - \arcsin\frac{1}{A}, \tag{21}$$

то функция (18) *является однолистной в круге* $|\zeta| \leqslant 1$.

Доказательство. Условию (20) удовлетворяют только четные функции, так как $|P'(\theta) - P'(-\theta)| \leqslant A|\cos\theta - \cos(-\theta)| = 0$, и, следовательно, $P'(-\theta) = P'(\theta)$. Пользуясь четностью $P'(\theta)$ и заменяя τ на $-\tau$, из (4) (примененного к функции $P'(\theta) + iQ'(\theta)$) найдем $Q'(-\varphi) = -Q'(\varphi)$. Значит, функция $Q'(\varphi)$ — нечетная.

Вычислим вращение a [8] образа окружности $|\zeta| = 1$ при отображении функцией $z(\zeta)$. Будем пользоваться следствием 1, по которому $|Q'(\varphi)| \leqslant A|\sin\varphi|$ при условии (20), и нечетностью функции $Q'(\varphi)$. Находим $\left(\arcsin\frac{1}{A} = \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} |1 + Q'(\theta)|\,d\theta = 4\int_0^{\alpha} d\theta + \int_{\Delta} |1 + Q'(\theta)|\,d\theta =$$

$$= 4\alpha + 2\Big(\int_{\Delta_1} Q'(\theta)\,d\theta + \int_{\Delta_2} d\theta\Big),$$

где Δ_1 — та часть отрезков $\Delta = [\alpha - \pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi - \alpha]$, на которой $0 < Q'(\theta) < 1$; Δ_2 — та часть отрезков Δ, на которой $Q'(\theta) > 1$. В силу нечетности функции $Q'(\theta)$ имеем $\operatorname{mes}\Delta_1 + \operatorname{mes}\Delta_2 \leqslant \pi - 2\alpha = \operatorname{mes}[\alpha, \pi - \alpha]$. Далее, с учетом того, что $1 \leqslant A\sin\theta \geqslant Q'(\theta)$ на отрезке $[\alpha, \pi - \alpha]$, имеем

$$a \leqslant 4\alpha + 2\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} A\sin\theta\,d\theta = 4\alpha + 4A\cos\alpha = 4\alpha + 4\sqrt{A^2-1} = 4\pi.$$

Последнее равенство написано в силу (21). Итак, $a \leqslant 4\pi$.

В. Паатеро [8] доказал, что в случае неоднолистной области $a > 4\pi$. Это значит, что при $a \leqslant 4\pi$ функция $z(\zeta)$ может быть неоднолистной лишь на $|\zeta| = 1$. Кривая L — образ $|\zeta| = 1$ при отображении функцией $z(\zeta)$ — является гладкой кривой, так как $z'(\zeta)$ непрерывна и не равна нулю в $|\zeta| \leqslant 1$ $\left(\text{в силу непрерывности } P(\theta) = \right.$ $\left. = \ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|\Big|_{\zeta = e^{i\theta}}\right)$. Если L — непростая кривая, причем L ограничивает однолистную область, то L имеет точки прикосновения. Любой точкой прикосновения L делится на две части, на одной из которых вращение будет $\geqslant 3\pi$, на другой — больше π. Это противоречит тому, что $a \leqslant 4\pi$ на всей кривой L. Следовательно, получаем однолистность $z(\zeta)$ в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Условие (20) является неулучшаемым в том смысле, что при замене A на бóльшую постоянную найдется такая функция, которая будет удовлетворять условию (20), причем соответствующее вращение a будет больше 4π.

Автор благодарен С. Н. Кудряшову за обсуждение результатов.

г. Казань

Поступило
22 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

2. Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации. УМН, т. XIV, вып. 4, 1959, с. 133—140.

3. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. ДАН СССР, т. 15, № 3, 1937, с. 107—112.

4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

5. Красновидова И. С., Рогожин В. С. Достаточные условия однолистности решения обратной краевой задачи. УМН, т. VIII, вып. 1, 1963, с. 151—153.

6. Кудряшов С. Н. Некоторые критерии выпуклости в одном направлении решения внутренней обратной краевой задачи. Тр. семин. по обратным краевым задачам, вып. 2. Изд. Казанск. ун-та, 1964, с. 78—83.

7. Аксентьев Л. А. Условия однолистности решения основных обратных краевых задач. УМН, т. XV, вып. 6, 1960, с. 119—124.

8. Paatero V. Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. Helsinki, 1931.

С. А. АГАХАНОВ, Г. И. НАТАНСОН. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ — ЯКОБИ ВНУТРИ ПРОМЕЖУТКА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Пусть $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлены Якоби, нормированные условием $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$; $S_n^{(\alpha, \beta)}(f; x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по многочленам $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$; $W^r H\omega$ — класс функций $f(x)$, для которых существует $f^{(r)}(x)$, модуль непрерывности которой не превосходит заданной мажоранты модулей непрерывности $\omega(t)$; $\Delta_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) = f(x) - S^{(\alpha, \beta)}(f; x)$. Получены асимптотические формулы при некоторых $\omega(t)$ для $\sup\limits_{f \in W^r H\omega} |\Delta_n^{(\alpha, \beta)}(f; x)|$ и для $\sup\limits_{f \in H\omega} |\Delta_n^{(0, 0)}(f; x)|$. В первом случае оценка остатка равномерна на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, а во втором случае — на всем отрезке $[-1, 1]$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 11.V.1967.)

Ю. М. АЛИПОВ, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О МАКСИМУМЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Ставится задача: среди простых плоских замкнутых кривых длины l требуется найти кривую, которая ограничивает область с максимальным моментом инерции относительно ее центральной оси, лежащей в той же плоскости. Доказывается, что искомая экстремаль—выпуклая кривая класса C^2, имеющая две оси симметрии. Эта кривая единственная, и в параметрическом представлении она выражается через тригонометрические функции и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода в лежандровой форме. (Работа поступила в журнал „Математика“ 14. 1. 1967.)