Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. С. Половинкин, Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью, *Труды МИАН*, 2013, том 283, 121–141

DOI: 10.1134/S0371968513040092

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
11 декабря 2024 г., 16:40:10

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2013, т. 283, с. 121–141

УДК 517.9

Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью[1]

Е. С. Половинкин[2]

Поступило в ноябре 2012 г.

Для дифференциальных включений в банаховых пространствах с измеримо-псевдолипшицевой правой частью получены теоремы существования, теоремы об овыпуклении типа теоремы Филиппова–Важевского. Также описаны некоторые свойства множества решений таких дифференциальных включений, являющиеся обобщением классических теорем о непрерывной зависимости и о дифференцировании решений по начальным данным.

DOI: 10.1134/S0371968513040092

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании необходимых условий оптимальности первого порядка в экстремальных задачах, опирающихся на множество решений некоторого дифференциального включения, основное внимание обращается на поведение решений дифференциального включения в окрестности решения, которое подозрительно на экстремальность. Однако условия на задачу, и в том числе условия на правую часть дифференциального включения, как правило, носят глобальный характер, т.е. полагается, что многозначное отображение, входящее в правую часть дифференциального включения, измеримо по одной переменной и в каком-то смысле гладко или удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа по другой переменной. Кроме того, при переходе к более простой задаче, в которой правая часть включения принимает выпуклые значения, применяется операция вычисления выпуклой оболочки от всего множества, стоящего в правой части включения. В то же время возможно ослабление условий задачи, если накладывать лишь локальные условия на правую часть дифференциального включения в окрестности графика оптимального решения, использовать локальное овыпукление правой части в той же окрестности. Для реализации этой идеи необходимы новые теоремы существования, новые теоремы об овыпуклении (релаксации) и другие свойства решений дифференциальных включений с ослабленными условиями на правую часть. В данной работе мы развиваем эту идею, опираясь на результаты А.Ф. Филиппова и Т. Важевского [1–3], а также на результаты, полученные ранее автором совместно с Г.В. Смирновым в работах [4–6] и позднее автором в работах [7–13]. В данной работе обобщены качественные свойства решений дифференциальных включений со случая, когда правая часть дифференциального включения измерима по t и удовлетворяет условию Липшица по x, на случай, когда правая часть удовлетворяет локальным условиям под названием “измеримо-псевдолипшицевость” в окрестности некоторой функции, а также со случая, когда решения принадлежали конечномерному

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00139a, 13-01-00295a) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия.
E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

© Е.С. Половинкин, 2013

пространству $\mathbb{R}^n$, на случай рефлексивного банахова пространства. В частности, в работе для таких включений получены теорема существования решений, теорема об овыпуклении правой части (о релаксации), теорема о дифференцировании по начальным данным и другие.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $T \doteq [t_0, t_1]$ — отрезок прямой, E — сепарабельное банахово пространство. Через $B_r(a) \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| \le r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке $a \in E$ радиуса $r > 0$. Для всякого множества A через $\operatorname{co} A$ и $\overline{\operatorname{co}}\, A$ обозначаем выпуклую оболочку и выпуклую замкнутую оболочку множества A в банаховом пространстве E. *Полунормой множества A в банаховом пространстве E* называется величина $\|A\| \doteq \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$. Пусть $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$ — расстояние от точки x до множества A в банаховом пространстве E.

Напомним, что *функцией отклонения множества A от другого множества B в пространстве E* называется функция вида

$$h^+(A, B) \doteq \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0)\}, \tag{2.1}$$

а *расстоянием по Хаусдорфу между множествами A и B в пространстве E* называется функция вида

$$h(A, B) \doteq \max\{h^+(A, B), h^+(B, A)\}.$$

Через $\mathrm{AC}(T, E)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций*, т.е. для каждой функции $f\colon T \to E$ из этого пространства существует суммируемая по Бохнеру функция $f'\colon T \to E$ такая, что для каждого $t \in T$ справедливо равенство

$$f(t) = f(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau,$$

т.е. $f'\colon T \to E$ — производная абсолютно непрерывной функции $f\colon T \to E$.

Норма в пространстве $\mathrm{AC}(T, E)$ определяется по формуле $\|f\|_{\mathrm{AC}} \doteq \|f(t_0)\|_E + \|f'\|_{L_1}$, где $\|f'\|_{L_1} \doteq \int_{t_0}^{t_1} \|f'(\tau)\|_E\, d\tau$ — норма производной функции f' в пространстве Лебега–Бохнера $L_1(T, E)$. Через $L_1(T, E)$, как обычно, обозначаем нормированное пространство классов эквивалентностей интегрируемых по Бохнеру функций, действующих из T в E.

Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E, через $\mathcal{F}(E)$ — пространство непустых замкнутых подмножеств из пространства E, через $\mathcal{K}(E)$ — метрическое пространство непустых компактных подмножеств из пространства E с метрикой Хаусдорфа.

Пусть задано многозначное отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$. Напомним, что *эффективным множеством* многозначного отображения F называется множество $\operatorname{dom} F \doteq \{(t, x) \mid F(t, x) \ne \varnothing\}$. *Графиком* этого отображения называется множество

$$\operatorname{graph} F \doteq \big\{(t, x, y) \in T \times E \times E \;\big|\; y \in F(t, x),\ (t, x) \in \operatorname{dom} F\big\}.$$

Пусть для отображения $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ определено *дифференциальное включение* вида

$$x' \in F(t, x), \qquad t \in T. \tag{2.2}$$

Решением дифференциального включения (2.2) на отрезке T называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot) \in \mathrm{AC}(T, E)$, у которой производная функция $x'\colon T \to E$ является суммируемой по Бохнеру ветвью отображения $F(\cdot, x(\cdot))$.

Через $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ будем обозначать любое решение дифференциального включения (2.2) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$, определенное на всем отрезке T (при условии, что такое решение существует). Через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ обозначаем множество в $\mathrm{AC}(T, E)$ всех решений $x(\cdot, x_0)$ дифференциального включения (2.2) на отрезке T при условии, что $x_0 \in C_0$.

3. ИЗМЕРИМО-ПСЕВДОЛИПШИЦЕВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ

Ж.-П. Обен в работе [14] ввел и исследовал следующее понятие псевдолипшицевости многозначного отображения.

Определение 1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Отображение $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ называется *псевдолипшицевым около точки* $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \operatorname{graph} F \subset X \times Y$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $l > 0$ такие, что для всех $x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)$ справедливо включение

$$F(x_1) \cap B_{\alpha_2}(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \tag{3.1}$$

Отметим одно важное свойство таких отображений.

Лемма 1. *Пусть отображение* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *псевдолипшицево около точки* $(x_0, y_0) \in \operatorname{graph} F$. *Определим отображение* $G(x) \doteq F(x) \cap B_{\alpha_2}(y_0)$ *при* $x \in B_{\alpha_1}(x_0)$. *Тогда это отображение* $G\colon B_{\alpha_1}(x_0) \to \mathcal{P}(Y)$ *является полунепрерывным снизу* (*пн.сн.*).

Доказательство. Для доказательства того, что отображение G пн.сн., достаточно показать, что для любой точки $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \operatorname{graph} G$ и произвольной последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к точке $\widetilde{x}$, существует последовательность $y_k \in G(x_k)$, которая сходится к точке $\widetilde{y}$. Так как $\widetilde{y} \in B_{\alpha_2}(y_0)$, то число $\varepsilon \doteq \alpha_2 - \|\widetilde{y} - y_0\|$ положительно. Так как в силу псевдолипшицевости F имеем $\widetilde{y} \in F(x_k) + l\|x_k - \widetilde{x}\|\overline{B_1(0)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то существуют $y_k \in F(x_k)$ такие, что $\|y_k - \widetilde{y}\| \le l\|x_k - \widetilde{x}\|$. Поэтому найдется номер k_0 такой, что при $k \ge k_0$ имеем $l\|x_k - \widetilde{x}\| < \varepsilon$, откуда следует, что $y_k \in G(x_k)$ при всех $k \ge k_0$. $\square$

Мы хотим обобщить определение 1 на случай “неавтономного” отображения, т.е. когда отображение F имеет вид $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ и по $t \in T$ нет гладкости. Соответствующее условие псевдолипшицевости этого отображения по $x \in E$ принимает более сложную, чем в автономном случае, форму.

Условие 1. Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ таково, что для него заданы число $\delta > 0$, функции $y(\cdot) \in \mathrm{AC}(T, E)$, $\rho(\cdot), l(\cdot), \eta(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$ и $\xi(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^1_+)$, множество W и отображение $G(t, x)$ такие, что

$$\xi(t) \ge \delta, \qquad \varrho(y'(t), F(t, y(t))) \le \rho(t), \qquad \rho(t) + l(t)\xi(t) \le \eta(t) \qquad \forall t \in T,$$
$$W \doteq \bigl\{(t, x) \in T \times E \bigm| \|x - y(t)\| \le \xi(t),\ t \in T\bigr\},$$
$$G(t, x) \doteq F(t, x) \cap (y'(t) + \eta(t)B_1(0)). \tag{3.2}$$

При этом F удовлетворяет трем условиям:

1) для любой точки $(t, x) \in W$ множества $G(t, x)$ непусты;
2) для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\operatorname{graph} v \subset W$, отображение $t \to G(t, v(t))$ измеримо на отрезке T;
3) для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \tag{3.3}$$

Определение 2. В случае, когда $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет условиям 1)–3), объединенным в одно условие 1, будем говорить, что отображение F является *измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции* $y(\cdot)$.

Отметим, что, используя понятие функции отклонения одного множества от другого $h^+(A,B)$ (см. (2.1)), получаем, что включение (3.3) эквивалентно неравенству

$$h^+(G(t,x_1),F(t,x_2)) \le l(t)\|x_1-x_2\|.$$

Очевидно, что если отображение F измеримо по t и удовлетворяет сильному условию Липшица (т.е. в метрике Хаусдорфа) по x, то выполнены и слабые — локальные условия 1.

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Важное значение в теории дифференциальных включений имеет известная теорема Филиппова [1, 2] о существовании решения дифференциального включения с липшицевой правой частью, доказанная в [1] для случая $\mathbb{R}^n$.

Обобщение этой теоремы на случай сепарабельного банахова пространства E, а также на случай измеримо-псевдолипшицевых отображений F (см. условие 1) принимает следующий вид.

Теорема 1. *Пусть отображение* $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ *является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности некоторой функции* $y(\cdot)\in \mathrm{AC}(T,E)$, *т.е. заданы число* $\delta>0$, *функции* $l(\cdot),\rho(\cdot)\in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$ *и существует число* $\beta>0$ *такие, что приведенные в условии* 1 *функции* $\xi(\cdot)=\xi_\beta(\cdot)$ *и* $\eta(\cdot)=\eta_\beta(\cdot)$ *вычисляются по формулам*

$$\xi_\beta(t)\doteq e^{m(t)+\beta}\left(\delta+\int\limits_{t_0}^{t} e^{-m(\tau)}\rho(\tau)\,d\tau\,(1+\beta)\right),\qquad m(t)\doteq\int\limits_{t_0}^{t} l(\tau)\,d\tau, \tag{4.1}$$

$$\eta_\beta(t)\doteq l(t)\xi_\beta(t)+\rho(t)(1+\beta)\qquad \forall t\in T. \tag{4.2}$$

Тогда для любой начальной точки $x_0\in B_\delta(y(t_0))$ *существует решение* $x(\cdot)\in\mathcal{R}_T(F,x_0)$ *дифференциального включения* (2.2), *причем справедливы оценки*

$$\|x(t)-y(t)\|\le\xi_\beta(t),\qquad \|x'(t)-y'(t)\|\le\eta_\beta(t)\qquad \forall t\in T. \tag{4.3}$$

Доказательство. Приведем процедуру построения последовательности пар функций $\{x_k(\cdot),v_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$, определенных на отрезке T со значениями в пространстве E, по правилу

$$x_0(t)\doteq y(t),\qquad x_{k+1}(t)\doteq x_0+\int\limits_{t_0}^{t} v_k(\tau)\,d\tau,\qquad t\in T. \tag{4.4}$$

Каждая функция $v_k(\cdot)$ выбирается с помощью функции $x_k(\cdot)$ как функция, суммируемая по Бохнеру и удовлетворяющая включению $v_k(t)\in R_k(t)$ при п.в. $t\in T$, где

$$R_k(t)\doteq F(t,x_k(t))\cap\bigl(x_k'(t)+\rho_k(t)\overline{B_1(0)}\bigr), \tag{4.5}$$

$$\rho_0(t)\doteq\rho(t)\left(1+\frac{\beta}{2}\right),\qquad \rho_k(t)\doteq\varrho(x_k'(t),F(t,x_k(t)))\left(1+\frac{\beta}{2^{k+1}}\right),\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Покажем, что такой выбор возможен. Так как по условию теоремы $\beta>0$, то при всех $k\in\mathbb{N}$ по определению отображения $R_k(\cdot)$ его значения $R_k(t)$ непусты и замкнуты при п.в. $t\in T$. Кроме того, докажем индукцией по $k\in\mathbb{N}$, что для всех отображений R_k из (4.5) справедливы равенства

$$R_k(t)=G(t,x_k(t))\cap\bigl(x_k'(t)+\rho_k(t)\overline{B_1(0)}\bigr), \tag{4.6}$$

$$\varrho\bigl(x_k'(t),F(t,x_k(t))\bigr)=\varrho\bigl(x_k'(t),G(t,x_k(t))\bigr), \tag{4.7}$$

где отображение $G(t,x)$ взято из условия 1 и определяется по формуле (3.2) при $\eta(\cdot)=\eta_\beta(\cdot)$ из (4.2). Если справедливы эти равенства, то каждая функция $\rho_k\colon T\to\mathbb{R}^1_+$ и каждое отображение $R_k\colon T\to\mathcal{F}(E)$ измеримы и по теореме Ш. Кастена [15] у $R_k(\cdot)$ существует плотное семейство измеримых ветвей на отрезке T, одну из которых и берем в качестве функции $v_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда по построению и по (4.6) каждая функция $v_k(\cdot)$ суммируема по Бохнеру, так как $\|v_k(t)\|\le\|y'(t)\|+\eta_\beta(t)$, и удовлетворяет включению $v_k(t)\in G(t,x_k(t))$.

Итак, для доказательства формулы (4.6) на первом шаге индукции в силу неравенства $\rho_0(t)<\eta_\beta(t)$ при п.в. $t\in T$ получаем

$$R_0(t)=F(t,y(t))\cap\bigl(y'(t)+\rho_0(t)\overline{B_1(0)}\bigr)=G(t,y(t))\cap\bigl(y'(t)+\rho_0(t)\overline{B_1(0)}\bigr),$$

вследствие чего отображение $R_0(t)$ измеримо и для выбранной измеримой ветви $v_0(t)$ справедливо включение $\|v_0(t)\|\le\|y'(t)\|+\rho_0(t)$, т.е. $v_0(\cdot)$ — суммируемая функция.

Далее считаем, что при некотором $k\in\mathbb{N}$ уже доказана формула (4.6), причем при $s\in\overline{1,k}$ выбранные функции $v_s(\cdot)$ суммируемы и удовлетворяют включениям $v_s(t)\in G(t,x_s(t))$, $t\in T$. В силу (4.4) получаем, что $x'_{k+1}(t)=v_k(t)\in G(t,x_k(t))$, откуда в силу измеримо-псевдолипшицевости F следует

$$\varrho\bigl(x'_{k+1}(t),F(t,x_{k+1}(t))\bigr)\le\rho\bigl(x'_{k+1}(t),G(t,x_k(t))\bigr)+h^+\bigl(G(t,x_k(t)),F(t,x_{k+1}(t))\bigr)\le$$
$$\le l(t)\|x_k(t)-x_{k+1}(t)\|,$$

т.е.

$$\rho_{k+1}(t)\le l(t)\|x_k(t)-x_{k+1}(t)\|\left(1+\frac{\beta}{2^{k+2}}\right)\qquad\forall t\in T.\tag{4.8}$$

Заметим, что на предыдущих шагах $s\le k$ при выборе функции $v_s(\cdot)$ из R_s мы получили бы оценку $\|v_s(t)-v_{s-1}(t)\|=\|x'_{s+1}(t)-x'_s(t)\|\le\rho_s(t)$ и аналогично (4.8) неравенство

$$\|x'_{s+1}(t)-x'_s(t)\|\le l(t)\|x_s(t)-x_{s-1}(t)\|\left(1+\frac{\beta}{2^{s+1}}\right)\qquad\forall t\in T.\tag{4.9}$$

Интегрируя неравенство $\|x'_1(t)-x'_0(t)\|\le\rho_0(t)$, получаем оценку $\|x_1(t)-x_0(t)\|<\delta+$ $+\int_{t_0}^t\rho(\tau)\,d\tau\,(1+\beta)$ при любом $t\in T$. Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (4.9) при $s=1$ и интегрируя последнее неравенство, получаем оценку для $\|x_2(t)-x_1(t)\|$.

Продолжая процедуру последовательных подстановок и интегрирования неравенства (4.9) для всех $s=1,2,3,\dots,k+1$, в силу неравенства $\prod_{p=1}^s\bigl(1+\frac{\beta}{2^p}\bigr)<e^\beta$ получаем неравенства

$$\|x'_{s+1}(t)-x'_s(t)\|\le\rho_s(t)<l(t)f_{s-1}(t)\prod_{p=1}^s\left(1+\frac{\beta}{2^p}\right)<l(t)f_{s-1}(t)e^\beta,\tag{4.10}$$

$$\|x_{s+1}(t)-x_s(t)\|<f_s(t)\prod_{p=1}^s\left(1+\frac{\beta}{2^p}\right),\tag{4.11}$$

где

$$f_s(t)\doteq\delta\frac{(m(t))^s}{s!}+\int\limits_{t_0}^t\frac{(m(t)-m(\tau))^s}{s!}\rho(\tau)\,d\tau\,(1+\beta),\qquad t\in T.$$

Для получения этих оценок мы воспользовались равенством (при $t\ge t_0$)

$$\int\limits_{t_0}^t l(\tau_1)\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_1}l(\tau_2)\dots\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_{s-1}}l(\tau_s)\,d\tau_s\right)\dots d\tau_2\right)d\tau_1=\frac{1}{s!}\left(\int\limits_{t_0}^t l(\tau)\,d\tau\right)^s,$$

справедливость которого легко доказать по индукции.

Рассмотрим функциональный ряд вида $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$, где $u_m(t) \doteq x_m(t) - x_{m-1}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in T$. Очевидно, что $\sum_{s=1}^{k+1} u_s(t) = x_{k+1}(t) - y(t)$. Учитывая неравенства (4.10), (4.11) и неравенства $1 + \frac{z}{1!} + \ldots + \frac{z^s}{s!} < e^z$ и $\prod_{p=1}^{s}\bigl(1 + \frac{z}{2^p}\bigr) < e^z$, верные при всех $z > 0$ и $s \in \mathbb{N}$, получаем следующие оценки:

$$\sum_{s=1}^{k+1} \|u_s(t)\| < \sum_{s=0}^{k} f_s(t) e^{\beta} < \xi_\beta(t), \tag{4.12}$$

$$\|x'_{k+1}(t) - y'(t)\| + \rho_{k+1}(t) \le \sum_{s=1}^{k+1} \|u'_s(t)\| + \rho_{k+1}(t) < \sum_{s=0}^{k+1} \rho_s(t) = \rho_0(t) + l(t) \sum_{s=0}^{k} f_s(t) e^{\beta} <$$
$$< \rho_0(t) + l(t)\xi_\beta(t) = \eta_\beta(t) \qquad \forall t \in T.$$

Отсюда следует справедливость включения

$$x'_{k+1}(t) + \rho_{k+1}(t)\overline{B_1(0)} \subset y'(t) + \eta_\beta(t)\overline{B_1(0)},$$

что влечет за собой справедливость равенства (4.7) и формулы (4.6) при $k+1$, что и требовалось доказать по индукции.

Из полученных оценок для частичных сумм рядов и полноты банахова пространства следует сходимость функционального ряда $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$ и ряда, составленного из его производных, откуда получаем сходимость последовательностей $\{x_k(\cdot)\}$, $\{v_k(\cdot)\}$ к некоторой паре функций $x(\cdot)$, $v(\cdot)$, причем, переходя к пределу в соотношениях (4.4), получаем, что функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathrm{AC}(T, E)$ и является решением задачи $x'(t) \in F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Полученное в теореме 1 решение $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ в силу оценок (4.3) является также решением дифференциального включения с правой частью, равной $G(t,x)$, вычисляемой по формуле (3.2), т.е. $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(G, x_0)$.

Замечание 2. Теорема 1 остается, очевидно, справедливой при любом $\beta \ge 0$, если в ней условия измеримо-псевдолипшицевости F заменены более сильными условиями измеримости по t и липшицевости по x.

Утверждение о непрерывной зависимости решений от начальных данных принимает следующий вид.

Следствие 1. *Пусть отображение* $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ *удовлетворяет условию* 1 *около решения* $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0)$ *с начальным условием* $\widehat{x}(t_0) = \widehat{x}_0$ *с некоторыми* $\delta > 0$ *и* $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$. *Тогда для любого положительного числа* $\varepsilon < \delta e^{-m(t_1)}$ (*где* $m(t)$ *определено в* (4.1)) *и любого* $x_0 \in B_\varepsilon(\widehat{x}_0)$ *существует решение* $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} < \delta(1 + m(t_1)).$$

Доказательство следствия очевидно. Выбирая $y(\cdot) \doteq \widehat{x}(\cdot)$ в условии теоремы 1, получаем $\rho(t) = 0$, откуда $\xi_\beta(t) \doteq e^{m(t)+\beta}\varepsilon$ будет меньше δ при достаточно малом $\beta > 0$. $\square$

5. ТЕОРЕМА ОБ ОВЫПУКЛЕНИИ

Многих ученых давно интересовал вопрос о связи между семейством решений $\mathcal{R}_T(F, x_0)$ включения (2.2) и семейством решений $\mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\, F, x_0)$ дифференциального включения с овыпукленной правой частью

$$z'(t) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, z(t)), \qquad z(t_0) = x_0, \qquad t \in T. \tag{5.1}$$

Впервые связь указанных семейств решений установили Т. Важевский и А.Ф. Филиппов. Важевский [3] для непрерывного ограниченного отображения $F\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ доказал, что каждое решение включения (5.1) является равномерным пределом функций $y_k(t)$ таких, что

$$\varrho\big(y_k'(t), \overline{\operatorname{extr}}\ \overline{\operatorname{co}}\, F(t, y_k(t))\big) \to 0 \qquad \text{при п.в. } t \in T.$$

Филиппов [1] показал, что при условии липшицевости по x ограниченного отображения $F\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ множество решений $\mathcal{R}_T(F, x_0)$ всюду плотно в множестве решений $\mathcal{R}_T(\overline{\operatorname{co}}\, F, x_0)$ в метрике пространства $C(T, \mathbb{R}^n)$. Многие авторы пытались ослабить условия данной теоремы Филиппова об овыпуклении. Однако А. Плис в работе [16] построил контрпример, показывающий, что теорема Филиппова неверна, если F является лишь непрерывным отображением.

Докажем теорему, которая будет обобщением теоремы Филиппова об овыпуклении на случай измеримо-псевдолипшицева отображения в банаховом пространстве.

Для этого нам потребуется следующее усиление условия измеримо-псевдолипшицевости отображения.

Условие 2. Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет условию 1 с соответствующими параметрами δ, $y(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $l(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ и $\xi(\cdot)$, множеством W и отображением $G(t,x)$. Определим функцию $\widetilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$ и

$$\widetilde{G}(t,x) \doteq F(t,x) \cap \big(y'(t) + \widetilde{\eta}(t) B_1(0)\big). \tag{5.2}$$

Пусть справедливы дополнительные условия:

2$'$) для любой функции $v(\cdot) \in C(T,E)$, у которой $\operatorname{graph} v \subset W$, отображение $t \to \widetilde{G}(t, v(t))$ измеримо на отрезке T;

3$'$) для любых $(t,x_1), (t,x_2) \in W$ справедливы включения

$$\widetilde{G}(t,x_1) \subset F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)}. \tag{5.3}$$

Определение 3. В случае, когда $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет приведенному выше условию 2, будем говорить, что отображение F является *строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности* функции $y(\cdot)$.

Проведенная с помощью условия 2 локализация отображения F около некоторой функции $y(\cdot)$ приводит к тому, что полученное в условии 2 ограниченное отображение $\widetilde{G}$ само является измеримо-псевдолипшицевым. Точнее, справедлива

Лемма 2. *Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ является строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции $y(\cdot)$, т.е. удовлетворяет условию* 2. *Тогда отображение $\widetilde{G}\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ (определения см. в* (3.2), (5.2)) *само является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции $y(\cdot)$, причем справедливо включение*

$$G(t,x_1) \subset \widetilde{G}(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)} \qquad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in W. \tag{5.4}$$

Доказательство. Отметим, что для любых чисел $r > 0$, $\rho > 0$, множества $A \subset E$ и точки $x \in E$ справедливо включение

$$(A + \overline{B_r(0)}) \cap B_\rho(x) \subset A \cap B_{r+\rho}(x) + \overline{B_r(0)}. \tag{5.5}$$

Из формул (3.2), (3.3), (5.2) и (5.5) для любых точек $(t,x_1), (t,x_2) \in W$ получаем

$$G(t,x_1) \subset \big(F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)}\big) \cap (y'(t) + \eta(t) B_1(0)) \subset$$
$$\subset F(t,x_2) \cap \big(y'(t) + (l(t)\|x_1 - x_2\| + \eta(t)) B_1(0)\big) + l(t)\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)}.$$

Отсюда и из неравенства $l(t)\|x_1 - x_2\| \le 2\xi(t)l(t) \le 2\eta(t)$ для любых $(t,x_1),(t,x_2) \in W$ получаем включение (5.4). $\square$

Для произвольного многозначного отображения $Q\colon T \to \mathcal{P}(E)$ введем обозначения. Через $\mathcal{L}_T(Q)$ обозначим множество

$$\mathcal{L}_T(Q) \doteq \bigl\{f(\cdot) \in L_1(T,E) \bigm| f(t) \in Q(t) \text{ при п.в. } t \in T\bigr\}, \tag{5.6}$$

т.е. совокупность всех интегрируемых по Лебегу–Бохнеру однозначных ветвей отображения Q.

Определение 4. *Интегралом Ауманна* отображения $Q\colon T \to \mathcal{P}(E)$ называется множество вида

$$J(\mathcal{L}_T(Q)) \doteq \left\{x \in E \;\middle|\; x = (\mathrm{L})\int\limits_T f\,dt,\;\; f \in \mathcal{L}_T(Q)\right\}, \tag{5.7}$$

т.е. множество значений интегралов от всех интегрируемых по Лебегу–Бохнеру однозначных ветвей отображения Q (см. [17]). Как обычно, через $\overline{A}$ обозначаем замыкание множества A в банаховом пространстве E, а для отображения $Q\colon T \to \mathcal{P}(E)$ через $\overline{Q}$ обозначаем отображение со значениями $\overline{Q}(t) = \overline{Q(t)}$.

Известно следующее обобщение теоремы Ауманна–Олеха об интеграле на отрезке T (обобщение со случая значений из $\mathbb{R}^n$ на случай значений из сепарабельного банахова пространства E; см., например, [18]).

Теорема Ауманна–Олеха. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, а отображение $Q\colon T \to \mathcal{F}(E)$ измеримо, причем существует функция $k(\cdot) \in L(T,\mathbb{R}^1_+)$ такая, что $\|Q(t)\| \le k(t)$ при п.в. $t \in T$. Тогда справедливо равенство множеств*

$$\overline{J(\mathcal{L}_T(Q))} = \overline{J(\mathcal{L}_T(\overline{\mathrm{co}}\,Q))},$$

причем эти множества являются выпуклыми.

Теорема 2. *Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ является строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности некоторой функции $y(\cdot)$ с константой Липшица $l(\cdot)$, числами $\delta \in (0,1)$, $\beta > 0$, функциями $\rho(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\widetilde{\eta}(\cdot)$ и отображениями $G(t,x)$ и $\widetilde{G}(t,x)$ из* (3.2), (5.2), *причем*

$$m(t) \doteq \int\limits_{t_0}^{t} l(\tau)\,d\tau, \qquad \alpha \doteq \frac{1}{3}\delta e^{-m(t_1)-2\beta}, \qquad a \doteq \delta + e^{m(t_1)+2\beta}\int\limits_{t_0}^{t_1}\rho(\tau)\,d\tau, \tag{5.8}$$

$$\xi(t) \doteq a, \qquad \eta(t) \doteq (l(t)a + \rho(t)(1+\beta)), \qquad \widetilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t), \qquad t \in T. \tag{5.9}$$

Тогда для любых $u_0 \in B_\alpha(y(t_0))$, $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,G,u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,v_0)$ такое, что $\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_C < \delta$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий теоремы следует, что множество решений $\mathcal{R}_T(G,u_0)$ и тем более множество решений $\mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,G,u_0)$ непусты. В самом деле, в силу формул (4.1), (4.2), (5.8) и (5.9) функции $\xi_\beta(\cdot)$ и $\eta_\beta(\cdot)$, взятые из условий теоремы 1, очевидно, удовлетворяют неравенствам $\xi_\beta(t) \le a$ и $\eta_\beta(t) \le \eta(t)$. Кроме того, справедливо включение $G(t,x) \subset \widetilde{G}(t,x)$ при всех $(t,x) \in W$. Поэтому выполнены все условия теоремы 1 для отображения G, в силу которой, а также в силу замечания 1 получаем, что множество $\mathcal{R}_T(G,u_0)$ непусто.

Определим функцию $k(t) \doteq \|y'(t)\| + \eta(t)$. Очевидно, что $k(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$. По свойству интеграла Лебега существует конечное разбиение отрезка $T = [t_0, t_1]$ точками $\theta_0 = t_0 < \theta_1 < \ldots \ldots < \theta_n < \ldots < \theta_N = t_1$ такое, что для любого отрезка $T_n \doteq [\theta_{n-1}, \theta_n]$ имеем

$$\int\limits_{T_n} k(s)\, ds \le \frac{\alpha}{2}. \tag{5.10}$$

Пусть выбрано некоторое решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\, G, u_0)$. Интегрируя $u'(t)$ на отрезке T_n, получаем, что $u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) \in J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{\mathrm{co}}\, G(\,\cdot\,, u(\cdot))))$. В силу обобщенной теоремы Ауманна–Олеха справедливо равенство замыканий интегралов Ауманна–Лебега

$$\overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\,\cdot\,, u(\cdot))))} = \overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{\mathrm{co}}\, G(\,\cdot\,, u(\cdot))))} \qquad \forall n \in \overline{1, N},$$

из которого получаем

$$u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) \in \overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\,\cdot\,, u(\cdot))))} \qquad \forall n \in \overline{1, N}.$$

Это значит, что существуют функции $w_n(\cdot) \in \mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\,\cdot\,, u(\cdot)))$ такие, что

$$\left\| u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) - \int\limits_{T_n} w_n(s)\, ds \right\| < \frac{\alpha}{N+1} \qquad \forall n \in \overline{1, N}. \tag{5.11}$$

Определим функцию $z(\cdot) \in \mathrm{AC}(T, E)$ такую, что

$$z(t_0) = u_0 \qquad \text{и} \qquad z'(t) = w_n(t) \qquad \text{при п.в. } t \in T_n.$$

Это значит, что $z(\theta_n) - z(\theta_{n-1}) = \int_{T_n} w_n(s)\, ds$, откуда в силу (5.11), суммируя по всем $n \in \overline{1, k}$ при $k \in \overline{1, N}$, получаем

$$\|u(\theta_k) - z(\theta_k)\| < \alpha \qquad \forall k \in \overline{1, N}. \tag{5.12}$$

Для любого $t \in T$ найдется $k \in \overline{1, N}$ такое, что $t \in T_{k+1}$. Так как значения $\|u'(s)\|$ и $\|z'(s)\|$ ограничены значением $k(s)$ при п.в. $s \in T$, то в силу (5.10) и (5.12) получаем

$$\|u(t) - z(t)\| \le \|u(\theta_k) - z(\theta_k)\| + \|u(t) - u(\theta_k)\| + \|z(t) - z(\theta_k)\| < 2\alpha.$$

По построению $z'(t) \in \overline{G(t, u(t))} \subset \widetilde{G}(t, u(t))$ при п.в. $t \in T$. Поэтому получаем

$$\varrho(z'(t), F(t, z(t))) \le \varrho(z'(t), G(t, u(t))) + h^+\big(G(t, u(t)), F(t, z(t))\big) \le l(t)\|u(t) - z(t)\| \le 2\alpha l(t).$$

Кроме того, из включения $z'(t) \in \overline{G(t, u(t))}$ и из определения отображения G следует, что $\|z'(t) - y'(t)\| \le \eta(t)$, откуда

$$\|z(t) - y(t)\| \le \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds.$$

Определим отображение

$$H(t, x) \doteq F(t, x) \cap \big(z'(t) + 2\eta(t)\overline{B_1(0)}\big), \qquad (t, x) \in W.$$

Очевидно, что $\overline{G(t, x)} \subset H(t, x) \subset \widetilde{G}(t, x)$ при любых $(t, x) \in W$. Таким образом, показали, что отображение F является измеримо-псевдолипшицевым в некоторой окрестности функции $z(\cdot)$, а именно в окрестности $V \doteq \left\{(t,x,z) \mid \|x-z(t)\| < \delta - \alpha + 2\int_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds,\ \|z-z'(t)\| \le 2\eta(t)\right\}$. По теореме 1 для любого $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(H,v_0) \subset \mathcal{R}_T(\widetilde{G},v_0) \subset \mathcal{R}_T(F,v_0)$ такое, что

$$\|z(t)-v(t)\| \le \widetilde{\xi}_\beta(t) \doteq e^{m(t)+\beta}\left(\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-m(s)} 2\alpha l(s)\,ds\,(1+\beta)\right) \le$$

$$\le 3\alpha e^{m(t)+2\beta} - 2\alpha e^{\beta}(1+\beta) < \delta - 2\alpha \qquad \forall t \in T.$$

Аналогично получаем

$$\|z'(t)-v'(t)\| \le \widetilde{\eta}_\beta(t) \doteq l(t)\widetilde{\xi}_\beta(t) + 2\alpha l(t)(1+\beta) \le 3\alpha e^{m(t)+2\beta} l(t) < \eta(t).$$

Выведенные оценки показывают, что решение $v(\cdot)$ не выходит из заданной в теореме 1 окрестности V. Кроме того, очевидно получаем, что

$$\|u(t)-v(t)\| \le \|u(t)-z(t)\| + \|z(t)-v(t)\| < 2\alpha + (\delta - 2\alpha) = \delta,$$

что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 2. *Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с константой Липшица $l(\cdot) \in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$. Пусть существует функция $k(\cdot) \in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$ такая, что $\|F(t,x)\| \le k(t)$ при всех $x \in E$ и при п.в. $t \in T$. Тогда для любого $\delta > 0$, $u_0 \in E$, $v_0 \in B_{\delta/2}(u_0)$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,F,u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,v_0)$ такое, что $\|u(\cdot)-v(\cdot)\|_C < \delta$.*

Доказательство. По теореме 1 множество $\mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,F,u_0)$ непусто. Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,F,u_0)$ и $\delta > 0$. Выбираем $y(t) \equiv 0$, $\xi(t) \equiv \delta$, $\rho(\cdot) = k(\cdot)$, $\eta(t) = l(t) + k(t)$. Тогда очевидно, что $G(t,x) = H(t,x) = F(t,x)$ для всех $(t,x) \in W$, и по теореме 2 получаем искомое решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,v_0)$. $\square$

Следствие 3. *Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ является строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$, т.е. удовлетворяет условию 2 с некоторыми $\delta \in (0,1)$, $l(\cdot) \in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$, $m(t) = \int_{t_0}^{t} l(s)\,ds$, $\eta(t) \doteq (l(t)+1)\delta$ и $\widetilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$. Пусть $\alpha \doteq \frac{\delta}{3}e^{-m(t_1)}$. Тогда для любых $u_0 \in B_\alpha(\widehat{x}_0)$, $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ и решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\,G,u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,v_0)$ такое, что $\|u(\cdot)-v(\cdot)\|_C < \delta$.*

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Пусть заданы многозначное отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ и дифференциальное включение

$$x' \in F(t,x), \qquad t \in T. \tag{6.1}$$

Считаем, что множество решений $\mathcal{R}_T(F,C_0)$ задачи Коши дифференциального включения непусто. (Это можно гарантировать, например, потребовав выполнения условий теорем существования и продолжимости решений задачи Коши для дифференциального включения.)

Зафиксируем некоторое решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$ дифференциального включения (6.1).

Приведем частные случаи определения измеримо-псевдолипшицева (и строгого измеримо-псевдолипшицева) отображения F в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$, т.е. когда отображение F удовлетворяет условию 1 (или условию 2) при $y(t) = \widehat{x}(t)$.

Условие 3. Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ таково, что существует решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$. Пусть существуют число $\delta > 0$, функции $l(\cdot) \in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$ и $\eta(t) \doteq (l(t)+1)\delta$,

$t \in T$, а также множество $W \doteq \{(t,x) \in T \times E \mid \|x - \widehat{x}(t)\| \le \delta,\ t \in T\}$ такие, что выполнены три условия:

1) непусты множества

$$G(t,x) \doteq F(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + \eta(t)B_1(0)) \qquad \forall (t,x) \in W; \tag{6.2}$$

2) для любой функции $v(\cdot) \in C(T,E)$, у которой $\operatorname{graph} v \subset W$, отображение $t \to G(t, v(t))$ измеримо;

3) для любых точек $(t,x_1),(t,x_2) \in W$ справедливы включения

$$G(t,x_1) \subset F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \tag{6.3}$$

При выполнении условия 3 отображение F называется *измеримо-псевдолипшицевым в окрестности решения* $\widehat{x}(\cdot)$.

Условие 4. Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ измеримо-псевдолипшицево в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$ (т.е. удовлетворяет условию 3). Пусть определены функция $\widetilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$, $t \in T$, и множества

$$\widetilde{G}(t,x) \doteq F(t,x) \cap \bigl(\widehat{x}'(t) + \widetilde{\eta}(t)B_1(0)\bigr) \qquad \forall (t,x) \in W. \tag{6.4}$$

Пусть дополнительно выполнены условия:

2′) для любой функции $v(\cdot) \in C(T,E)$, у которой $\operatorname{graph} v \subset W$, отображение $t \to \widetilde{G}(t, v(t))$ измеримо;

3′) для любых $(t,x_1),(t,x_2) \in W$ справедливы включения

$$\widetilde{G}(t,x_1) \subset F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \tag{6.5}$$

При выполнении условия 4 отображение F называется *строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности решения* $\widehat{x}(\cdot)$.

Условие 5. Допустим, что отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$ удовлетворяет условию 3. Допустим также, что отображение $G\colon W \to \mathcal{P}(E)$, определяемое формулой (6.2), удовлетворяет равенству

$$G(t,x) = \operatorname{co} G(t,x) \qquad \forall (t,x) \in W. \tag{6.6}$$

Следуя работам [18, 11], напомним понятия верхней (или контингентной) и нижней производных многозначного отображения Q.

Верхняя производная $D_{\mathrm{U}}Q(z_0)\colon E \to \mathcal{F}(E)$ *отображения* $Q\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *в точке* $z_0 \doteq (x_0,y_0) \in \overline{\operatorname{graph} Q}$ *для любого направления* $u \in E$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{U}}Q(z_0)(u) &= \limsup_{\substack{\lambda\to 0\\ x\to u}} \lambda^{-1}(Q(x_0+\lambda x) - y_0) \doteq \\ &\doteq \bigcap_{\varepsilon>0} \ \bigcup_{\substack{\lambda\in(0,\varepsilon)\\ x\colon \|x-u\|<\varepsilon}} \bigl[\lambda^{-1}(Q(x_0+\lambda x) - y_0) + \overline{B_\varepsilon(0)}\,\bigr]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Нижняя производная $D_{\mathrm{L}}Q(z_0)\colon E \to \mathcal{F}(E)$ *отображения* $Q\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *в точке* $z_0 \doteq (x_0,y_0) \in \overline{\operatorname{graph} Q}$ *для любого направления* $u \in X$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{L}}Q(z_0)(u) &= \liminf_{\lambda\to 0}\Bigl(\limsup_{x\to u} \lambda^{-1}(Q(x_0+\lambda x) - y_0)\Bigr) \doteq \\ &\doteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\lambda\in(0,\delta)} \bigcup_{x\in\overline{B_\varepsilon(u)}} \bigl[\lambda^{-1}(Q(x_0+\lambda x) - y_0) + \overline{B_\varepsilon(0)}\,\bigr]. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Пусть заданы отображение $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ и решение $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0)$. Тогда при каждом фиксированном $t\in T$ определим отображение $F_t\colon E\to\mathcal{F}(E)$, где $F_t(x)\doteq F(t,x)$, и для него рассмотрим определенные выше верхнюю $D_{\mathrm{U}}F_t$ и нижнюю $D_{\mathrm{L}}F_t$ многозначные производные в точке $(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))\in E\times E$ графика $\operatorname{graph}F_t\doteq\{(x,y)\in E\times E\mid y\in F(t,x)\}$ по направлению $u\in E$. Так как в дальнейшем считаем, что решение $\widehat{x}(\cdot)$ зафиксировано, то удобно эти производные переобозначить

$$F'_{\mathrm{U}}(t,u)\doteq D_{\mathrm{U}}F_t(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))(u), \tag{6.9}$$

$$F'_{\mathrm{L}}(t,u)\doteq D_{\mathrm{L}}F_t(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))(u). \tag{6.10}$$

Тогда по аналогии с введенными выше обозначениями $\mathcal{R}_T(F,x_0)$ для множества решений включения (6.1) символами $\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{U}},u_0)$ и $\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0)$ будем обозначать множества всех решений задач Коши соответствующих дифференциальных включений

$$u'(t)\in F'_{\mathrm{U}}(t,u(t)),\qquad t\in T\doteq[t_0,t_1], \tag{6.11}$$

$$u'(t)\in F'_{\mathrm{L}}(t,u(t)),\qquad t\in T, \tag{6.12}$$

с начальным условием $u(t_0)=u_0$. Включения (6.11), (6.12) называют *дифференциальными включениями в вариациях* относительно начального дифференциального включения (6.1) и его решения $\widehat{x}(\cdot)$.

Аналогично если для дифференциального включения (6.1) выполнено условие 3, то при любом фиксированном $t\in T$ и любом $M\in\{\mathrm{L},\mathrm{U}\}$ для отображений $x\to G(t,x)\doteq G_t(x)$ и $x\to\overline{\mathrm{co}}\,G(t,x)\doteq\overline{\mathrm{co}}\,G_t(x)$ (где $G(t,x)$ определяется по $F(t,x)$ в (6.2)) обозначим их M-производные в точке $(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))$ графика $\operatorname{graph}G_t(\cdot)\subset\operatorname{graph}\overline{\mathrm{co}}\,G_t(\cdot)$ по направлению $u\in E$ через $G'_M(t,u)$ и $CG'_M(t,u)$. Таким образом,

$$G'_M(t,u)\doteq D_MG_t(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))(u), \tag{6.13}$$

$$CG'_M(t,u)\doteq D_M\,\overline{\mathrm{co}}\,G_t(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))(u), \tag{6.14}$$

$$CF'_M(t,u)\doteq D_M\,\overline{\mathrm{co}}\,F_t(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))(u). \tag{6.15}$$

Отметим, что в силу принципа локализации производной (см. [11]) справедливы соотношения

$$F'_M(t,u)=G'_M(t,u)\subset CG'_M(t,u)\subset CF'_M(t,u),\qquad t\in T,\quad u\in E,\quad M\in\{\mathrm{L},\mathrm{U}\}.$$

Мы хотим исследовать свойства производной множества решений задачи Коши дифференциального включения (6.1) по начальным данным.

Для этого рассмотрим также верхнюю и нижнюю производные отображения $x\to\mathcal{R}_T(F,x)$, т.е. отображения вида

$$\mathcal{R}_T(F,\cdot)\colon\ E\to\mathcal{P}(\mathrm{AC}(T,E)),$$

в точке его графика $(\widehat{x}_0,\widehat{x}(\cdot))\in E\times\mathrm{AC}(T,E)$ по направлению $u\in E$. Обозначая эти производные через $D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u)$ и $D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{L}}(u)$, получаем

$$D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u)\doteq\limsup_{\substack{\lambda\to0\\ x\to u}}\frac{\mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0+\lambda x)-\widehat{x}(\cdot)}{\lambda}, \tag{6.16}$$

$$D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{L}}(u)\doteq\liminf_{\lambda\to0}\biggl(\limsup_{x\to u}\frac{\mathcal{R}_T(F,\widehat{x}_0+\lambda x)-\widehat{x}(\cdot)}{\lambda}\biggr). \tag{6.17}$$

Верхний и нижний пределы в (6.16), (6.17) нужно понимать как пределы многозначных отображений со значениями, принадлежащими пространству $Y \doteq \mathrm{AC}(T,E)$.

В тоже время отображение $x \to \mathcal{R}_T(F,x)$ можно понимать как отображение, значениями которого являются подмножества пространства непрерывных функций $C(T,E)$, т.е. отображение вида

$$\mathcal{R}_T(F,\cdot)\colon\ E \to \mathcal{P}(C(T,E)).$$

В этом случае верхняя и нижняя производные отображения $x \to \mathcal{R}_T(F,x)$ в точке его графика $(\widehat{x}_0, \widehat{x}(\cdot))$ по направлению $u \in E$ вычисляются по тем же формулам (6.16), (6.17) при условии, что понятия верхнего и нижнего пределов понимаются в более широком смысле — в смысле пространства $Y \doteq C(T,E)$. При этом соответствующие производные будем обозначать через $D_{\mathrm{U}}^{C}(u)$ и $D_{\mathrm{L}}^{C}(u)$.

Теорема 3. *Пусть отображение $F\colon T\times E \to \mathcal{F}(E)$ измеримо-псевдолипшицево в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F,C_0)$ (т.е. выполнено условие 3), а F'_{L} определено в* (6.10). *Тогда для любого $u_0 \in E$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T,E)$, справедливо включение $u(\cdot) \in D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{AC}}(u_0)$. Кратко это можно записать так*:

$$\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0) \cap (E \times L_\infty(T,E)) \subset D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{AC}}(u_0). \tag{6.18}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T,E)$ и $u_0 \in E$. В силу принципа локализации производной для отображений $G(t,x)$ из (6.2) и $G'_{\mathrm{L}}(t,u)$ из (6.13) получаем, что $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(G'_{\mathrm{L}},u_0)$, т.е.

$$u'(t) \in G'_{\mathrm{L}}(t,u(t)), \quad t \in [t_0,t_1], \qquad u(t_0)=u_0.$$

Кроме того, так как $u'(\cdot) \in L_\infty(T,E)$, существует число $\vartheta > 0$ такое, что $\|u'(t)\| \le \vartheta$ при п.в. $t \in T$.

Выберем произвольные числа $\beta \in (0,1)$ и $\alpha > 0$ такие, чтобы выполнялись неравенства $2\alpha(1+2\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}}(1+m(t_1))) \le \delta e^{-m(t_1)-1}$ и $2\vartheta\alpha \le \delta$, где $m(t) = \int_{t_0}^{t} l(\tau)\,d\tau$, $\delta > 0$ и $l(\cdot)$ из условия 3. Тогда для всех $\lambda \in (0,\alpha)$ оценим расстояние

$$\varrho\big(\widehat{x}'(t)+\lambda u'(t), F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u(t))\big) = \lambda\varrho\left(u'(t), \frac{F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u(t))-\widehat{x}'(t)}{\lambda}\right) \equiv \lambda\rho(t,\lambda).$$

Из включения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0)$ следует, что при п.в. $t \in [t_0,t_1]$ значения функции $\rho(t,\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \to +0$. Кроме того, функции $t \to \rho(t,\lambda)$ измеримы и равномерно ограничены по норме суммируемой по Лебегу функцией. Покажем последнее. В силу очевидного неравенства $\varrho(x,B) \le \varrho(x,A) + h^+(A,B)$, верного для всех $x \in E$, получаем

$$\begin{aligned}\rho(t,\lambda) &\le \|u'(t)\| + \varrho\left(0, \frac{F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u(t))-\widehat{x}'(t)}{\lambda}\right) = \|u'(t)\| + \frac{1}{\lambda}\varrho\big(\widehat{x}'(t), F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u(t))\big) \le \\ &\le \|u'(t)\| + \frac{1}{\lambda}\varrho\big(\widehat{x}'(t), G(t,\widehat{x}(t))\big) + \frac{1}{\lambda}h^+\big(G(t,\widehat{x}(t)), F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u(t))\big) \le \\ &\le \|u'(t)\| + l(t)\|u(t)\|.\end{aligned}$$

Итак, суммируемая мажоранта получена. При этом $\int_{t_0}^{t_1} \rho(t,\lambda)\,dt \le (1+m(t_1))\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}}$. По теореме Лебега (см., например, [19]) отсюда следует

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(t,\lambda)\,dt = 0. \tag{6.19}$$

Пусть произвольная точка $v \in E$ такая, что $\|u_0 - v\| \le 1$. В силу выбора числа α при любом $\lambda \in (0, \alpha)$ для функций вида

$$\xi_{\lambda,\beta}(t) \doteq e^{m(t)+\beta} \left(\lambda\|v - u_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-m(s)} \lambda\rho(s,\lambda)\, ds\, (1+\beta) \right), \qquad t \in T, \tag{6.20}$$

$$\eta_{\lambda,\beta}(t) \doteq l(t)\xi_{\lambda,\beta}(t) + \lambda\rho(t,\lambda)(1+\beta), \qquad t \in T, \tag{6.21}$$

получаем оценки

$$\xi_\lambda(t) < \frac{\delta}{2}, \qquad \eta_\lambda(t) < (1 + l(t))\delta \qquad \forall t \in T, \tag{6.22}$$

причем в силу формул (6.20), (6.21) найдется число $A > 0$ такое, что при всех $\lambda \in (0, \alpha)$

$$\max\left\{ \xi_\lambda(t_0),\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \eta_\lambda(s)\, ds \right\} \le \lambda A \left(\|v - u_0\| + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(s,\lambda)\, ds \right). \tag{6.23}$$

Таким образом, выполнены необходимые оценки (6.22) измеримо-псевдолипшицевости отображения F в окрестности функции уклонения $y_\lambda(\cdot) \doteq \widehat{x}(\cdot) + \lambda u(\cdot)$, в силу которых по теореме 1 для любых $\lambda \in (0, \alpha)$ и $v \in B_\alpha(u_0)$ существует решение $x_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0 + \lambda v)$ такое, что

$$\|x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot) - \lambda u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} \le 2\lambda A \left(\|v - u_0\| + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(s,\lambda)\, ds \right).$$

Отсюда при условии, что $v \to u_0$, $\lambda \to +0$, в силу равенства (6.19) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_\varepsilon \in (0, \alpha]$ такое, что для всех $\lambda \in (0, \alpha_\varepsilon)$ и $v \in B_{\alpha_\varepsilon}(u_0)$

$$u(\cdot) \in \frac{x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)}{\lambda} + \varepsilon B_1^{\mathrm{AC}}(0) \subset \frac{\mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0 + \lambda v) - \widehat{x}(\cdot)}{\lambda} + \varepsilon B_1^{\mathrm{AC}}(0). \tag{6.24}$$

В итоге, переходя к пределу по $\lambda \to +0$ и $v \to u_0$, получаем, что $u(\cdot) \in D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{AC}}(u_0)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4. *Пусть заданное отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с суммируемой константой $l(\cdot)$. Пусть задано решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Тогда справедливо включение*

$$\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}}, u_0) \subset D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{AC}}(u_0) \qquad \forall u_0 \in E. \tag{6.25}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, отличие лишь в том, что доказательство следствия проводится для дифференциального включения, в правой части которого стоит липшицево по x отображение F, и поэтому в заключительной части доказательства нужно использовать не общую теорему 1, а ее более простую версию для липшицева по x отображения F (см. замечание 1). В результате этого для доказательства существования решения $x_\lambda(\cdot)$ не требуется накладывать условие существенной ограниченности на функцию $\|u'(\cdot)\|$, достаточна ее суммируемость по Лебегу, которая очевидно следует из абсолютной непрерывности функции $u(\cdot)$.

Некоторое усиление теоремы 3 получаем с помощью теоремы 2 об овыпуклении.

Теорема 4. *Пусть отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ строго измеримо-псевдолипшицево около решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ (т.е. выполнено условие 4). Пусть $CG'_{\mathrm{L}}(t,u)$ определено в (6.14). Тогда для любого $u_0 \in E$ и любого решения*

$$u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_{\mathrm{L}}, u_0), \tag{6.26}$$

у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, *справедливо включение* $u(\cdot) \in D_{\mathrm{L}}^C(u_0)$. *Кратко это можно записать так*:

$$\mathcal{R}_T(CG'_{\mathrm{L}}, u_0) \cap (E \times L_\infty(T, E)) \subset D_{\mathrm{L}}^C(u_0). \tag{6.27}$$

Доказательство. Фиксируем точку $u_0 \in E$ и произвольное решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_{\mathrm{L}}, u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$. Пусть выбраны произвольные $v \in E$, $\|u_0 - v\| \le 1$, и $\beta > 0$. Пусть число $\vartheta > 0$ такое, что $\|u'(t)\| \le \vartheta$ при п.в. $t \in T$. Пусть $\delta > 0$, $l(\cdot)$, $G(t, x)$, $\widetilde{G}(t, x)$ из условия 4 и $m(t) \doteq \int_{t_0}^t l(\tau)\, d\tau$. Пусть число $\alpha > 0$ такое, что $\alpha e^{m(t_1)+\beta}\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} \le \delta$ и $\alpha\vartheta \le \delta$. Определим функцию

$$\rho(t, \lambda) \doteq \varrho\biggl(u'(t), \frac{\overline{\mathrm{co}}\, G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t)) - \widehat{x}'(t)}{\lambda}\biggr), \qquad \lambda \in (0, \alpha). \tag{6.28}$$

В силу определения функции $u(\cdot)$ при почти каждом $t \in T$ значения функции $\rho(t, \lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \to 0$. Кроме того, функция $t \to \rho(t, \lambda)$ измерима. Покажем, что эта функция равномерно по $\lambda \in (0, \alpha)$ ограничена суммируемой функцией. Очевидно неравенство

$$\rho(t, \lambda) \le \|u'(t)\| + \lambda^{-1}\varrho\bigl(\widehat{x}'(t), \overline{\mathrm{co}}\, G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t))\bigr).$$

Оценим последнее слагаемое. При любом $\lambda \in (0, \alpha)$ в силу условия 4, определения отображения $G(t, x)$ из (6.2) и неравенства (5.5) получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{x}'(t) &\in G(t, \widehat{x}(t)) \cap \bigl(\widehat{x}'(t) + \lambda\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} B_1(0)\bigr) \subset \\
&\subset \bigl(F(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t)) + l(t)\lambda\|u(t)\|\overline{B_1(0)}\bigr) \cap \bigl(\widehat{x}'(t) + \lambda\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} B_1(0)\bigr) \subset \\
&\subset F(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t)) \cap \bigl(\widehat{x}'(t) + \lambda\|u(\cdot)\|_{\mathrm{AC}}(1 + l(t)) B_1(0)\bigr) + l(t)\lambda\|u(t)\|\overline{B_1(0)} \subset \\
&\subset G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t)) + l(t)\lambda\|u(t)\|\overline{B_1(0)},
\end{aligned}$$

откуда выводим, что $\varrho(\widehat{x}'(t), \overline{\mathrm{co}}\, G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u(t))) \le l(t)\lambda\|u(t)\|$. В итоге имеем суммируемую мажоранту для ρ вида

$$\rho(t, \lambda) \le \|u'(t)\| + l(t)\|u(t)\| \qquad \forall t \in T. \tag{6.29}$$

Отсюда по теореме Лебега получаем равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{t_0}^{t_1} \rho(t, \lambda)\, dt = 0. \tag{6.30}$$

Для каждого $\lambda \in (0, \alpha)$ выбираем начальное отклонение вида $y_\lambda(\cdot) \doteq \widehat{x}(\cdot) + \lambda u(\cdot)$, для которого в силу (6.28) справедлива оценка

$$\varrho(y'_\lambda(t), \overline{\mathrm{co}}\, G(t, y_\lambda(t))) \le \lambda\rho(t, \lambda), \qquad t \in T. \tag{6.31}$$

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3, получаем оценки вида (6.22) и (6.23). Поэтому для любого $\lambda \in (0, \alpha)$ и любого $v \in B_\alpha(u_0)$ при функции уклонения $y(t) \doteq y_\lambda(t)$ по теореме 1 существует решение $u_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\mathrm{co}}\, G, \widehat{x}(t_0) + \lambda v)$ с соответствующей оценкой расстояния до $y_\lambda(\cdot)$. Затем для полученного решения $u_\lambda(\cdot)$ в силу строгой измеримо-псевдолипшицевости F по теореме 2 при $\delta = \lambda^2$ получаем близкое к $u_\lambda(\cdot)$ решение исходного включения. В итоге показали, что существует решение $x_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}(t_0) + \lambda v)$, для которого справедливы неравенства

$$\|x_\lambda(t) - (\widehat{x}(t) + \lambda u(t))\| \le \xi_{\lambda,\beta}(t), \qquad t \in T, \tag{6.32}$$

где

$$\xi_{\lambda,\beta}(t) \doteq \int\limits_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)+\beta}\lambda\rho(s,\lambda)\,ds + \lambda\|u_0 - v\|e^{m(t)+\beta}(1+\beta) + \lambda^2. \tag{6.33}$$

Отсюда и из равенства (6.30) получаем

$$\lim_{\lambda\to 0,\ v\to u_0} \|\lambda^{-1}(x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)) - x(\cdot)\|_C = 0. \tag{6.34}$$

Иначе говоря, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_\varepsilon \in (0,\alpha)$ такое, что для всех λ, v: $\lambda \in (0,\alpha_\varepsilon)$, $\|u_0 - v\| < \alpha_\varepsilon$, справедливо соотношение

$$u(\cdot) \in \lambda^{-1}(x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)) + \varepsilon\overline{B_1^C(0)} \subset \lambda^{-1}\big(\mathcal{R}_T(F, \widehat{x}(t_0) + \lambda v) - \widehat{x}(\cdot)\big) + \varepsilon\overline{B_1^C(0)},$$

что и означает включение $u(\cdot) \in D_{\mathrm{L}}^C(u_0)$. $\square$

Покажем, что в теоремах 3 и 4 направление $u \in E$ удобно выбирать из касательного конуса к множеству начальных значений C_0. Напомним (см. [20, 11]), что *нижний касательный конус к множеству A в точке $a \in \overline{A}$* вычисляется по формуле

$$T_{\mathrm{L}}(A; a) \doteq \Big\{ v \in E \;\Big|\; \lim_{\lambda\to 0} \varrho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0 \Big\}.$$

Следствие 5. *Пусть заданы отображение $F\colon T\times E \to \mathcal{F}(E)$ и решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Пусть выполнено условие 3 (или условие 4). Тогда включение (6.18) (включение (6.27)) означает, что для всякого $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{L}}(C_0, \widehat{x}(t_0))) \cap (E \times L_\infty(T,E))$ (всякого $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{L}}(C_0, \widehat{x}(t_0))) \cap (E \times L_\infty(T,E))$) найдется $\alpha > 0$ такое, что для всех $\lambda \in (0,\alpha)$ существуют решения $x_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ и функции $o(\lambda,\cdot)$ из $\mathrm{AC}(T,E)$ (из $C(T,E)$) такие, что*

$$x_\lambda(t) = \widehat{x}(t) + \lambda u(t) + o(\lambda, t), \qquad t \in T, \tag{6.35}$$

где $\lim_{\lambda\to+0} \lambda^{-1}\|o(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{AC}} = 0$ ($\lim_{\lambda\to+0} \lambda^{-1}\|o(\lambda,\cdot)\|_C = 0$).

Доказательство. Для любого $x \in E$ и $\lambda > 0$ обозначим через $\pi_\lambda(x)$ произвольную точку из множества $C_0 \cap (\varrho(x, C_0) + \lambda^2)\overline{B_1(x)}$. Пусть $u_0 \in T_{\mathrm{L}}(C_0, \widehat{x}(t_0))$ таково, что для заданного в условии $u(\cdot)$ справедливо равенство $u(t_0) = u_0$. Тогда в доказательстве теоремы 3 (теоремы 4) при каждом $\lambda > 0$ уточним $v = v_\lambda$, а именно положим $v_\lambda \doteq \lambda^{-1}(\pi_\lambda(\widehat{x}(t_0) + \lambda u_0) - \widehat{x}(t_0))$. Тогда $x_\lambda(t_0) \doteq \widehat{x}(t_0) + \lambda v_\lambda \in C_0$. В силу очевидного неравенства $\|v_\lambda - u_0\| \le \varrho(u_0, \lambda^{-1}(C_0 - \widehat{x}(t_0))) + \lambda$ и включения $u_0 \in T_{\mathrm{L}}(C_0, \widehat{x}(t_0))$ получаем, что $\|v_\lambda - u_0\|$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$, откуда вытекает включение (6.24) (равенство (6.34)) при $v = v_\lambda$, из которого следует равенство (6.35). $\square$

Замечание 3. Утверждения теорем 3, 4 и следствий 4, 5 обобщают хорошо известные теоремы для дифференциальных уравнений о дифференцировании решений по начальным данным. Последние, как правило, содержат требование о дифференцируемости правой части уравнения по фазовой переменной. Нам же достаточно выполнения локального условия измеримо-псевдолипшицевости правой части включения.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $x'(t) = |x(t)| + x^2(t)$, $t \in [0,1]$, и его решение $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$. В этом случае $F'_{\mathrm{L}}(t,u) = |u|$ и по теореме 3 для каждого $u_0 \in \mathbb{R}$ и каждого $u(\cdot)$ — решения задачи Коши для уравнения $u'(t) = |u(t)|$ при $u(0) = u_0$ для достаточно малых $\lambda > 0$ функция $\lambda u(t)$ с точностью до $o(\lambda, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения $x'(t) = |x(t)| + x^2(t)$ при $x(0) = \lambda u_0$.

Отметим, что даже в случае выполнения условия Липшица на правую часть дифференциального включения не удается расширить класс вариаций $u(\cdot)$, для которых выполнялось бы соотношение (6.25), переходом от решений задачи Коши для включения в вариациях (6.12) к большему множеству решений задачи Коши для включения в вариациях (6.11). Имеет место следующее обратное включение.

Теорема 5. *Пусть* $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ *измеримо по* t *и липшицево по* x *с суммируемой константой* $l(\cdot)$. *Пусть задано решение* $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{R}_T(F,x_0)$, *для которого определены верхние производные* $F'_{\mathrm{U}}(t,u)$ (*см.* (6.9)) *и* $D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u)$ (*см.* (6.16)). *Тогда для любого* $u_0\in E$ *справедливо включение*

$$D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u_0)\subset\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{U}},u_0).$$

Доказательство. Если $u(\cdot)\in D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u_0)$, то существуют последовательности чисел $\lambda_k\to+0$, векторов $u_k\to u_0$ и функций $x_k(\cdot,x_0+\lambda_k u_k)\in\mathcal{R}_T(F,x_0+\lambda_k u_k)$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что $u(\cdot)=\lim_{\lambda_k\to+0}\lambda_k^{-1}(x_k(\cdot,x_0+\lambda_k u_k)-\widehat{x}(\cdot))$, где предел берется в пространстве $\mathrm{AC}(T,E)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k^{-1}(x'_k(t,x_0+\lambda_k u_k)-\widehat{x}'(t))$ сходится к $u'(t)$ при п.в. $t\in T$. В свою очередь, в силу липшицевости по x отображения F получаем

$$\frac{x'_k(t,x_0+\lambda_k u_k)-\widehat{x}'(t)}{\lambda_k}\in\frac{F(t,\widehat{x}(t)+\lambda_k u(t))-\widehat{x}'(t)}{\lambda_k}+l(t)\left\|\frac{x_k(t,x_0+\lambda_k u_k)-\widehat{x}(t)}{\lambda_k}-u(t)\right\|\overline{B_1(0)}.$$

В пределе при $k\to+\infty$ получаем $u'(t)\in F'_{\mathrm{U}}(t,u(t))$, $t\in T$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 6. *Пусть отображение* $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ *измеримо по* t *и липшицево по* x *с суммируемой константой* $l(\cdot)$. *Пусть задано решение* $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{R}_T(F,x_0)$. *Пусть для каждого* $t\in T$ *отображение* $x\to F(t,x)$ *дифференцируемо в точке* $(\widehat{x}(t),\widehat{x}'(t))$ *по любому направлению* $u\in E$ (*в том смысле, что справедливо равенство* $F'_{\mathrm{L}}(t,u)=F'_{\mathrm{U}}(t,u)$). *Тогда для любого* $u_0\in E$ *имеет место равенство*

$$D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{L}}(u_0)=D^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{U}}(u_0)=\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{L}},u_0).$$

7. О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В этом разделе доказана теорема 6, которая уточняет теоремы 1 и 2. В ней доказано существование непрерывных отображений из множества начальных функций-приближений в множество решений дифференциального включения, правда, при дополнительном условии некоторой локальной выпуклости.

Введем обозначение. Для произвольного множества A из пространства $\mathrm{AC}(T,E)$ и для любого $t\in T$ через $A|_t$ будем обозначать множество вида $A|_t\doteq\{x(t)\in E\mid x(\cdot)\in A\}$. Аналогично для всякого множества $W\subset\mathbb{R}^1\times E$ через $W|_t$ будем обозначать множество $W|_t\doteq\{x\in E\mid (t,x)\in W\}$.

Пусть задано многозначное отображение $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$, которое является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности некоторой заданной функции $y(\cdot)\in\mathrm{AC}(T,E)$, т.е. оно удовлетворяет условию 1. По этому условию заданы числа $\beta,\delta\in(0,1)$, функции $\rho(\cdot),l(\cdot)\in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$ такие, что $\varrho(y'(t),F(t,y(t)))\le\rho(t)$ при п.в. $t\in T$, замкнутая область $W\subset T\times E$, отображение $G(t,x)$ по формуле (3.2) и функции $\xi(\cdot)=\xi_\beta(\cdot)$, $m(\cdot)$ и $\eta(\cdot)=\eta_\beta(\cdot)$, которые определены по формулам (4.1) и (4.2). Тогда для всякого $\varepsilon\ge 0$ и отображения $d\colon E\to E$ определим в пространстве $\mathrm{AC}(T,E)$ множество

$$A_\varepsilon(F)\doteq\Big\{z(\cdot)\in\mathrm{AC}(T,E)\;\Big|\;\|d(z(t_0))-z(t_0)\|\le\delta;\ \varrho(z'(t),F(t,z(t)))\le\rho(t),\ t\in T;$$
$$\|z'(t)-y'(t)\|\le\eta_\beta(t)-\rho(t)(1+\beta),\ t\in T;\ \big\{(t,x)\mid t\in T,\ \|x-z(t)\|\le\xi_\beta(t)+\varepsilon\big\}\subset W\Big\}.\quad(7.1)$$

Также определим функции расстояния

$$\rho(t,x,z) \doteq \varrho(z,F(t,x)), \qquad \rho_k(t,x,z) \doteq \rho(t,x,z)(1+\beta\cdot 2^{-k}) \tag{7.2}$$

и отображения

$$R_k\colon W\times E\to\mathcal{F}(E), \qquad R_k(t,x,z) \doteq \overline{(z+\rho_k(t,x,z)B_1(0))\cap F(t,x)}. \tag{7.3}$$

Лемма 3. *Пусть отображение $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности заданной функции $y(\cdot)\in \mathrm{AC}(T,E)$, а $G\colon W\to\mathcal{P}(E)$ определено в* (3.2). *Тогда справедливо равенство*

$$A_\varepsilon(F)=A_\varepsilon(G).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой точки $(t,x)\in W$ и любой точки $z\in E$, удовлетворяющей условиям $\|z-y'(t)\|<\eta_\beta(t)-\rho(t)(1+\beta)$ и $\varrho(z,F(t,x))\le\rho(t)$, справедливо равенство

$$\varrho(z,F(t,x))=\varrho(z,G(t,x)). \tag{7.4}$$

Так как $G(t,x)\subset F(t,x)$, всегда $\varrho(z,F(t,x))\le\varrho(z,G(t,x))$. Докажем обратное неравенство. В силу условий на выбор z для любого числа $\alpha\in(0,\beta)$ существует точка $w_\alpha\in F(t,x)$ такая, что $\|z-w_\alpha\|\le\varrho(z,F(t,x))(1+\alpha)$. Поэтому $\|w_\alpha-y'(t)\|\le\|w_\alpha-z\|+\|z-y'(t)\|<\eta_\beta(t)$, т.е. $w_\alpha\in G(t,x)$ и $\varrho(z,G(t,x))\le\|z-w_\alpha\|\le\varrho(z,F(t,x))(1+\alpha)$. Устремляя α к нулю, получаем равенство (7.4), из которого, в свою очередь, следует требуемое равенство множеств. $\square$

Лемма 4. *Пусть отображение $F\colon T\times E\to\mathcal{F}(E)$ является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности заданной функции $y(\cdot)\in\mathrm{AC}(T,E)$. Пусть отображение $G\colon W\to\mathcal{P}(E)$, определенное в* (3.2), *измеримо по t и справедливо равенство* (*условие локальной выпуклости F*)

$$G(t,x)=\operatorname{co}G(t,x) \qquad \text{при всех}\ \ (t,x)\in W.$$

Тогда на множестве

$$V\doteq\bigl\{(t,x,z)\bigm|(t,x)\in W,\ \varrho(t,x,z)\le\rho(t),\ \|z-y'(t)\|<\eta_\beta(t)-\rho(t)(1+\beta)\bigr\}$$

при любом $k\in\mathbb{N}$ отображение $R_k\colon V\to\mathcal{F}(E)$ из (7.3) *измеримо по t, пн.сн. по (x,z) и выпуклозначно.*

Доказательство. По лемме 3 для любого $(t,x,z)\in V$ имеем равенство (7.4). Так как $\varrho_k(t,x,z)\le\rho(t)(1+\beta)$, имеем $z+\varrho_k(t,x,z)B_1(0)\subset y'(t)+\eta_\beta(t)B_1(0)$, откуда следует, что $(z+\varrho_k(t,x,z)B_1(0))\cap F(t,x)\subset(y'(t)+\eta_\beta(t)B_1(0))\cap F(t,x)=G(t,x)$. В итоге получаем равенство

$$R_k(t,x,z)=\overline{(z+\varrho_k(t,x,z)B_1(0))\cap G(t,x)}. \tag{7.5}$$

Отсюда и из условия леммы следует, что отображения R_k измеримы по t и выпуклозначны. Докажем, что отображения $(x,z)\to R_k(t,x,z)$ пн.сн. на $V|_t$. Для любых $(t,x_1,z_1),(t,x_2,z_2)\in V$ в силу псевдолипшицевости F имеем

$$\begin{aligned}\varrho(z_1,F(t,x_1))=\varrho(z_1,G(t,x_1))&\ge\varrho\bigl(z_1,F(t,x_2)+l(t)\|x_1-x_2\|B_1(0)\bigr)\ge\\ &\ge\varrho\bigl(z_2,F(t,x_2)+l(t)\|x_1-x_2\|B_1(0)\bigr)-\|z_1-z_2\|\ge\\ &\ge\varrho(z_2,F(t,x_2))-l(t)\|x_1-x_2\|-\|z_1-z_2\|,\end{aligned}$$

откуда получаем

$$|\rho(t,x_1,z_1)-\rho(t,x_2,z_2)|\le l(t)\|x_1-x_2\|+\|z_1-z_2\|.$$

Итак, доказали, что функция $(x,z)\to\rho_k(t,x,z)$ непрерывна. В лемме 1 доказано, что для псевдолипшицева отображения F отображение $x\to G(t,x)$ будет пн.сн. Кроме того, пересечение пн.сн. отображения с непрерывным (с открытыми значениями) отображением также будет пн.сн., а, в свою очередь, замыкание значений пн.сн. отображения приводит опять к пн.сн. отображению. Таким образом, отображение $(x,z)\to R_k(t,x,z)$ будет пн.сн. на $V|_t$. $\square$

Лемма 5. *Пусть функция $f\colon T\times E\times E\to E$ измерима по первому аргументу $t\in T$ и непрерывна по $(x,z)\in E\times E$. Пусть последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$, $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходятся в $L_1(T,E)$ к $x_0(\cdot)$ и $z_0(\cdot)$ соответственно. Определим последовательность функций*

$$u_i(t)\doteq f(t,x_i(t),z_i(t))-z_i(t),\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Пусть существует функция $k(\cdot)\in L_1(T,\mathbb{R}^1_+)$, для которой при всех $i\in\mathbb{N}$, $t\in T$ справедливы неравенства $\|u_i(t)\|\le k(t)$. Тогда последовательность функций $\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится в $L_1(T,E)$ к функции $u_0(\cdot)$, где $u_0(t)\doteq f(t,x_0(t),z_0(t))-z_0(t)$, $t\in T$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют число $\varepsilon_0>0$ и подпоследовательности $\{x_{i_m}(\cdot)\}_{m=1}^\infty$, $\{z_{i_m}(\cdot)\}_{m=1}^\infty$ такие, что справедливо неравенство $\|u_{i_m}(\cdot)-u_0(\cdot)\|_{L_1}\ge\varepsilon_0$ при любом $m\in\mathbb{N}$. В силу сходимости в $L_1(T,E)$ заданных последовательностей функций без ограничения общности можно считать, что последовательности значений $\{x_{i_m}(t)\}$ и $\{z_{i_m}(t)\}$ сходятся при почти каждом $t\in T$. Из непрерывности отображения $(x,z)\to f(t,x,z)$ следует, что и последовательность значений $\{u_{i_m}(t)\}$ сходится к $u_0(t)$ при почти каждом $t\in T$. Так как для этой последовательности функций существует суммируемая мажоранта $k(\cdot)$, то в силу теоремы Лебега получаем, что последовательность функций $u_{i_m}(\cdot)$ сходится к $u_0(\cdot)$ в $L_1(T,E)$, а это противоречит допущению. $\square$

Теорема 6. *Пусть отображение $F\colon W\to\mathcal{F}(E)$ измеримо-псевдолипшицево в окрестности функции $y(\cdot)\in\mathrm{AC}(t,E)$, причем отображение $G\colon W\to\mathcal{P}(E)$, определенное в (3.2), измеримо по t и справедливо равенство $G(t,x)=\operatorname{co}G(t,x)$ при всех $(t,x)\in W$. Пусть множество $A_0(F)$ (определяемое по формуле (7.1) при $\varepsilon=0$) непусто, функция $d\colon A_0(F)|_{t_0}\to E$ непрерывна, а множество $C_0\subset E$ таково, что справедливо включение $C_0\supset d(A_0(F)|_{t_0})$. Тогда существует непрерывное отображение $r\colon A_0(F)\to\mathcal{R}_T(F,C_0)$, причем для всякого $z(\cdot)\in A_0(F)$ справедливы оценки*

$$\|z(t)-r(z(\cdot))(t)\|\le\xi_\beta(t),\qquad \left\|z'(t)-\frac{d}{dt}r(z(\cdot))(t)\right\|\le\eta_\beta(t),\qquad t\in T,\tag{7.6}$$

где $\xi_\beta(t)$ и $\eta_\beta(t)$ определены в (4.1) и (4.2).

Доказательство этой теоремы является уточнением доказательства теоремы 1. В силу леммы 4 каждое отображение R_k измеримо по t, полунепрерывно снизу по (x,z) и выпуклозначно. Поэтому (см., например, [21]) у него существует ветвь $f_k(t,x,z)$, удовлетворяющая условию Каратеодори, т.е. f_k измерима по t и непрерывна по (x,z) на V. Как и прежде, для всякого фиксированного $z(\cdot)\in A_0(F)$ определим последовательность функций $\{x_k(\cdot),v_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ вида

$$x_0(t)\doteq z(t),\qquad x_{k+1}(t)=d(x_0(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t}v_k(s)\,ds,\qquad t\in T,\tag{7.7}$$

где

$$v_k(t)\doteq f_k(t,x_k(t),x'_k(t)).\tag{7.8}$$

Следуя доказательству теоремы 1, получаем, что функции $v_k(t)$ измеримы и суммируемы на отрезке T, причем функции $x_k(\cdot)$ и $v_k(\cdot)$ удовлетворяют не зависящим от $z(\cdot)$ оценкам и последовательность $x_k(\cdot)$ сходится к решению дифференциального включения, которое мы обозначим через $r(z(\cdot))(\cdot)$, чтобы подчеркнуть зависимость этого решения от начального приближения $z(\cdot)$. Осталось показать непрерывность отображения r.

Покажем, что каждая функция $x_k(\cdot)$ в (7.7) непрерывно зависит от $z(\cdot)$ как отображение из $A_0(F)$ в $\mathrm{AC}(T,E)$. Для этого достаточно показать, что при каждом $k\in\mathbb{N}$ функция $x_k(\cdot)$ непрерывно зависит от $x_{k-1}(\cdot)$ как отображение из $\mathrm{AC}(T,E)$ в $\mathrm{AC}(T,E)$.

Сначала покажем это при $k=1$. Пусть произвольная последовательность $\{y_i(\cdot)\}_{i=1}^{+\infty}\subset$ $\subset A_0(F)$ сходится в $\mathrm{AC}(T,E)$ к функции $y_0(\cdot)$. Введем обозначение $z_i(\cdot)\doteq y_i'(\cdot)$. Тогда в силу (7.7) для каждого $i\in\mathbb{N}$ получаем на первом шаге равенство

$$x_1^i(t)=d(y_i(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t} f_1(s,y_i(s),z_i(s))\,ds.$$

Так как по построению справедливо неравенство $\|f_1(t,y_i(t),z_i(t))-z_i(t)\|\le\rho(t)(1+\beta)$ при п.в. $t\in T$, то, применяя лемму 5 и используя непрерывность функции $d(x)$, получаем, что $\|x_1^i(\cdot)-x_1^0(\cdot)\|_{\mathrm{AC}}\to 0$ при $i\to+\infty$.

При произвольном $k\in\mathbb{N}$ обоснование непрерывной зависимости x_{k+1} от x_k получается аналогично, нужно лишь в качестве мажоранты разности вместо $\rho(t)(1+\beta)$ взять функцию $l(t)\xi_\beta(t)$.

В силу наличия равномерных оценок (4.12) (не зависящих от выбора $z(\cdot)$) получаем, что каждая последовательность $x_k(\cdot)$ сходится абсолютно и равномерно по $z(\cdot)$. Поэтому предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных по $z(\cdot)$ отображений будет также непрерывным по $z(\cdot)$.

Аналогично доказательству теоремы 1 в пределе получаем нужные оценки (7.6). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1967. №3. С. 16–26.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. *Ważewski T.* Sur une condition équivalente à l'équation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1961. V. 9. P. 865–867.
4. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Дифференцирование многозначных отображений и свойства решений дифференциальных включений // ДАН СССР. 1986. Т. 288, №2. С. 296–301.
5. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, №6. С. 944–954.
6. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, №8. С. 1351–1365.
7. *Polovinkin E.S.* The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschitzean differential inclusions // Modeling, estimation and control of systems with uncertainty / Ed. by G.B. Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 349–360. (Prog. Syst. Control Theory; V. 10).
8. *Polovinkin E.S.* Necessary conditions for optimization problems with differential inclusions // Set-valued analysis and differential inclusions / Ed. by A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 157–170. (Prog. Syst. Control Theory; V. 16).
9. *Половинкин Е.С.* Необходимые условия в задаче оптимизации с дифференциальным включением // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 387–400.
10. *Половинкин Е.С.* Теорема существования решений дифференциального включения с псевдолипшицевой правой частью // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, №9. С. 571–578.

11. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Тр. МФТИ. 2012. Т. 4, №4. С. 141–154.
12. *Половинкин Е.С.* О вычислении полярного конуса к множеству решений дифференциального включения // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 178–187.
13. *Polovinkin E.* On differentiation of set-valued functions and differential inclusions // Constructive nonsmooth analysis and related topics: Abstr. Int. Conf., St. Petersburg, 2012. St. Petersburg: St. Petersburg Univ., 2012. P. 134–137.
14. *Aubin J.-P.* Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. Oper. Res. 1984. V. 9. P. 87–111.
15. *Castaing C.* Sur les multi-applications mesurables // Rev. Franç. Inform. Rech. Opér. 1967. V. 1, N 1. P. 91–126.
16. *Pliś A.* Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1963. V. 11. P. 369–370.
17. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. P. 1–12.
18. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990.
19. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд. М.: Физматлит, 2007.
21. *Fryszkowski A.* Carathéodory type selectors of set-valued maps of two variables // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1977. V. 25. P. 41–46.