V. M. Zhuravlev, Multiplicity of irreducible components of a free Lie algebra as a module of the general linear group, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 31–35

втором — либо $\sum_{i=1}^{k} w_i\mu_i < kR_2$, либо $\sum_{i=k+1}^{N} w_i\mu_i < (N-k)R_1$ (в зависимости от того, какое из условий не выполняется), т. е. вектор попадает в описанное выше множество. Поскольку это множество конечно, можно найти базис V_1 за конечное число шагов.

Повторяя этот процесс, мы в итоге получим базис V искомой полурешетки. Поскольку $G(v+w)=G(v)G(w)$, все неприводимые собственные многочлены оператора D будут содержаться среди многочленов $G(v)$, $v\in V$. Таким образом, задача оказывается решенной.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Е. В. Панкратьеву за поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Singer M. Liouvillian first integrals of differential equations//Proc. ISSAC. 1988. 57—64.
2. Астрелин А. В. Оценка степени неприводимого собственного многочлена некоторого дифференциального оператора//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 5. 72—73.

Поступила в редакцию
23.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.81

В. М. Журавлев

КРАТНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ КАК МОДУЛЯ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Известно (см. [1, п. 3.3, с. 9—10]), что алгебра Ли $L=L(X)$ со свободным порождающим множеством $X=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ над полем F является левым $G=GL(V)$-модулем, где V — векторное пространство над F с базисом X. Подпространства $L_n(X)$ однородных элементов алгебры $L(X)$ степени n инвариантны относительно этого действия. Если $\operatorname{char} F=0$ и F содержит первообразный корень степени n из единицы, то неприводимые G-модули в пространстве $L_n(X)$ имеют вид

$$V_\lambda = T_n(V) \bigotimes_{FS_n} T_\lambda,$$

где T_λ — это S_n-модуль, отвечающий диаграмме Юнга $[\lambda]$, а $T_n(V)=\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{n}$. При этом V_λ — нулевой, если количество строк в диаграмме больше, чем $m=\dim V=|X|$.

Цель данной работы — вычислить кратности $m(V_\lambda, L_n(V))$ неприводимых G-подмодулей модуля $L_n(X)$, отвечающих всевозможным диаграммам $[\lambda]$. В книге [1, п. 3.4.7] приведена формула

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\,\chi^\lambda(\tau^{n/d}),$$

где $\tau=(1, 2, ..., n)\in S_n$, χ^λ — характер неприводимого S_n-модуля, отвечающего разбиению λ, а μ — функция Мебиуса.

Эта формула позволила А. А. Клячко дать ответ на вопрос о том, какие модули V_λ входят в разложение

$L_n(V)$ с ненулевой кратностью. При этом значение характера $\chi^\lambda(\tau^{n/d})$ оставалось в общем случае неизвестным. Мы покажем, что кратности неприводимых G-модулей в $L_n(V)$ определенным образом связаны с формулой Витта (см. п. 3). Основным же результатом данной статьи является точное вычисление значений характеров $\chi^\lambda(\tau^{n/d})$ для всевозможных диаграмм Юнга $[\lambda]$.

1. Введем обозначения (неопределяемые здесь понятия читатель может найти в книге [2]).

Через $\{a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \ldots, a_k^{l_k}\}$ обозначим класс сопряженных элементов в группе S_n, соответствующий произведению независимых циклов с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $\sum_{i=1}^{k} l_i a_i = n$. Далее в формулировках, везде, где это необходимо, будем обозначать через $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ разбиение числа n, при этом $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$, $\lambda_i \geqslant 0$. Если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$, то разбиение называется собственным.

Как обычно, 1_G — тривиальный характер группы G, $\uparrow G$ — индуцирование на G, а $\downarrow G$ — ограничение на G. Характер модуля, индуцированного с подгруппы Юнга $S_\lambda \subset S_n$, отвечающей разбиению $\lambda= =(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, мы будем обозначать через

$$1_{S_\lambda} \uparrow S_n = \chi^{[\lambda_1]\ldots[\lambda_k]} \quad \text{(см. [2, п. 6.4])}.$$

Лемма 1. *Пусть $\pi\rho \in S_n$, где ρ есть r-цикл, а π — перестановка остальных $n-r$ чисел. Тогда*

$$\chi^{[\lambda_1]\ldots[\lambda_n]}(\pi\rho) = \sum_{i=1}^{n} \chi^{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{i-1}][\lambda_i - r][\lambda_{i+1}]\ldots[\lambda_n]}(\pi).$$

Считается, что $[0]$ действует как мультипликативная единица, $[k]=0$ при $k<0$ и $\chi^0(\pi)=0$.

Доказательство см. в [2, п. 21.13].

Предложение 1. *Пусть $n=ld$, $\pi \in \{d^l\}$. Тогда*

$$\chi^{[\lambda_1]\ldots[\lambda_n]}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{если существует такое } \lambda_i, \text{ что } d \nmid \lambda_i; \\ (n/d)! \left(\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i/d)!\right)^{-1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема (детерминантная форма). *Если λ — собственное разбиение числа n, то*

$$\chi^\lambda = \chi^{\det([\lambda_i - i + j])},$$

причем полагаем $[k]=0$ при $k<0$.

Доказательство см. в [2, п. 19.2].

Напомним определения: (i, j)-крюк диаграммы $[\lambda]$ есть подмножество $[\lambda]$, состоящее из клетки (i, j), $\lambda_i - j$ клеток справа от нее и $\lambda_j' - i$ клеток снизу от нее (они образуют ногу крюка). Длина (i, j)-крюка — это число $h_{ij} = \lambda_i + \lambda_j' + 1 - i - j$. Граф крюков диаграммы $[\lambda]$ получится, если заменить каждую клетку (i, j) числом h_{ij}. Косым крюком называется такая связная часть границы диаграммы $[\lambda]$, что после ее удаления остается собственная диаграмма (см. [2, п. 18.2]).

Пусть λ — собственное разбиение числа n, $\lambda_k>0$, $n=ld$, $\pi\in\{d^l\}$. Обозначим через c_λ количество чисел в графе крюков диаграммы, которые делятся на d, т. е. количество таких чисел h_{ij}, что $d\,|\,h_{ij}$.

Теорема (основная). а) *Если* $c_\lambda\neq n/d$, *то* $\chi^\lambda(\pi)=0$. б) *Если* $c_\lambda=n/d$, *то*

$$|\chi^\lambda(\pi)|=\frac{(n/d)!}{\prod(h_{ij}/d)}.$$

Произведение берется по всем таким $(i,j)\in[\lambda]$, *что* $d\,|\,h_{ij}$.

Знак характера вычисляет предложение 4.

Предложение 2. *Пусть* λ — *собственное разбиение числа* n, μ — *разбиение числа* $n-d$, *причем диаграмма* $[\mu]$ *получается удалением из диаграммы* $[\lambda]$ *косого крюка длины* d, *расположенного в строках с номерами от* α *до* $\alpha+\beta$. *Рассмотрим матрицу* $B=([b_{ij}])$, *которая отличается от матрицы* $([\lambda_i-i+j])$ *только тем, что в строке под номером* α *элемент* j*-го столбца имеет вид* $[b_{\alpha j}]=[\lambda_\alpha-\alpha+j-d]$. *Тогда*

$$\chi^\mu=\chi^{(-1)^\beta \det B}.$$

При $n=ld$ *будем иметь* $c_\lambda-c_\mu=1$.

Введем следующее определение. Диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков, если существует такая последовательность диаграмм $[\lambda^i]$, $0\leqslant i\leqslant l$, что выполнены следующие условия:

а) $[\lambda^0]=[\lambda]$, $[\lambda^l]$ — нулевая диаграмма;

б) для всех i, $0\leqslant i\leqslant l$, диаграмма $[\lambda^{i+1}]$ является поддиаграммой диаграммы $[\lambda^i]$ и при этом $[\lambda^i]\setminus[\lambda^{i+1}]$ — косой крюк диаграммы $[\lambda^i]$;

в) $[\lambda]=\bigcup\limits_{i=0}^{l-1}([\lambda^i]\setminus\lambda^{i+1})$.

Соответственно мы будем говорить, что диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d, если $[\lambda^i]\setminus[\lambda^{i+1}]$ — косой крюк длины d в диаграмме $[\lambda^i]$ для всех i.

Предложение 3. *Для разбиения* λ *числа* n, $n=ld$, *следующие условия эквивалентны*:

а) $c_\lambda=n/d$;

б) *диаграмма* $[\lambda]$ *есть объединение косых крюков длины* d;

в) $\chi^\lambda(\pi)\neq0$, $\pi\in\{d^l\}$.

Предложение 4. *Пусть диаграмма* $[\lambda]$ *есть объединение* l *косых крюков длины* d *с длинами ног* β_i. *Тогда*

$$\operatorname{sgn}\chi^\lambda(\pi)=(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i}.$$

2. Приведем следствия из основной теоремы и предложения 4. Как и прежде, считаем $n=ld$, $\pi\in\{d^l\}$, а функция $e(x)$ означает целую часть числа x.

Следствие 1. *Пусть диаграмма* $[\lambda]$ *есть крюк с длиной ноги* k, *т. е.* $\lambda=(m,1^k)$, *где* $m+k=n$. *Тогда*

$$\chi^\lambda(\pi)=(-1)^{k-e(k/d)}\frac{(n/d-1)!}{e((m-1)/d)!\,e(k/d)!}.$$

Следствие 2. *Если диаграммы* $[\lambda]$ *и* $[\lambda^*]$ *сопряжены, то*

$$\chi^{\lambda^*}(\pi)=(-1)^{(d-1)n/d}\chi^\lambda(\pi).$$

Следствие 3. *Пусть* $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1+\lambda_2=n$. *Тогда*

а) *при* $\lambda_1\equiv-1 \pmod d$, $d\neq 1$,

$$\chi^\lambda(\pi)=-\frac{(n/d)!}{((\lambda_1+1)/d)!\,((\lambda_2-1)/d)!}; \tag{1}$$

б) *при* $\lambda_1\equiv\lambda_2\equiv 0 \pmod d$, $d\neq 1$,

$$\chi^\lambda(\pi)=\frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)!\,(\lambda_2/d)!}. \tag{2}$$

Иначе $\chi^\lambda(\pi)=0$.

3. Обозначим через ψ точный неприводимый характер подгруппы $\Gamma=\langle\tau\rangle\subset S_n$, действующей на F, где $\tau\in\{n\}$. Если χ и χ' — характеры G над F, то $(\chi, \chi')_G$ — обычное скалярное произведение характеров.

Из [1, п. 3.4.7] следует

$$m(V_\lambda, L_n(V))=(\psi, \chi^\lambda\downarrow\Gamma)_\Gamma=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\chi^\lambda(\tau^{n/d}). \tag{3}$$

Согласно результатам статьи [3]

$$\begin{aligned}(\psi\uparrow S_n, 1_{S_\lambda}\uparrow S_n)_{S_n}&=\dim_F L_{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)}(Y)=\\ &=\frac{1}{n}\sum_{d|\lambda_1,\dots,d|\lambda_k}\mu(d)\frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)!\dots(\lambda_k/d)!},\end{aligned} \tag{4}$$

где $L_{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)}(Y)$ — полиоднородная компонента в $L(Y)$.

Положим

$$\dim_F L_{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)}(Y)=l_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}.$$

Используя (4), закон взаимности Фробениуса, детерминантную форму из (3), получаем

$$m(V_\lambda, L_n(V))=\sum \operatorname{sgn}\sigma\cdot l_{\lambda_1-1+\sigma(1),\dots,\lambda_k-k+\sigma(k)}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по тем $\sigma\in S_k$, для которых $\lambda_i-i+\sigma(i)\geqslant 0$ при всех $i=1, 2, \dots, k$.

Мы нашли два основных способа подсчета числа $m(V_\lambda, L_n(V))$: с помощью основной теоремы и предложения 4 или с помощью формулы (5). Формулу (5) удобно применять, если число строк в диаграмме невелико. Подсчитаем $m(V_\lambda, L_n(V))$ для некоторых частных случаев.

Пусть $\lambda=(n-k, 1^k)$. Используя следствие 1 и несложные выкладки, получаем:

а) если n — нечетное число, то

$$m(V_\lambda, L_n(V))=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}l_{n-i,i};$$

б) если n — четное число, то

$$m(V_\lambda, L_n(V))=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}l_{n-i,i}+(-1)^k\sum_{0\leqslant 4p\leqslant k-3} l_{\frac{n}{2}-2p-1,2p+1}.$$

Пусть разбиения λ и λ^* сопряжены. Как и ранее, $\tau\in\{n\}$.

Предложение 5. *Если* $n \not\equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)).$$

Если $n \equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)) + \frac{2}{n} \sum_{d|(n/2)} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/2d}).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 1$, тогда $\lambda^* = (2^{\lambda_2}, 1^{\lambda_1 - \lambda_2})$. Из (5) имеем

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1}.$$

Используя предложение 5, получаем:

а) если $n \not\equiv 2 \pmod 4$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1};$$

б) если $n \equiv 2 \pmod 4$, то из формул (1) и (2) имеем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} + l_{\lambda_1/2, \lambda_2/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod 2$;

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} - l_{(\lambda_1+1)/2, (\lambda_2-1)/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 1 \pmod 2$.

В частности, неприводимые $GL(V)$-модули, отвечающие за тождество энгелевости степени n (разбиение $\lambda = (n-1, 1)$) или за стандартное тождество степени n (разбиение $\lambda = (2, 1^{n-2})$), входят в $GL(V)$-разложение модуля $L_n(V)$ с единичной кратностью.

Автор приносит благодарность Ю. А. Бахтурину за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1985.
2. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
3. Blessenohl O., Laue H. On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko//Bull. Austral. Math. Soc. 1989. **40**. 49—57.

Поступила в редакцию
28.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

КОНСТРУКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ИНДЕКСА 2

Введение. В настоящей работе обсуждается проблема рациональности четырехмерных многообразий Фано индекса 2. Мы будем рассматривать только четырехмерные многообразия Фано индекса 2 над полем $\mathbf{C}$ с группой Пикара, изоморфной $\mathbf{Z}$. Такие многообразия имеют единственный дискретный инвариант — род g, который может принимать целые значения $2 \leqslant g \leqslant 10$ [1, 2]. При $5 \leqslant g \leqslant 10$ линейная система $\left| -\frac{1}{2} K_V \right|$ задает вложение многообразия $V = V_{2g-2} \subsetneq \mathbf{P}^{g+2}$ степени