Р. М. Мустафин, Оценка целой функции через оценку функции и ее производных в замкнутой полосе,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 537–549

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

ОЦЕНКА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ОЦЕНКУ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСЕ

Р. М. Мустафин

Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} k/\lambda_k = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k = \infty$,

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \lambda^2/\lambda_n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\lambda^{2n}$$

и m_n — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}| \qquad (n \geqslant 0).$$

При этих условиях в работе [1] установлено, что если $F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_\nu z}$, удовлетворяет условию

$$|F^{(n)}(\alpha)| < K(\alpha)\, m_n \ (n \geqslant 0), \quad K(\alpha) > 0,$$

тогда для любых $\varepsilon > 0$ и φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существует такая постоянная A, не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α, что

$$|F(z)| < AK(\alpha), \ |\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

Если дополнительно

$$\delta = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная A, не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α, что

$$|F(z)| < AK(\alpha) \quad (\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} \alpha - \delta - \varepsilon).$$

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие свойствами: числа λ'_n являются нулями целой функции $L(z)$ экспоненциального типа, причем

$$|L(re^{\pm \pi i/2})| \geqslant Be^{Ar}$$

и $L(z)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ не имеет других нулей, кроме λ'_n; последовательность $\{\lambda''_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{n\to\infty} n/\lambda''_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda''_n = \infty.$$

В этом случае А. Ф. Леонтьевым показано [2], что система $\{e^{\lambda_\nu z}\}$ полна в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$ в классе функций, аналитичных в полосе $|\operatorname{Im} z| < A$ и непрерывных вплоть до границы. Далее, им же показано [3], что существует функция

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_\nu < \rho_k} c_\nu e^{\lambda_\nu s} \tag{1}$$

(сходимость равномерная на компактах), не равная тождественно нулю, которая ограничена в полосе $|\operatorname{Im} s| \leqslant A$.

Из последнего утверждения вытекает, что для функции вида (1) нельзя получить оценку в угле (или в полуплоскости) через оценку ее на каком-либо множестве из полосы $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$. В связи с этим естественно возникает задача о получении оценки функции вида (1) в угле (или в полуплоскости), если известна оценка производных $F^{(n)}(z)$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ на некотором множестве $\overline{G}$ из полосы $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$:

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant Km_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \ z \in \overline{G}.$$

Решению этой задачи и посвящена статья. Показано, что если m_n не очень быстро растут, то действительно получается нужная оценка.

Итак, пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие свойствами: числа λ'_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются нулями целой функции $L_1(\lambda)$ экспоненциального типа, причем

$$|L_1(re^{\pm \pi i/2})| < Be^{Ar}, \tag{2}$$

последовательность $\{\lambda_n''\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} n/\lambda_n'' = 0, \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n'')^{-1} = \infty. \tag{3}$$

Пусть

$$L_2(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1'^2)(\lambda^2 - \lambda_2'^2)\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n''^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\lambda^{2n}$$

и m_n — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \qquad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}| \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

Обозначим через $\overline{D}$ сопряженную диаграмму функции $L_1(\lambda)$ (в силу условия (2) она расположена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$). Пусть $0 \in \overline{D}$, $\overline{D}_\alpha$ — смещение $\overline{D}$ на вектор α. Возьмем выпуклую область $\widetilde{G}_\alpha$, $\widetilde{G}_\alpha \supset \overline{D}_\alpha$, и положим $\overline{G}_\alpha = \overline{\widetilde{G}}_\alpha \cap \{|\operatorname{Im}(z - \alpha)| \leqslant A\}$. В случае, если

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n'^2), \quad \lim_{n\to\infty} (n/\lambda_n') = \sigma < \infty, \tag{5}$$

$\overline{D}_\alpha$ есть вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$, середина которого находится в точке α, в качестве $\overline{G}_\alpha$ в этом случае можно взять прямоугольник с центром в точке α произвольно малой ширины с большей стороной длины $2\pi\sigma = 2A$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция* $F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(z)$ *(сходимость равномерная на любом компакте), где* $P_n(z)$ — *конечные линейные комбинации функций* $e^{\lambda_\nu z}$, *удовлетворяет условию*

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha)\, m_n \quad (n \geqslant 0),\ K(\alpha) > 0,\ z \in \overline{G}_\alpha \tag{6}$$

(m_n удовлетворяют условию (4)). Тогда для любого φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *существуют такие положительные постоянные* C *и* b, *не зависящие от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - b)]| < \varphi_0.$$

В случае (5) *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *существует такая постоянная* C, *не зависящая от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

Отметим, что если $H_\alpha \supset \overline{G}_\alpha$ и $K(\alpha) = \max\limits_{z\in\widetilde{H}_\alpha} |F(z)|$, то

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant K(\alpha)\, m_n \ (n \geqslant 0), \ z \in \overline{G}_\alpha,$$

где m_n удовлетворяют условию (4).

Действительно, пользуясь представлением производных функции $F(z)$ интегралом Коши, получаем для $z \in \overline{G}_\alpha$

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\partial H_\alpha} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi\right| \leqslant K(\alpha)\frac{n!}{\rho^n},$$

где ρ — расстояние между G_α и ∂H_α. Проверим, что числа $m_n = n!/\rho^n$ удовлетворяют условию (4). Функция $L_2(z)$ — функция первого порядка нулевого типа, поэтому $\beta_n = (\varepsilon_n/n)^n$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n/n)^n n!/\rho^n < C \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, (\varepsilon_n/e\rho)^n < \infty.$$

Имея это в виду, получаем

Следствие. *Пусть функция* $F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(z)$ (*сходимость равномерная на любом компакте*), *где* $P_n(z)$ — *конечные линейные комбинации функций* $e^{\lambda_k z}$, *удовлетворяет условию*

$$|F(z)| < K(\alpha), \quad K(\alpha) > 0,\ z \in \overline{H}_\alpha,\ H_\alpha \supset \overline{G}_\alpha.$$

Тогда для любого φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *существуют такие положительные постоянные* C *и* b, *не зависящие от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - b)]| < \varphi_0.$$

В случае (5) *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *существует такая постоянная* C, *не зависящая от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha), \ |\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дополнительно*

$$\delta = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_k} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| < \infty.$$

Тогда существуют такие положительные постоянные C *и* b, *не зависящие от* $F(z)$, α *и* $K(\alpha)$, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha) \quad (\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - b).$$

В случае (5) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая постоянная* C, *не зависящая от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что*

$$|F(z)| < CK(\alpha) \ (\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - \delta - \varepsilon).$$

§ 1. Об интегральном представлении функции. Положим $\widetilde{L}_1(\lambda) = L_1(\lambda)/((\lambda - \lambda_1')(\lambda - \lambda_2'))$. Ввиду оценки (2) функция $\gamma_1(t)$, ассоциированная по Борелю с $\widetilde{L}_1(\lambda)$, аналитична при $|\operatorname{Im} t| > A$ и непрерывна вплоть до границы.

Отсюда следует, что имеется контур C, лежащий в полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant A$ такой, что $\gamma_1(t)$ аналитична вне C и непрерывна вплоть до C. Имеем

$$\widetilde{L}_1(\lambda) = 1/(2\pi i)\cdot\int_C \gamma_1(t)\, e^{\lambda t}\, dt.$$

Можно считать, что $C \subset \overline{G}$, в силу чего C_α — смещение C на α — содержится в $\overline{G}_\alpha$.

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n'' = 0$, поэтому $L_2(\lambda)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Значит, $L(\lambda) = \widetilde{L}_1(\lambda)\, L_2(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа, причем ее индикатриса совпадает с индикатрисой $h(\varphi)$ функции $\widetilde{L}_1(\lambda)$. Отметим (см. [4, стр. 20—22]), что в любом угле найдется путь Γ из отрезков и дуг окружностей, на котором при некотором $h > 0$

$$|L(\lambda)| > C_1 e^{-h|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Gamma, \tag{7}$$

а также найдутся окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, на которых

$$|L(\lambda)| > e^{-h|\lambda|}, \ |\lambda| = r_k. \tag{8}$$

В случае (5) при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $|L(\lambda)| > C_2(\varepsilon) e^{(h(\varphi)-\varepsilon)|\lambda|}$,

$$\arg\lambda = \varphi, \quad \varphi \neq 0, \pi, \quad h(\varphi) = \pi\sigma\,|\sin\varphi|, \tag{9}$$

и имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$|L(r_k e^{i\varphi})| > e^{(h(\varphi)-\varepsilon) r_k}, \qquad k > K(\varepsilon). \tag{10}$$

Справедливо неравенство (см. [5])

$$\beta_{m+k} \leqslant q\beta_m\beta_k \qquad (m \geqslant 0, \quad k \geqslant 0), \quad q = \max(1, \ |c_2|). \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) =$$
$$= e^{-\alpha\mu} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k\, [F^{(k-1)}(\alpha) + \mu F^{(k-2)}(\alpha) + \ldots + \mu^{k-1} F(\alpha)].$$

Воспользуемся следующим свойством ([4, стр. 246]):

$$\omega_{\tilde{L}_1 L_2}(\mu, \alpha, F) = \tilde{L}_1(\mu)\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) + \omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi), \quad (12)$$

где

$$\Phi(z) = 1/(2\pi i)\int_{C_2} \gamma_2(t) F(t+z)\, dt,$$

$\gamma_2(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_2(\lambda)$ (она регулярна всюду кроме $t=0$), C_2 — замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$. Подставляя в последний интеграл разложение функции $F(t+z)$ в ряд Тейлора, получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k k!}{t^{k+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(z)\, t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z). \quad (13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (12), учитывая условия (4) и (6). Имеем

$$|\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| < K(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(m_{k-1} + |\mu| m_{k-2} + \ldots + |\mu|^{k-1} m_0)\, e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)} = K(\alpha)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n+p} m_n\right)|\mu|^{p-1} e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)}.$$

На основании (11) и (4)

$$|\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| \leqslant K(\alpha) M \sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p+1}|\mu|^p e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)}. \quad (14)$$

Здесь M не зависит от $F(z)$, α и $K(\alpha)$, а зависит от $\{\lambda_n\}$ и $\{m_n\}$. Так как $L_2(\lambda)$ — функция первого порядка минимального типа, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p+1}|\mu|^p < C_3(\varepsilon)\, e^{\varepsilon|\mu|}. \quad (15)$$

В силу (14) и (15) получим нужную оценку

$$|\tilde{L}_1(\mu)\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| < K(\alpha) C_4(\varepsilon) e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)}, \quad \varphi = \arg\mu. \quad (16)$$

Здесь $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $\tilde{L}_1(\mu)$.

Для оценки второго слагаемого используем другую запись функции $\omega(\mu, \alpha, F)$ [4, стр. 247]

$$\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi) = e^{-\alpha\mu}(1/2\pi i)\int_C \gamma_1(t)\left[\int_0^t \Phi(t+\alpha-\xi)\, e^{\mu\xi}\, d\xi\right] dt.$$

Оценим это выражение, пользуясь равенством (13) и учитывая, что $t+\alpha-\xi\in\overline{G}_\alpha$. Имеем

$$|\omega_{\tilde{L}_1}(\mu,\alpha,\Phi)|\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)}\,(1/(2\pi))\int_C|\gamma_1(t)|\cdot$$
$$\cdot\int_0^{|t|}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n m_n\Big)K(\alpha)\,e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}\,|d\xi|\,|dt|\leqslant$$
$$\leqslant M_1(\varepsilon)\,K(\alpha)\,e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)},\qquad \mu=|\mu|\,e^{i\varphi}.\quad(17)$$

Объединяя (16) и (17), получаем оценку

$$|\,\omega_L\,(\mu,\,\alpha,\,F)\,|\leqslant C_0\,(\varepsilon)K\,(\alpha)e^{(h(\varphi)+\varepsilon)\,|\,\mu\,|}e^{-\mathrm{Re}(\alpha\mu)},\quad \varphi=\arg\mu.\quad(18)$$

Имеем

$$\omega_L\,(\mu,\,\alpha,\,\psi_\nu)=e^{(\lambda_\nu-\mu)\alpha}L\,(\mu)/(\mu-\lambda_\nu),\qquad \psi_\nu=e^{\lambda_\nu z}.$$

Поэтому вычет функции $\omega_L\,(\mu,\,\alpha,\,\psi_\nu)e^{\mu z}/L\,(\mu)$ как функции переменного μ равен $e^{\lambda_\nu z}$ в точке $\mu=\lambda_\nu$ и равен нулю во всех остальных точках. На основании отмеченного свойства

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0^n}\frac{\omega_L\,(\mu,\,\alpha,\,P_n)\,e^{\mu z}}{L\,(\mu)}\,d\mu,$$

где $P_n(z)=\sum_{k=1}^{p_n}\gamma_k^{(n)}e^{\lambda_k z}$, контур Γ_0^n — замкнутый, содержащий внутри точки $\lambda_1,\;\ldots,\;\lambda_{p_n}$.

Пусть Γ — путь из отрезков и дуг окружностей, расположенный в углах $0<|\arg\mu|<\psi_0<\pi/2$, на котором выполняются оценки (7) или (9). Обозначим через Γ^k часть Γ, лежащую в круге $|\,\mu\,|\leqslant r_k$, а через Γ_k — дугу окружности $|\,\mu\,|=r_k$, заключенную внутри Γ. Возьмем в качестве Γ_0^n путь $\Gamma^k\bigcup\Gamma_k$ (при достаточно больших k) и докажем, что интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k\to\infty$. Имеем

$$\omega_L\,(\mu,\,\alpha,\,P_n)=e^{-\alpha\mu}\,(1/(2\pi i))\int_{C_1}\gamma\,(t)\,\cdot$$
$$\cdot\Big[\int_0^t P_n\,(t+\alpha-\xi)\,e^{\mu\xi}\,d\xi\Big]\,dt,$$

где $\gamma\,(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L\,(\lambda)$, контур C_1 — замкнутый, охватывающий все особенности функции $\gamma\,(t)$. Обозначим G_1 — внутренность контура C_1. Так как $P_n(z)\rightrightarrows F\,(z)$, $\quad z\in(\overline{G}_1)_\alpha$, то $\;|\,P_n\,(z)\,|\leqslant N$,

$z \in (\bar{G}_1)_\alpha$, N от n не зависит. Отсюда

$$|\omega_L(\mu, \alpha, P_n)| \leqslant$$
$$\leqslant e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}\,|e^{-\alpha\mu}|\,N\,(1/(2\pi)) \int_{C_1} |\gamma(t)|\,|t|\,|dt| =$$
$$= e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}\,|e^{-\alpha\mu}|\,NN_1(\varepsilon), \quad \varphi = \arg\mu, \ \varepsilon > 0 \text{ — любое.} \tag{19}$$

И аналогично

$$|\omega_L(\mu, \alpha, F)| \leqslant e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}\,|e^{-\alpha\mu}|\,NN_1(\varepsilon), \quad \varphi = \arg\mu. \tag{20}$$

В силу (8) и (19)

$$E \equiv \left|\frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\right| \leqslant NN_1(\varepsilon)\,\frac{e^{(\sigma+\varepsilon)|\mu|}\,e^{\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)]}}{e^{-h|\mu|}}, \quad \mu \in \Gamma_k,$$

где σ — тип функции $L(\lambda)$. Возьмем $h_1 > 0$. Имеем

$$\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)] = \mathrm{Re}[\mu(z+h_1-\alpha)] - \mathrm{Re}\,\mu h_1 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Re}[\mu(z+h_1-\alpha)] - |\mu|\,h_1\cos\psi_0, \qquad \mu \in \Gamma_0^n.$$

Пусть z лежит в области

$$E_1 = \{z: |\arg(\alpha - h_1 - z)| < \pi/2 - \psi_0\}$$

и $\arg\mu = \psi$, $|\psi| \leqslant \psi_0$. Положив $\arg(\alpha - h_1 - z) = \varphi$, получим

$$\mathrm{Re}[(z+h_1-\alpha)\mu] = -|\mu|\,|z+h_1-\alpha|\cos(\varphi+\psi).$$

Но $\cos(\varphi+\psi) \geqslant \cos(\pi/2 - \psi_0 + \psi_0) = 0$, поэтому $\mathrm{Re}[(z + h_1 - \alpha)\mu] \leqslant 0$,

$$\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)] \leqslant -|\mu|\,h_1\cos\psi_0, \tag{21}$$

$$E \leqslant NN_1(\varepsilon)e^{-h_2|\mu|}, \quad h_2 = h_1\cos\psi_0 - h - \sigma - \varepsilon, \quad \mu \in \Gamma_k. \tag{22}$$

Если теперь взять $h_1\cos\psi_0 > h + \sigma + \varepsilon$, то $h_2 > 0$, и мы видим, что интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k \to \infty$. На основании этого

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)}{L(\mu)}\,e^{\mu z}\,d\mu, \qquad z \in E_1. \tag{23}$$

В случае (5) в силу (10) и (19) имеем

$$E \equiv \left|\frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\right| \leqslant NN_1(\varepsilon)\,\frac{e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|}\,e^{\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)]}}{e^{(h(\varphi)-\varepsilon)|\mu|}}.$$

Когда z лежит в области

$$E_2 = \{z : |\arg(\alpha - \delta_1 - z)| < \pi/2 - \psi_0,\ \delta_1 > 0\},$$

аналогично имеем

$$\operatorname{Re}[(z-\alpha)\mu] < -|\mu|\delta_1 \cos\psi_0, \tag{24}$$

$$E \leqslant NN_1(\varepsilon)e^{(2\varepsilon - \delta_1 \cos\psi_0)|\mu|}. \tag{25}$$

При ε достаточно малом $2\varepsilon - \delta_1 \cos\psi_0 < 0$, вследствие чего интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k \to \infty$. На основании этого

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)}{L(\mu)} e^{\mu z}\, d\mu, \quad z \in E_2. \tag{26}$$

Рассмотрим разность

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu,\alpha,F)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu,\alpha,P_n)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\omega_L(\mu,\alpha,F-P_n)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^*} \frac{\omega_L(\mu,\alpha,F)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^*} \frac{\omega_L(\mu,\alpha,P_n)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu\right|,$$

где Γ_R — часть Γ, лежащая в круге $|\mu| \leqslant R$, а Γ_R^* — остальная часть Γ. Второе и третье слагаемые по модулю меньше ε при достаточно большом R в силу (22) или (25), первое слагаемое по модулю меньше ε при фиксированном R и достаточно больших n в силу $P_n \rightrightarrows F$. Таким образом, перейдя к пределу в равенствах (23) и (26) при $n \to \infty$, получим искомое интегральное представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu,\alpha,F)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu,$$

$$|\pi - \arg(z + h_1 - \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \psi_0. \tag{27}$$

В частном случае (5)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_L(\mu,\alpha,F)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu,$$

$$|\pi - \arg(z - \alpha_1)| < \pi/2 - \psi_0,\ \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha. \tag{28}$$

§ 2. Доказательство теоремы 1. Из интегрального представления (27) на основании (7), (18) и (21) получаем для $z \in E_1$

$$|F(z)| < (1/(2\pi))\, C_1 K(\alpha)\, C_0(\varepsilon) \int_\Gamma e^{(h+\sigma+\varepsilon)|\mu|}\, e^{\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)]}\, |d\mu| <$$

$$< K(\alpha)\, B_1(\varepsilon) \int_\Gamma e^{-h_2|\mu|}\, |d\mu|.$$

Отсюда

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - h_1)]| < \varphi_0, \quad \varphi_0 < \pi/2,$$

причем C не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α.

Из интегрального представления (28) на основании (9), (18) и (24) получаем в случае (5) для $z \in E_2$

$$|F(z)| < (1/(2\pi))(C_2(\varepsilon)\, K(\alpha)\, C_0(\varepsilon) \int_\Gamma e^{2\varepsilon|\mu|}\, e^{\mathrm{Re}[\mu(z-\alpha)]}\, |d\mu| <$$

$$< K(\alpha)\, B_2(\varepsilon) \int_\Gamma e^{2\varepsilon|\mu|}\, e^{-\delta_1 \cos\psi_0 |\mu|}\, |d\mu|.$$

Выбрав $\varepsilon < (\delta_1/2)\cos\psi_0$, будем иметь

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - \delta_1)]| < \varphi_0, \quad \varphi_0 < \pi/2,$$

причем C не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α. Теорема доказана.

Пусть теперь точка α пробегает кривую L: $y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, причем касательная к L в каждой точке наклонена к вещественной оси под углом ψ, $|\psi| < \psi_1 < \pi/2$. Возьмем криволинейную полосу S ширины (в вертикальном направлении), равной $2K$, серединой которой является кривая L. При подходящем выборе ψ_2, $\psi_1 < \psi_2 < \pi/2$, точки S, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\, z \leqslant \mathrm{Re}\, \alpha - b_0$, $b_0 > b$, лежат в угле $|\pi - \arg[z - (\alpha - b)]| < \psi_2$, а точки S, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\, z \leqslant \mathrm{Re}\, \alpha - \gamma$, $\gamma > \varepsilon$, лежат в угле $|\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \psi_2$, причем ψ_2 не зависит от α, ибо ψ_1 не зависит от α. Получаем при условии (4)

Следствие. *Пусть функция* $F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(z)$ *(сходимость равномерная на любом компакте), где* $P_n(z)$ — *конечные линейные комбинации функций* $e^{\lambda_\nu z}$, *удовлетворяет условию*

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha) m_n \qquad (n \geqslant 0),$$

$$\alpha \in L, \ z \in \overline{G}_\alpha, \ \overline{G}_\alpha = \overline{\tilde{G}}_\alpha \cap \{|\mathrm{Im}(z-\alpha)| \leqslant A\},$$

$\tilde{G}_\alpha$ — *выпуклая область*, $\tilde{G}_\alpha \supset \overline{D}_\alpha$, $K(\alpha) > 0$, *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $K > 0$ *существуют такие постоянные* $b > 0$ *и* C, *не зависящие от* $F(z)$, $K(\alpha)$ *и* α, *что в криволинейной полосе* S *справедлива оценка* $|F(z)| < CK(\alpha)$, $\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - b$, *а в случае* (5) $|F(z)| < CK(\alpha)$, $\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - \varepsilon$.

§ 3. Доказательство теоремы 2. Из представлений (27) и (28) следует [4, стр. 172—174], что соответственно

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_k e^{\lambda_k z}, \quad |\pi - \arg(z + h_1 - \alpha)| < \pi/2 - \psi_0,$$

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_k e^{\lambda_k z},$$

$$|\pi - \arg[z - (\alpha - \delta_1)]| < \pi/2 - \psi_0, \ \delta_1 > 0,$$

где q_n — наибольшие целые числа такие, что $\lambda_{q_n} < r_n$ и

$$a_k = \omega_L(\lambda_k, \beta, F)/L'(\lambda_k), \tag{29}$$

β — произвольное число, которое мы выберем ниже. Оценим числитель. Имеем

$$\omega_L(\lambda_k, \beta, F)| \leqslant (1/(2\pi))\,|e^{-\beta\lambda_k}|\Big(\int_{C_1}|\gamma(t)|\cdot$$

$$\cdot\Big[\int_0^{|t|}|F(t+\beta-\eta)|\,|e^{\lambda_k\eta}|\,|d\eta|\Big]|dt|\Big)\cdot$$

По теореме 1, поскольку $\operatorname{Re}(t-\eta) \leqslant \sigma + \rho$, где $\rho > 0$ — произвольное число, имеем $|F(t+\beta-\eta)| \leqslant A_1K(\alpha)$, если взять $\beta = \alpha - b - \sigma - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, и считать $\rho < \varepsilon_0$; в частном случае (5) $\operatorname{Re}(t-\eta) \leqslant \rho$ и

$$|F(t+\beta-\eta)| \leqslant A_1' K(\alpha), \quad \beta = \alpha - \varepsilon_0.$$

Тогда

$$|\omega_L(\lambda_k, \beta, F)| \leqslant A_2\,|e^{-\beta\lambda_k}|\,e^{\lambda_k(\sigma+\rho)}K(\alpha), \tag{30}$$

а в случае (5)

$$|\omega_L(\lambda_k, \beta, F)| \leqslant A_2'\,|e^{-\beta\lambda_k}|\,e^{\lambda_k\rho}K(\alpha). \tag{31}$$

Из условия

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}\ln|1/L'(\lambda_k)| = \delta$$

получаем,

$$|1/L'(\lambda_k)| < B(\varepsilon_0)\exp[(\delta+\varepsilon_0)\lambda_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В силу этого и на основании (29) и (30) при всех k

$$|a_k| \leqslant A_2 B(\varepsilon_0) K(\alpha) e^{-\operatorname{Re}\beta\lambda_k} e^{\lambda_k(\sigma+\rho)} e^{(\delta+\varepsilon_0)\lambda_k},$$

а в частном случае (5) в силу (29) и (31)

$$|a_k| \leqslant A_2' B(\varepsilon_0) K(\alpha) e^{-\operatorname{Re}\beta\lambda_k} e^{\lambda_k\rho} e^{(\delta+\varepsilon_0)\lambda_k}.$$

Значит, полагая $x = \operatorname{Re} z$, получаем

$$|F(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\lambda_k x} \leqslant A_3 K(\alpha) \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\operatorname{Re}\beta - \delta - \sigma - \rho - \varepsilon_0 - x)\lambda_k],$$

в случае (5)

$$|F(z)| \leqslant A_3' K(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\operatorname{Re}\beta - \delta - \rho - \varepsilon_0 - x)\lambda_k].$$

В общем случае требуем $\operatorname{Re}\beta - \delta - \sigma - \rho - \varepsilon_0 - x \geqslant \varepsilon_0$, т. е. $x \leqslant \operatorname{Re}\alpha - 2\sigma - b - \delta - 3\varepsilon_0 - \rho$. Тогда ряд справа сходится. Обозначив $b_1 = b + 2\sigma + \delta + 3\varepsilon_0 + \rho$, имеем

$$|F(z)| < A_0 K(\alpha), \quad \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - b_1,$$

где A_0 не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α.

В частном случае (5) пусть также $\operatorname{Re}\beta - \delta - \rho - \varepsilon_0 - x \geqslant \varepsilon_0$, т. е. $x \leqslant \operatorname{Re}\alpha - \delta - \rho - 3\varepsilon_0$. Получаем

$$|F(z)| < A_0' K(\alpha), \quad \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\alpha - \delta - \varepsilon,$$

где A_0' не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α.

С л е д с т в и е. *Если в условиях теоремы 2 в полосе* $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$

$$|F^{(n)}(z)| < Cm_n \qquad (n \geqslant 0),$$

то $F(z) \equiv 0$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай, когда $\delta = 0$ и последовательность $\{\lambda_n''\}$ имеет плотность τ, $0 < \tau < \infty$, при уточненном порядке $\rho(r)$, т. е. существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n/\lambda_n''^{\rho(\lambda_n'')} = \tau, \tag{32}$$

где $\rho(r)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r) = 1, \quad \lim_{r\to\infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) = \infty, \tag{33}$$

$\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho(r)}$ (в силу условий (33) $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda''_n = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda''_n)^{-1} = \infty$). Тогда в качестве m_n можно взять числа

$$m_n = h_1^n [\varphi(n)]^n, \quad h_1 < h_0, \ h_0 = (\pi e \tau)^{-1}.$$

Действительно, ввиду условия (32), функция

$$L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n''^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\lambda^{2n}$$

имеет тип $\pi\tau$ при уточненном порядке $\rho(r)$. На основании этого и первого из условий (33) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = \pi\tau e$, откуда при любом $\varepsilon > 0$

$$|c_n| < [(\pi e\tau + \varepsilon)/\varphi(n)]^n, \qquad n > N(\varepsilon).$$

Такому же неравенству будут удовлетворять числа β_n ($\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$). При малом $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \ m_n = h_1^n [\varphi(n)]^n, \quad h_1 < h_0 = (\pi e\tau)^{-1}.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю А. Ф. Леонтьеву.

Башкирский государственный
университет

Поступило
25.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Мустафин Р. М., Оценка целой функции через оценку функции и ее производных на кривой, Матем. заметки, **25**, № 3 (1979).

[2] Леонтьев А. Ф., О полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в замкнутой полосе, Докл. АН СССР, **152**, № 2 (1963), 266—268.

[3] Леонтьев А. Ф., О некоторых теоремах единственности для рядов Дирихле, Изв. АН СССР, Сер. физ.-матем., **27** (1963), 1251—1280.

[4] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., «Наука», 1976.

[5] Леонтьев А. Ф., К вопросу о полноте системы экспонент на интервале, Изв. АН Арм. ССР, **6**, № 2—3 (1971), 195—209.