



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

F. E. Lomovtsev, Boundary Value Problems for Complete Quasi-Hyperbolic  
Differential Equations with Variable Domains of Smooth Operator  
Coefficients: I,  
*Differ. Uravn.*, 2005, Volume 41, Number 2, 258–267

<https://www.mathnet.ru/eng/de11232>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

May 21, 2025, 17:09:58



## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

**ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛНЫХ  
КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ОПЕРАТОРНЫХ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ. I**

© 2005 г. Ф. Е. Ломовцев

Полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с постоянными областями определения изучались в работах [1, 2]. Квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с переменными областями определения в случае двухчленной главной части рассматривались в [3]. Полные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения исследованы в [4, 5]. В настоящей работе обобщаются и улучшаются результаты всех указанных выше работ и изучаются полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с переменными областями определения. В приложениях такими уравнениями являются гиперболические уравнения с гладко зависящими от времени коэффициентами в уравнениях и в граничных условиях [3], сингулярные гиперболические уравнения [4] и “гиперболические” уравнения переменных высших порядков по пространственным переменным, приведенные в части II настоящей работы.

**1. Постановка задач.** В гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $|\cdot|$  на ограниченном интервале  $]0, T[$  рассматриваются граничные задачи

$$L_m(\lambda_m)u \equiv (-1)^{m-1} \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k}{dt^k} A_{2k+1}(t) \frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k}{dt^k} A_{2k}(t) \frac{d^k u}{dt^k} + \lambda_m A_0(t)u = f, \quad (1)$$

$$d^i u / dt^i |_{t=0} = d^j u / dt^j |_{t=T} = 0, \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq m-2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $u$  и  $f$  – функции переменной  $t$  со значениями в  $H$  и  $\lambda_m \geq 1$  – числовой параметр. На линейные неограниченные замкнутые операторы  $A_s(t)$  в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A_s(t))$ ,  $s = \overline{0, 2m-1}$ , налагаются следующие условия.

I. При всех  $t \in [0, T]$  операторы  $A_0(t)$  самосопряжены в  $H$ , удовлетворяют неравенству  $(A_0(t)u, u) \geq c_0(t)|u|^2 \quad \forall u \in D(A_0(t))$ ,  $c_0(t) > 0$ , и их обратные  $A_0^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ , где  $\mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$  – множество всех ограниченных по  $t \in [0, T]$  и по норме линейных непрерывных операторов в  $\mathcal{L}(H)$ , имеют в  $H$  сильную производную по  $t$  [6, с. 22]  $dA_0^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ , для которой выполняется неравенство

$$-((dA_0^{-1}(t)/dt)g, g) \leq c_0^{(1)}(A_0^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H. \quad (3)$$

Для формулировки ограничений на  $A_s(t)$ ,  $s > 0$ , введем необходимые пространства. Известно [6], что при каждом  $t \in [0, T]$  для  $A_0(t)$  определены дробные степени  $A_0^\gamma(t)$ ,  $|\gamma| \leq 1$ , с областями определения  $D(A_0^\gamma(t))$ . Надеясь  $D(A_0^{\alpha/(2m)}(t))$  эрмитовыми нормами  $|v|_{\alpha, t} = |A_0^{\alpha/(2m)}(t)v|$ , получаем гильбертовы пространства  $W^\alpha(t)$ ,  $|\alpha| \leq 2m$ ,  $W^0(t) = H$ .

II. При каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $dA_0^{-1}(t)/dt$  имеют в  $H$  сильные производные по  $t$   $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ ,  $2 \leq j \leq m+1$ , удовлетворяющие неравенствам

$$|((d^j A_0^{-1}(t)/dt^j)g, v)| \leq c_0^{(j)} |g|_{-(m+1-j), t} |v|_{-m, t} \quad \forall g, v \in H. \quad (4)$$

III. При каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $A_s(t) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(W^{2m-s}(t), H))$ ,  $s > 0$ , удовлетворяют неравенствам

$$|(A_s(t)u, v)| \leq c_s |u|_{m-[(s+1)/2], t} |v|_{m-[s/2], t} \quad \forall u, v \in D(A_0(t)), \quad (5)$$

где  $[\cdot]$  – целая часть числа, и имеют сильные производные по  $t$  [7]

$$d^i A_s(t)/dt^i \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(W^{2m-s+\tau}(t), H)), \quad \tau > 0, \quad 1 \leq i \leq [s/2], \quad s > 0.$$

При каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $A_{2k}(t)$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ , симметричны на  $D(A_0(t))$  в  $H$  и для  $A_s(t)$ ,  $s > 0$ , выполняются неравенства

$$(-1)^{[(s+1)/2]} \operatorname{Re}((d^i A_s(t)/dt^i)u, u) \leq c_s^{(i)} |u|_{m-[(s+1)/2], t}^2 \quad \forall u \in D(A_0(t)), \quad (6)$$

где  $i = 1$  для  $s = 2k$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ , и  $i = 0$  для  $s = 2k + 1$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ .

Применяем следующее понятие сильной производной по параметру  $t$  от переменных неограниченных операторов  $A(t)$  с переменными областями определения  $D(A(t))$  в  $H$  (см. [7]).

**Определение 1.** Операторы  $A(t)$  назовем сильно дифференцируемыми по  $t$  в  $t_0 \in [0, T]$  на  $u(t_0) \in D(A(t_0))$ , если найдутся  $u(t) \in D(A(t))$ ,  $t \neq t_0$ , такие, что существуют производные

$$u'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(u(t_0 + \Delta t) - u(t_0))/\Delta t\} \in D(A(t_0)),$$

$$h'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(A(t_0 + \Delta t)u(t_0 + \Delta t) - A(t_0)u(t_0))/\Delta t\} \in H$$

в сильном смысле в  $H$  и пределы  $u'(t_0)$  и  $h'(t_0)$  не зависят от выбора  $u(t)$ . Значением сильной производной  $A'(t_0)$  операторов  $A(t)$  в  $t_0$  на  $u(t_0)$  назовем  $A'(t_0)u(t_0) = h'(t_0) - A(t_0)u'(t_0)$ . Совокупность всех таких  $u(t_0)$  образует область определения  $D(A'(t_0)) \subset D(A(t_0))$  оператора производной  $A'(t_0)$ . Операторы  $A(t)$  назовем сильно дифференцируемыми по  $t$  в  $[0, T]$  на  $D(A'(t))$ , если они сильно дифференцируемы по  $t$  в каждой  $t_0 \in [0, T]$  и на каждой  $u(t_0) \in D(A'(t_0))$ .

IV. При каждом  $t \in [0, T]$  все операторы  $A_s(t)$ ,  $s > 0$ , удовлетворяют неравенству

$$|(A_s(t)A_0^{-1}(t)g, v)| \leq \tilde{c}_s^{(0)} |g|_{-[(s+1)/2], t} |v|_{-[s/2], t} \quad \forall g, v \in H, \quad (7)$$

включению  $A_s(t)(d^j A_0^{-1}(t)/dt^j) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ ,  $1 \leq j \leq [(s+1)/2]$ , неравенствам

$$|(A_s(t)(d^j A_0^{-1}(t)/dt^j)g, v)| \leq \tilde{c}_s^{(j)} |g|_{-[(s+1)/2]+j, t} |v|_{-[s/2]-1, t} \quad \forall g, v \in H, \quad 2 \leq j \leq [(s+1)/2], \quad (8)$$

и еще либо неравенству (8) при  $j = 1$ , либо неравенству

$$|(A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, v)| \leq \tilde{c}_s^{(1)} |g|_{-[(s-1)/2], t} |v|_{-[s/2], t} \quad \forall g, v \in H, \quad (9)$$

неравенству (8) при  $j = 2$  с  $\tilde{c}_s^{(j)} |g|_{-[(s+1)/2]+1, t} |v|_{-[s/2], t}$  в его правой части, включению  $(dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ , неравенству

$$|((dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, v)| \leq \tilde{c}_s^{(1)} |g|_{-[(s-1)/2], t} |v|_{-[s/2], t} \quad \forall g, v \in H, \quad (10)$$

в случае  $s = 2k > 0$  еще неравенству

$$(-1)^k \operatorname{Re}(A_{2k}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, g) \leq \tilde{c}_{2k}^{(0)} |g|_{-k, t}^2 \quad \forall g \in H \quad (11)$$

и в случае  $s = 2k + 1 > 0$  операторы  $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$  симметричны на  $D(A_{2k+1}(t))$  в  $H$ . При каждом  $t \in [0, T]$  для операторов  $A_{2k}(t)$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ , выполняются неравенства

$$(-1)^k \operatorname{Re}[(A_{2k}(t)u, A_0(t)v) - (A_0(t)u, A_{2k}(t)v)] \leq \tilde{c}_{2k} |u|_{2m-k-1, t} |v|_{2m-k, t} \quad \forall u, v \in D(A_0(t)) \quad (12)$$

и для операторов  $A_{2k+1}(t)$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ , выполняются неравенства

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re}(A_{2k+1}(t)u, A_0(t)u) \leq \tilde{c}_{2k+1}|u|_{2m-k-1,t}^2 \quad \forall u \in D(A_0(t)). \quad (13)$$

В неравенствах (3)–(13) все постоянные  $c_0^{(j)}, c_s, c_s^{(i)}, \tilde{c}_s^{(j)}, \tilde{c}_s^{(i)}, \tilde{c}_s \geq 0$  не зависят от  $g, u, v$  и  $t$ .

В настоящей работе доказывается корректная разрешимость в сильном смысле граничных задач (1), (2) при  $\lambda_m \geq \bar{\lambda}_m$  в случае полных уравнений высших порядков. Доказательства проводятся модификацией и обобщением известного метода энергетических неравенств работы [8], в отличие от которой сначала выводятся априорные оценки сильных решений задач (1), (2) с помощью сглаживающих операторов  $A_\varepsilon^{-1}(t)$ , а затем устанавливается плотность множеств значений операторов задач (1), (2) в пространствах правых частей с помощью леммы 8 из [9]. В уравнения (1) входят только его главные члены, и корректность граничных задач для уравнений с дополнительными младшими членами обсуждается в замечании 2.

**2. Интерполяционные неравенства.** В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения. Непрерывности производной  $dA^{-1}(t)/dt$  в соответствующей паре гильбертовых шкал пространств  $\{W^q(t)\}$ ,  $|q| \leq 2m$ , посвящена

**Лемма 1.** Пусть  $A(t)$  – линейные самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A(t))$ . Если их обратные  $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$  при всех  $t$  имеют в  $H$  сильную производную  $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H, W^{2m(1-\beta)}(t))) \cap \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(W^{-2m}(t), W^{-2m\beta}(t)))$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , то имеет место оценка

$$|A^{1-\beta-\alpha}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^\alpha(t)x| \leq M|x| \quad \forall x \in D(A^\alpha(t)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (14)$$

где  $M = \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \{\|A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)\|_{\mathcal{L}(H)}, \overline{\|A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}\}$  и черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в  $H$ .

**Доказательство.** Операторы  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = A^{\beta-1}(t)$  и  $\mathcal{T} = A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$  в  $H_1 = H$  при всех  $t$  удовлетворяют замечанию 7.1 из [6, с. 177–179] и, в частности, неравенству  $|\mathcal{B}\mathcal{T}x| \leq M|\mathcal{A}x| \quad \forall x \in H$ . Применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, с. 178], получаем оценки (14) при всех  $t$  и всех  $0 \leq \alpha \leq 1 - \beta$ . Операторы  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = A^\beta(t)$  и  $\mathcal{T} = A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$  также удовлетворяют указанному замечанию 7.1 и, аналогично применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, с. 178], получаем оценки (14) при всех  $t$  и всех  $1 - \beta \leq \alpha \leq 1$ . Лемма 1 доказана.

Имеет место следующее обобщение теоремы Далецкого [6, с. 231] на самосопряженные операторы с переменными областями определения.

**Лемма 2.** В предположениях леммы 1 операторы  $A^{-\gamma}(t)$ ,  $\beta \leq \gamma < 1$ , при каждом  $t \in [0, T]$  имеют в  $H$  сильную производную

$$\frac{dA^{-\gamma}(t)}{dt} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-\gamma} A(t)R(-s) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} A(t)R(-s) ds, \quad \beta \leq \gamma < 1, \quad R(-s) = (A(t) + s)^{-1},$$

и справедливы оценки

$$|A^{\gamma-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)x| \leq M_\gamma|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leq \gamma < 1, \quad (15)$$

$$|A^{-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^\gamma(t)x| \leq M_\gamma|x| \quad \forall x \in D(A^\gamma(t)), \quad \beta \leq \gamma < 1. \quad (16)$$

**Доказательство.** Интегральное представление производной  $dA^{-\gamma}(t)/dt$  получается дифференцированием интегрального представления отрицательных дробных степеней  $A^{-\gamma}(t)$  [6, с. 137] для  $\gamma > \beta$  в силу равенства  $dR(-s)/dt = A(t)R(-s)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$ , оценок  $\|A^\beta(t)R(-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq N_\beta/(1+s)^{1-\beta}$ ,  $s > 0$ ,  $0 \leq \beta < 1$ , и ограниченности операторов  $A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$  и для  $\gamma = \beta$  в силу доказанных ниже оценок (15).

Если  $Q = A^\gamma(t)R(-s)A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$  и  $x, y \in D(A(t))$ , то при всех  $t$  имеем

$$|(Qx, y)| = |(A^{1-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1-\gamma)/2}(t)A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x, A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y)| \leq$$

$$\leq \|A^{1-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1-\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}|A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x||A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в  $H$ . Воспользовавшись неравенствами (14) для  $\alpha \leq 1 - \beta$  и спектральным разложением операторов  $A(t)$ , по аналогии с работой [6, с. 230] придем к оценкам (15) с постоянными  $\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}c_\gamma$ , где  $c_\gamma = (1/3) \int_0^{+\infty} \sigma^{-\gamma}(1 + \sigma)^{-2} d\sigma$ .

Если  $Q = A(t)R(-s)A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{1+\gamma}(t)R(-s)$  и  $x, y \in D(A(t))$ , то при всех  $t$

$$|(Qx, y)| = |(A^{-\beta+(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1+\gamma)/2}(t)A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x, A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y)| \leq \|A^{-\beta+(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1+\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}|A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x||A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в  $H$ . Здесь воспользуемся неравенствами (14) для  $0 \leq \alpha \leq 1$ , спектральным разложением операторов  $A(t)$  и по аналогии с работой [6, с. 230] придем к оценкам (16). Лемма 2 доказана.

Производная  $dA^{-\gamma}(t)/dt$  также непрерывна в подходящей паре гильбертовых шкал пространств  $\{W^q(t)\}$ ,  $|q| \leq 2m$ .

**Лемма 3.** В предположениях леммы 1 при каждом  $t \in [0, T]$  имеют место оценки

$$|A^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^\alpha(t)x| \leq \mathcal{M}_\gamma|x| \quad \forall x \in D(A^\alpha(t)), \quad \beta \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \gamma. \quad (17)$$

**Доказательство.** На основании оценок (15) и (16) достаточно применить лемму 1 к операторам  $A^\gamma(t)$  вместо операторов  $A(t)$ . Лемма 3 доказана.

Нам понадобятся интерполяционные неравенства в отрицательной гильбертовой шкале пространств  $\{\mathcal{H}^q\}$ ,  $-m \leq q \leq 0$ , где  $\mathcal{H}^q = L_2([0, T], W^q(t))$ , с эрмитовыми нормами  $\|\cdot\|_q$ . Пространство  $\mathcal{H}^q$  – множество всех функций  $u : [0, T] \ni t \rightarrow u(t) \in H$ , для которых  $u(t) \in D(A^{q/(2m)}(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , и функции  $h(t) = A^{q/(2m)}(t)u(t) \in \mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L_2([0, T], H)$ .

**Лемма 4.** В предположениях леммы 1 при  $\beta = 1/(2m) \quad \forall w \in \mathcal{W}^m, \quad \mathcal{W}^m = \{w \in \mathcal{H} : d^k w/dt^k \in \mathcal{H}, \quad 1 \leq k \leq m; \quad (d^i w/dt^i)|_{t=0} = (d^j w/dt^j)|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq m-2\}$ , справедливы неравенства

$$\left\| \frac{d^i w}{dt^i} \right\|_{-i}^2 \leq \tau \left\| \frac{d^m w}{dt^m} \right\|_{-m}^2 + c_{2m}^{(i)}(\tau) \|w\|_0^2, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \quad (18)$$

$$\int_0^T (T-t) \left| \frac{d^i w}{dt^i} \right|_{-i,t}^2 dt \leq \tau \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^m w}{dt^m} \right|_{-m,t}^2 dt + \tilde{c}_{2m}^{(i)}(\tau) \int_0^T (T-t) |w|^2 dt, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \quad (19)$$

где постоянные  $c_{2m}^{(i)}(\tau), \tilde{c}_{2m}^{(i)}(\tau) > 0$  не зависят от  $w$  и  $t$ .

**Доказательство.** Оценки (18) и (19) устанавливаются индукцией по  $i$  с помощью интегрирования по частям, оценок (17) и  $\delta$ -неравенства  $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2 \quad \forall \delta > 0$ .

При выводе априорных оценок решений граничных задач (1), (2) нам понадобятся интерполяционные неравенства в положительной гильбертовой шкале пространств  $\{\mathcal{H}^q\}$ ,  $0 \leq q \leq m$ , порожденной самосопряженными операторами с переменными областями определения.

**Лемма 5.** В предположениях леммы 1 при  $\beta = 1/(2m) \quad \forall u \in E^m$  (пространства  $E^m$  определены ниже в начале п. 3) справедливы неравенства

$$\left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{m-i}^2 \leq \tau \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_0^2 + c_{2m+1}^{(i)}(\tau) \|u\|_m^2, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \quad (20)$$

$$\int_0^T (T-t) \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{m-i,t}^2 dt \leq \tau \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|_0^2 dt + \tilde{c}_{2m+1}^{(i)}(\tau) \int_0^T (T-t) |u|_{m,t}^2 dt, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \quad (21)$$

где постоянные  $c_{2m+1}^{(i)}(\tau), \tilde{c}_{2m+1}^{(i)}(\tau) > 0$  не зависят от  $u$  и  $t$ .

**Доказательство.** При  $\forall \varepsilon > 0$  операторы  $\mathcal{A}_\varepsilon(t) = A(t)(I + \varepsilon A(t))^{-1}$  с областями определения  $D(\mathcal{A}_\varepsilon(t)) = H$  ограничены, самосопряжены и положительны в  $H$ . Непосредственно проверяется, что при всех  $t$

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \mathcal{M}, \quad \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \mathcal{M}. \quad (22)$$

Применяя неравенство Гайнца (7.6) из работы [6, с. 178] к операторам  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{A}_\varepsilon^{\beta-1}(t)$  и  $\mathcal{T} = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)$ , при всех  $t$  получаем неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\alpha}(t)x| \leq \mathcal{M}|x| \quad \forall x \in H, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 - \beta. \quad (23)$$

Дифференцируя интегральное представление положительных дробных степеней  $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$  [6, с. 140], при всех  $t$  имеем

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}x = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} s^\gamma R_\varepsilon(-s) \frac{d\mathcal{A}_\varepsilon(t)}{dt} R_\varepsilon(-s)x ds \quad \forall x \in D(A(t)), \quad 0 < \gamma < 1 - \beta,$$

где  $R_\varepsilon(-s) = (\mathcal{A}_\varepsilon(t) + s)^{-1}$ . Если  $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)$  и  $x, y \in D(A(t))$ , то при всех  $t$

$$\begin{aligned} |(Qx, y)| &= |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x, \mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \leq \\ &\leq \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} |\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x| |\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y|. \end{aligned}$$

В силу неравенств (23) и спектральных разложений операторов  $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$  при всех  $t$  получаем

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)x| \leq \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leq \gamma \leq 1 - \beta. \quad (24)$$

Если  $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)$  и  $x, y \in D(A(t))$ , то при всех  $t$

$$\begin{aligned} |(Qx, y)| &= |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x, \mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \leq \\ &\leq \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} |\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x| |\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y|. \end{aligned}$$

Ввиду неравенств (23) и спектральных разложений операторов  $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$  при всех  $t$  имеем

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)x| \leq \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leq \gamma \leq 1 - \beta. \quad (25)$$

В силу оценок (24) и (25) операторы  $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$  удовлетворяют неравенствам (22) с постоянными  $\mathcal{M}_{-\gamma}$  вместо  $\mathcal{M}_\gamma$  и при всех  $t$  выполняются неравенства (23) с  $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$  вместо  $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ :

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma+\alpha}(t)x| \leq \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leq \gamma \leq 1 - \beta, \quad 0 \leq \alpha \leq \gamma - \beta. \quad (26)$$

Операторы  $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$  удовлетворяют половине предположений леммы 1, т.е. при всех  $t$   $\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)/dt)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \mathcal{M}$  и, следовательно, по леммам 2 и 3

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)}{dt} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-\gamma} \mathcal{A}_\varepsilon(t) R_\varepsilon(-s) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} \mathcal{A}_\varepsilon(t) R_\varepsilon(-s) ds, \quad \beta \leq \gamma < 1,$$

для  $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$  выполняются неравенства (15) и соответствующая им половина неравенств (17):

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha(t)x| \leq \mathcal{M}_\gamma|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \gamma - \beta. \quad (27)$$

С помощью интегрирования по частям, оценок (26) и (27), неравенства Шварца и  $\delta$ -неравенства индукцией по  $i$  для  $\forall u \in D(L_m)$  устанавливаются неравенства

$$\left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{(m-i)/(2m)}(t) \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_0^2 \leq \tau \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_0^2 + c_{2m+1}^{(i)}(\tau) \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(t)u\|_0^2, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m,$$

где постоянные  $c_{2m+1}^{(i)}(\tau) > 0$  не зависят от  $u, \varepsilon$  и  $t$ . Устремив здесь  $\varepsilon$  к нулю, согласно известному из [9] свойству (29), получим неравенства (17), которые затем распространяются предельным переходом со множеств  $D(L_m)$ , указанных ниже в начале п. 3, на  $E^m$ .

Неравенства (21) доказываются аналогично. Лемма 5 доказана.

**3. Единственность сильных решений.** Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений. В качестве пространств сильных решений граничных задач (1), (2) возьмем гильбертовы пространства  $E^m$  – пополнения множеств

$$D(L_m) = \left\{ u \in \mathcal{H} : u(t) \in D(A_0(t)), t \in ]0, T[; \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, \frac{d^s u}{dt^s}, \frac{d^{[s/2]}}{dt^{[s/2]}} A_s(t) \frac{d^{[(s+1)/2]} u}{dt^{[(s+1)/2]} \in \mathcal{H}, \right. \\ \left. s = \overline{0, 2m-1}; \frac{d^k u}{dt^k} \in \mathcal{H}^{m-k}, k = \overline{1, m-1}; \frac{d^i u}{dt^i} \Big|_{t=0} = \frac{d^j u}{dt^j} \Big|_{t=T} = 0, i = \overline{0, m}, j = \overline{0, m-2} \right\}$$

по эрмитовым нормам  $\| \|u\| \|m = (\|d^m u/dt^m\|_0^2 + \|u\|_m^2)^{1/2}$ . В качестве пространств правых частей уравнений (1) возьмем банаховы пространства  $\hat{F}^{-(m-1)}$  – пополнения множества  $\mathcal{H}$  по нормам  $\langle \|f\| \rangle_{-(m-1)} = \sup_{v \in \hat{E}^{m-1}} \{ | \int_0^T (f, v) dt | / \langle \|v\| \rangle_{m-1} \}$ , где гильбертовы пространства  $\hat{E}^{m-1}$  – пополнения множеств

$$\hat{D}^m = \{ v \in \mathcal{H} : d^k v/dt^k \in \mathcal{H}^{m-k}, 0 \leq k \leq m, (d^i v/dt^i)|_{t=0} = (d^i v/dt^i)|_{t=T} = 0, 0 \leq i \leq m-1 \}$$

по эрмитовым нормам  $\langle \|v\| \rangle_{m-1} = (\sum_{k=0}^{m-1} \|(T-t)^{-1} d^k v/dt^k\|_{m-1-k}^2)^{1/2}$ . Граничным задачам (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы  $L_m(\lambda_m) : E^m \supset D(L_m) \rightarrow \hat{F}^{-(m-1)}$  с плотными областями определения  $D(L_m)$ . В дальнейшем будем предполагать, что множества  $\hat{D}^m$  плотны в  $\mathcal{H}$ , а здесь ограничимся одним из достаточных условий этой плотности.

**Лемма 6.** Если обратные операторы  $A_0^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$  положительных самосопряженных операторов  $A_0(t)$  при всех  $t$  имеют в  $H$  сильные производные  $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H, W^{m-j}(t)))$ ,  $1 \leq j \leq m$ , то множества  $\hat{D}^m$  плотны в  $\mathcal{H}$ .

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 1 в [9].

**Замечание 1.** Плотность  $\hat{D}^m$  в  $\mathcal{H}$  нужна для построения полноценной дуальной пары  $\hat{E}^{m-1} \subset \mathcal{H} \subset \hat{F}^{-(m-1)}$  в смысле представления значений функционалов из  $\hat{F}^{-(m-1)}$  через скалярное произведение в  $\mathcal{H}$ . В приложениях к краевым задачам плотность  $\hat{D}^m$  в  $\mathcal{H}$  почти всегда имеет место без дополнительных требований гладкости на  $A_0^{-1}(t)$ , так как множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, как правило, всегда содержится в  $\hat{D}^m$  и, очевидно, плотно в  $\mathcal{H}$ .

В дальнейшем будем предполагать замыкаемость операторов  $L_m(\lambda_m)$ , т.е. из того, что для  $u_n \in D(L_m)$ ,  $u_n \rightarrow 0$  в  $E^m$  и  $L_m(\lambda_m)u_n \rightarrow f$  в  $\hat{F}^{-(m-1)}$  при  $n \rightarrow \infty$ , следует, что  $f = 0$ , а здесь ограничимся одним из достаточных условий их замыкаемости.

**Лемма 7.** Пусть выполняются условия леммы 5 при  $m > 1$  и леммы 6, операторы  $A_s(t)$  удовлетворяют неравенствам (5) и производные  $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H, W^{2m-j}(t)))$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ . Тогда каждый оператор  $L_m(\lambda_m)$  допускает замыкание.

**Доказательство.** После интегрирования по частям значения антилинейного непрерывного функционала  $f \in (\hat{E}^{m-1})'$  на  $\forall v \in \mathcal{D}^m = \{ \hat{v} \in \hat{D}^m : \hat{v}(t) \in D(A_0(t)), t \in [0, T]; A_0(t)\hat{v} \in \mathcal{H} \}$

$$f(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (L_m(\lambda)u_n, v) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ - \int_0^T \left( \frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^m v}{dt^m} \right) dt + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \left( A_{2k+1}(t) \frac{d^{k+1} u_n}{dt^{k+1}}, \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt + \right.$$

$$+ \left. \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^T \left( A_{2k}(t) \frac{d^k u_n}{dt^k}, \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt + \lambda_m \int_0^T (u_n, A_0(t)v) dt \right\} = 0, \quad u_n \in D(L_m),$$

в силу неравенств (5) и (20).

Докажем плотность  $\mathcal{D}^m$  в  $\hat{E}^{m-1}$ . Пусть для некоторой функции  $w \in \hat{E}^{m-1}$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T (T-t)^{-2} \left( A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^k v}{dt^k}, A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^m.$$

Здесь полагаем  $v = A_\varepsilon^{-1}(t)h = (I + \varepsilon A_0(t))^{-1}h \in \mathcal{D}^m$ ,  $\varepsilon > 0$ , где  $d^k h/dt^k \in \mathcal{H}$ ,  $0 \leq k \leq m$ , и  $(d^i h/dt^i)|_{t=0} = (d^i h/dt^i)|_{t=T} = 0$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ , распространяем полученные равенства предельным переходом на все  $h \in \mathcal{H}$  такие, что  $(T-t)^{-1}d^k h/dt^k \in \mathcal{H}$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ , и  $(d^i h/dt^i)|_{t=0} = (d^i h/dt^i)|_{t=T} = 0$ ,  $0 \leq i \leq m-2$ , берем  $h = w$  и получаем равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T (T-t)^{-2} \left( A_\varepsilon^{-1}(t) A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^k w}{dt^k}, A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt = \\ & = - \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^k C_k^j \int_0^T (T-t)^{-2} \left( A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^j A_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^j} \frac{d^{k-j} w}{dt^{k-j}}, A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt. \end{aligned}$$

Здесь и далее символом  $C_p^j$  обозначено число сочетаний из  $p$  элементов по  $j$ . В этих равенствах предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу (29) дает  $\langle \|w\| \rangle_{m-1}^2 = 0$ , т.е.  $w = 0$ . Ввиду плотности  $\mathcal{D}^m$  в  $\hat{E}^{m-1}$  имеем  $f = 0$ . Лемма 7 доказана.

Затем строим замыкания  $\overline{L}_m(\lambda_m) : E^m \supset D(\overline{L}_m) \rightarrow \hat{F}^{-(m-1)}$  операторов  $L_m(\lambda_m)$ . К областям определения  $D(\overline{L}_m)$  операторов  $\overline{L}_m(\lambda_m)$  относим все те функции  $u \in E^m$ , для каждой из которых существуют такая последовательность  $u_n \in D(L_m)$  и такой функционал  $f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ , что  $\|u_n - u\|_m \rightarrow 0$  и  $\langle \|L_m(\lambda_m)u_n - f\| \rangle_{-(m-1)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом полагаем  $\overline{L}_m(\lambda_m)u = \lim_{n \rightarrow \infty} L_m(\lambda_m)u_n = f$ .

**Определение 2.** Решения операторных уравнений  $\overline{L}_m(\lambda_m)u = f$ ,  $f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , называются сильными решениями граничных задач (1), (2).

Выведем априорные оценки, из которых следуют единственность и устойчивость решений.

**Теорема 1.** Если выполняются условия I и III, производная

$$dA_0^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H, W^{2m-1}(t))) \cap \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(W^{-2m}(t), W^{-1}(t)))$$

при  $m > 1$ ,  $\hat{\mathcal{D}}^m$  плотны в  $\mathcal{H}$  и операторы  $L_m(\lambda_m)$  допускают замыкания  $\overline{L}_m(\lambda_m)$ , то существуют не зависящие от  $u$  постоянные  $c_0(m) > 0$  и множества  $\hat{\Lambda}_1 = [1, +\infty[$  при  $m = 1$  и  $\hat{\Lambda}_m = [\hat{\lambda}_m, +\infty[$  при  $m > 1$  такие, что

$$\|u\|_m \leq c_0(m) \langle \|\overline{L}_m(\lambda_m)u\| \rangle_{-(m-1)} \quad \forall u \in D(\overline{L}_m), \quad \forall \lambda_m \in \hat{\Lambda}_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (28)$$

**Доказательство.** В пространстве  $H$  рассмотрим операторы сглаживания  $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A_0(t))^{-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ , со значениями в  $D(A_0(t))$ . Они обладают следующими свойствами [9]:

1) ограничены равномерно по  $\varepsilon$  и  $t$  нормы  $\|A_\varepsilon^{-\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , и при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|A_\varepsilon^{-\alpha}(t)v - v\|_0 \rightarrow 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (29)$$

2) операторы  $A_\varepsilon^{-1}(t)$  имеют в  $H$  сильную производную  $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$ .



Интегрируя один раз по частям в  $L_m(\lambda_m)$  только слагаемое, содержащее  $A_0(t)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (-1)^{m-1} \left( \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u \right) dt + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( \left[ \frac{d^k}{dt^k} A_{2k+1}(t) \frac{d}{dt} + \frac{d^k}{dt^k} A_{2k}(t) \right] \frac{d^k u}{dt^k}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u \right) dt + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( A_1(t) \frac{du}{dt}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u \right) dt + (2m-1)\lambda_m \int_0^T e^{c(T-t)} (A_0(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u) dt = \\
 & = 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (L_m(\lambda)u, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u) dt + \\
 & + \lambda_m \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \Phi_\varepsilon(u, u) dt \quad \forall u \in D(L_m), \quad m = 1, 2, \dots, \tag{30}
 \end{aligned}$$

где  $J(t) = (T-t)(d/dt) + (m-1)$  и  $\Phi_\varepsilon(u, u) = ((d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt)u, u) - c(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u)$ .  
 В форме  $\Phi_\varepsilon(u, u)$  воспользуемся формулой

$$d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt = -A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$$

из [9], неравенствами (3), первым свойством операторов  $A_\varepsilon^{-1}(t)$  и найдем, что

$$\Phi_\varepsilon(u, u) \leq (c_0^{(1)} - c) |A_0^{1/2}(t)A_\varepsilon^{-1/2}(t)u|^2. \tag{31}$$

Если в (30) воспользоваться оценкой (31) и в полученном неравенстве, учитывая свойство (29), устремить  $\varepsilon$  к нулю, то при  $\forall c \geq c_0^{(1)}$  придем к неравенствам

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (-1)^{m-1} \left( \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, J(t)u \right) dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( A_1(t) \frac{du}{dt}, J(t)u \right) dt + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( \left[ \frac{d^k}{dt^k} A_{2k+1}(t) \frac{d}{dt} + \frac{d^k}{dt^k} A_{2k}(t) \right] \frac{d^k u}{dt^k}, J(t)u \right) dt + \\
 & + (2m-1)\lambda_m \int_0^T e^{c(T-t)} (A_0(t)u, u) dt \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (L_m(\lambda_m)u, J(t)u) dt.
 \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям  $m$  раз в первом интеграле и  $k$  раз в третьем интеграле и используя симметричность операторов  $A_{2k}(t)$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ , получаем неравенства

$$\int_0^T e^{c(T-t)} \left[ \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|^2 + (A_0(t)u, u) \right] dt \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (L_m(\lambda)u, J(t)u) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{m-3} C_{m-1}^i \int_0^T \left( \frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^{m-1-i} e^{c(T-t)}}{dt^{m-1-i}} \frac{d^i J(t) u}{dt^i} \right] \right) dt + \\
& + (2m-2) \operatorname{Re} \int_0^T \frac{d^2 e^{c(T-t)}}{dt^2} \left( \frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-2} J(t) u}{dt^{m-2}} \right) dt - \\
& - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left\{ 2 \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \int_0^T \frac{d^{k-i} e^{c(T-t)}}{dt^{k-i}} \left( \left[ A_{2k+1}(t) \frac{d}{dt} + A_{2k}(t) \right] \frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^i J(t) u}{dt^i} \right) dt + \right. \\
& + (2m-2-2k) \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( \left[ A_{2k+1}(t) \frac{d}{dt} + A_{2k}(t) \right] \frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k} \right) dt - \\
& \left. - \int_0^T \frac{d e^{c(T-t)} (T-t)}{dt} \left( A_{2k}(t) \frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k} \right) dt - \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( \frac{d A_{2k}(t)}{dt} \frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k} \right) dt \right\} - \\
& - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( A_{2k+1}(t) \frac{d^{k+1} u}{dt^{k+1}}, \frac{d^{k+1} u}{dt^{k+1}} \right) dt - \\
& - (2m-2) \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left( A_1(t) \frac{du}{dt}, u \right) dt - (2m-1)c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|^2 dt + \\
& + [1 - (2m-1)\lambda_m] \int_0^T e^{c(T-t)} (A_0(t) u, u) dt. \tag{32}
\end{aligned}$$

При  $m = 1$  правая часть неравенства (32) без первого интеграла оценивается сверху в силу неравенств (6) при  $s = 1$  и  $i = 0$ , примененных в восьмом интеграле правой части, величиной

$$(2c_1 - c) \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt + (1 - \lambda_1) \int_0^T e^{c(T-t)} (A_0(t) u, u) dt,$$

которая неположительна при  $\forall c \geq c_2 = \max\{c_0^{(1)}, 2c_1\}$  и  $\forall \lambda_1 \geq 1$ .

При  $m > 1$  правые части неравенств (32) без первого интеграла оцениваются сверху в силу неравенств (5), примененных в четвертом, пятом, шестом и девятом интегралах, и (6) – в седьмом и восьмом интегралах правых частей, величинами

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} c_{2m+2}^{(i)} \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right| \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right| dt + \sum_{i=0}^{m-2} c_{2m+3}^{(i)} \int_0^T \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right| \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right| dt + \\
& + \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} c_{2m+4}^{(k,i)} \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^k u}{dt^k} \right|_{m-k,t} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{m-i,t} dt + \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} c_{2m+5}^{(k,i)} \int_0^T \left| \frac{d^k u}{dt^k} \right|_{m-k,t} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{m-i,t} dt + \\
& + \sum_{k=1}^{m-1} c_{2m+6}^{(k)} \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^k u}{dt^k} \right|_{m-k,t}^2 dt + \sum_{k=1}^{m-1} c_{2m+7}^{(k)} \int_0^T \left| \frac{d^k u}{dt^k} \right|_{m-k,t}^2 dt +
\end{aligned}$$

$$+ [2c_{2m-1} - (2m - 1)c] \int_0^T e^{c(T-t)}(T - t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|^2 dt + [1 - (2m - 1)\lambda_m] \int_0^T e^{c(T-t)} |u|_{m,t}^2 dt, \quad (33)$$

где постоянные  $c_{2m+p}^{(i)}, c_{2m+p}^{(k,i)} \geq 0$  зависят лишь от  $c, T, m, c_s^{(i)}$  и  $c_s$ . В первых двух суммах этих величин воспользуемся  $\delta$ -неравенством, интерполяционными неравенствами

$$\left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_0^2 \leq \tau^{1-i/m} \frac{i}{m} \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_0^2 + \tau^{-i/m} \left( 1 - \frac{i}{m} \right) \|u\|_0^2, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \quad (34)$$

$$\int_0^T (T-t) \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2 dt \leq \tau^{1-i/m} \frac{i}{m} \int_0^T (T-t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|^2 dt + \tau^{-i/m} \left( 1 - \frac{i}{m} \right) \int_0^T (T-t) |u|^2 dt, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m,$$

из [3], а в остальных суммах –  $\delta$ -неравенством, неравенствами (20) и (21) и

$$|u| \leq \|A_0^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}^\alpha |A_0^\alpha(t)u| \quad \forall u \in D(A_0^\alpha(t)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (35)$$

при  $\alpha = 1/2$  и найдем сначала постоянные  $c_{2m+8} \geq \max\{c_0^{(1)}, 2c_{2m-1}/(2m-1)\}$ , а затем  $\hat{\lambda}_m \geq 1$  такие, что при  $c = c_{2m+8}$  и  $\forall \lambda_m \geq \hat{\lambda}_m$  выражения (33) оцениваются сверху величинами  $(1 - c_{2m+9}) \|u\|_m^2, c_{2m+9} > 0$ .

Итак, оценивая левые части неравенств (32), взятых при  $c = c_2$  и  $\forall \lambda_1 \geq 1$  для  $m = 1$  и при  $c = c_{2m+8}$  и  $\forall \lambda_m \geq \hat{\lambda}_m$  для  $m > 1$ , снизу через  $\|u\|_m^2$  и приводя подобные члены, в результате элементарных оценок имеем неравенства

$$c_{2m+9} \|u\|_m \leq 2 \sup_{v \in E^m} \left\{ \left| \int_0^T (L_m(\lambda_m)u, e^{c_{2m+8}(T-t)} J(t)v) dt \right| / \|v\|_m \right\}.$$

Так как, согласно неравенствам

$$\left\| (T-t)^{-1} \frac{d^k v}{dt^k} \right\|_{m-1-k}^2 \leq 8 \left\| \frac{d^{k+1} v}{dt^{k+1}} \right\|_{m-k-1}^2 + 8(\mathcal{M}_{1/(2m)} + \mathcal{M}_{-(m-k)/(2m)})^2 \left\| \frac{d^k v}{dt^k} \right\|_{m-k}^2, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

доказательство которых аналогично доказательству леммы 5, и неравенствам (20), (34) и (35), нормы  $\langle \|e^{c_{2m+8}(T-t)} J(t)v\| \rangle_{m-1} \leq c_{2m+10} \|v\|_m$ , то отсюда получаем неравенства (28) с постоянными  $c_0(m) = 2c_{2m+10}/c_{2m+9}$ , которые распространяются предельным переходом с  $D(L_m)$  на сильные решения граничных задач (1), (2). Теорема 1 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 991–999.
2. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 9. С. 1581–1586.
3. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1412–1425.
4. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 4. С. 542–548.
5. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 276–278.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
7. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 1. С. 13–15.
8. Юрчук Н.И. Метод энергетических неравенств в исследовании дифференциально-операторных уравнений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
9. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873–886.

Белорусский государственный университет,  
г. Минск

Поступила в редакцию  
19.03.2004 г.