УДК 517.946

Н. М. Шагидуллин

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

В работе [1] рассмотрена задача со смещением для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. В настоящей статье будет рассмотрен аналог этой задачи для уравнения смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)\, u_y = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

которое можно считать в некотором смысле обобщением уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Пусть Ω — область, ограниченная при $y > 0$ простой дугой Ляпунова Γ с концами в точках $A(0,\ 0)$ и $B(1,\ 0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC: $x - 2\sqrt{-y} = 0$, BC: $x + 2\sqrt{-y} = 1$ уравнения (1); кривая Γ оканчивается малыми дугами нормальной кривой $4y = x(1-x)$ уравнения (1); $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

З а д а ч а 1. В области Ω найти функцию $u(x,\ y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u(x,\ y)$ — решение уравнения (1) в Ω_1 и Ω_2;

2) $\partial^n u/\partial y^n \in C(\overline{\Omega}_1)$; $\sqrt{y}\,\partial^{n+1} u/\partial y^{n+1}$, $\partial^{n+1} u/\partial x \partial y^n \in C(\overline{\Omega}_1 \cup AB)$, причем их граничные значения на AB принадлежат классу H^*;

3) $$\partial^n u/\partial y^n|_\Gamma = \varphi(\rho) \quad \forall \rho \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\gamma(x) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} u\left(\frac{x}{2},\ -\frac{x^2}{16}\right) + \theta(x) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} u\left(\frac{x+1}{2},\ -\frac{(1-x)^2}{16}\right) = \delta(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где заданные функции $\delta(x)$, $\gamma(x)$, $\theta(x) \in H[0,\ 1]$,

$$\varphi(\rho) = y\bar{\varphi}(\rho), \quad \bar{\varphi}(\rho) = H(\overline{\Gamma});$$

4) на переходной линии AB удовлетворяется условие склеивания

$$\lim_{y \to -0} |y|^{-n+1/2} \{u_y - A_n(x,\ y,\ \tau)\} = (-1)^n h \lim_{y \to +0} \sqrt{y}\,\partial^{n+1} u/\partial y^{n+1} = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $$A_n[x,\ y,\ \tau] = \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k (2n-k-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} (-y)^{(k-1)/2} [\tau^{(k+1)}(x - 2\sqrt{-y}) + (-1)^{k+1} \tau^{(k+1)}(x + 2\sqrt{-y})],$$

$$\varepsilon_n = n!/2\,(2n)!, \quad h > 0,$$

при этом $\tau(x) = u(x,\ 0)$ и $\nu(x)$ — не заданные функции, $\nu(x) \in H^*$;

5) $\tau^{(k)}(0)=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1.$

Как показано Крикуновым Ю. М., из второго условия следует, что $\tau(x)\in C^{2n}[0,\ 1]$, $\tau^{(2n+1)}(x)\in H^*$ на $[0,\ 1]$.

Решение задачи 1 в Ω_2 однозначно выражается через функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующим образом [2]:

$$u(x,\ y)=\varepsilon_n\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k(2n-k)!}{k!\,(n-k)!}(-y)^{k/2}\left[\tau^{(k)}(x-2\sqrt{-y})+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\tau^{(k)}(x+2\sqrt{-y})\right]-\varepsilon_n^{-1}(n!)^{-1}(-y)^{n+1/2}\times$$

$$\times\int_0^1\nu\left[x-2\sqrt{-y}\,(1-2t)\right](t-t^2)^n\,dt. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$u\left(\frac{x}{2},\ -\frac{x^2}{16}\right)=\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{7}$$

$$u\left(\frac{x+1}{2},\ -\frac{(1-x)^2}{16}\right)=\psi_1\left(\frac{x+1}{2}\right),\ x\in[0,\ 1]. \tag{8}$$

Как показано в [2], подстановка решения (6) в (7) приводит к следующему соотношению на AB:

$$(-1)^n\varepsilon_n x^n\tau^{(2n+1)}(x)-4^{-(2n+1)}\varepsilon_n^{-1}x^n\nu(x)=2^{-(n+1)}\psi^{(n+1)}(x/2). \tag{9}$$

Аналогично из (6) и (8) получим

$$\varepsilon_n(1-x)^n\tau^{(2n+1)}(x)+(-1)^n4^{-(2n+1)}\varepsilon_n^{-1}(1-x)^n\nu(x)=$$

$$=2^{-(n+1)}\psi_1^{(n+1)}((x+1)/2). \tag{10}$$

Условие (3), учитывая (7) и (8), перепишем в виде:

$$2^{-(n+1)}\left[\gamma(x)\psi^{(n+1)}(x/2)+\theta(x)\psi_1^{(n+1)}((x+1)/2)\right]=\delta(x). \tag{11}$$

Из (11), (9), (10) получим основное соотношение

$$\varepsilon_n\left[(-1)^n\gamma(x)x^n+\theta(x)(1-x)^n\right]\tau^{(2n+1)}(x)=$$

$$=4^{-(2n+1)}\varepsilon_n^{-1}\left[\gamma(x)x^n-(-1)^n\theta(x)(1-x)^n\right]\nu(x)+\delta(x),\quad 0<x<1. \tag{12}$$

Согласно [2] любое решение уравнения (1) в области Ω_1 может быть представлено в виде

$$u(x,y)=(z-\bar{z})^{2n+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\right)^n\left\{\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z-\bar{z}}\right\}, \tag{13}$$

где $z=x+iy_1$, $y_1=2\sqrt{y}$, $f(z)$ — голоморфная функция, которая определяется по $u(x,\ y)$ с точностью до полиномиального слагаемого. Для функции (13) выполняются соотношения [2], [3]:

$$\partial^n u/\partial y^n = (-1)^n 2^{2n+1} n! \operatorname{Re} f^{(2n)}(z), \tag{14}$$

$$(-1)^n \tau^{(k)}(x) = 2(2n)! \operatorname{Re}[\lim_{z\to x} f^{(k)}(z)],\ 0 < x < 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2n+1. \tag{15}$$

Введем теперь, как в [4], гармоническую функцию

$$p(x, y_1) = (-1)^n 2^{2n+1} n! \operatorname{Re} f^{(2n)}(z) = \partial^n u(x, y)/\partial y^n. \tag{16}$$

Из (16) непосредственно следует, что

$$\partial p(x, y_1)/\partial y_1 = \sqrt{y}\, \partial^{n+1} u/\partial y^{n+1}, \tag{17}$$

а с учетом (15)

$$\partial p(x, 0)/\partial x = 2^{2n+1} \varepsilon_n \tau^{(2n+1)}(x), \quad 0 < x < 1. \tag{18}$$

Обозначим через D_1 и Γ_1 образы области Ω_1 и кривой Γ на плоскости (x, y_1). Очевидно, что Γ_1 — простая кривая Ляпунова, оканчивающаяся малыми дугами полуокружности $(x-1/2)^2 + y_1^2 = 1/4$, $y > 0$, $\partial D_1 = \Gamma_1 \cup AB$. Из (16) и (2) имеем

$$p|_{\Gamma_1} = \varphi_1(t), \tag{19}$$

где $t \in \Gamma_1$, $\varphi_1(t) = \varphi[\rho(t)]$. Из (17) и (4) следует, что

$$\partial p(x, 0)/\partial y_1 = (-1)^n h^{-1} \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{20}$$

Теорема единственности. *Задача 1 при нулевых граничных условиях* (2), (3) ($\varphi(\rho) = \delta(x) \equiv 0$) *и в предположении, что*

$$x^n \gamma(x) - (-1)^n (1-x)^n \theta(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1], \tag{21}$$

имеет единственное решение $u(x, y) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи 1. Из (15) и (16) получим

$$p(x, 0) = (2^{2n} n!/(2n)!)\, \tau^{(2n)}(x),\ 0 < x < 1. \tag{22}$$

Так как функция $p(x, y_1)$ удовлетворяет уравнению

$$p_{xx} + y p_{yy} + 2^{-1} p_y = 0,$$

она может принимать положительный максимум и отрицательный минимум относительно D_1 только на интервале $]0, 1[$ ($p|_{\Gamma_1} = 0$). Пусть $(\xi, 0)$ — точка экстремума. Известно, что $\lim_{y\to+0} \partial p(\xi, y)/\partial y \neq 0$, а значит, в силу (20), и $\nu(\xi) \neq 0$. Из (22) следует, что точка $x = \xi$ является точкой экстремума функции $\tau^{(2n)}(x)$, следовательно, $\tau^{(2n+1)}(\xi) = 0$. Однако, ввиду того, что $\delta(x) \equiv 0$ и $\nu(\xi) \neq 0$, из основного соотношения (12) с учетом (21) имеем $\tau^{(2n+1)}(\xi) \neq 0$. Полученное противоречие говорит о том, что функция $p(x, y_1)$ не имеет экстремумов нигде в $\overline{D_1}$

и, следовательно, $p(x, y_1) \equiv 0$. В случае, когда $x^n \gamma(x) - (-1)^n (1-x)^n \theta(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0, 1]$ и $(-1)^n x^n \gamma(x) + (1-x)^n \times \theta(x) \neq 0$ $\forall x \in]0, 1[$, из (12) получим $\tau^{(2n+1)}(x) \equiv 0$ на $]0, 1[$. Следовательно, $\tau^{(2n)}(x) \equiv \text{const}$ на $]0, 1[$, и так как $\tau(x) \in C^{2n}[0,1]$, с учетом (19) и (22) получим $\tau^{(2n)}(x) \equiv 0$ и $p(x, 0) \equiv 0$. Таким образом, вновь получаем, что $p(x, y_1) \equiv 0$ в $\overline{D}_1$. Отсюда в силу (16) $\operatorname{Re} f^{(2n)}(z) \equiv 0$ в $\overline{D}_1$. Теперь совершенно так же, как при доказательстве теоремы единственности задачи T^n в [4], с учетом условий (5), заключаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Считая теперь функцию $\nu(x)$ в соотношении (20) временно известной, рассмотрим следующую задачу.

Задача N. В области D_1 найти гармоническую функцию $p(x, y_1)$ по граничным условиям (19), (20).

Решение этой задачи выражается через функцию Грина $G(z, \zeta)$ (см. [4]) по формуле

$$p(x, y_1) = (-1)^{n-1} h^{-1} \int_0^1 G(z, \xi)\, \nu(\xi)\, d\xi + \Phi(x, y_1), \tag{23}$$

где $\Phi(x, y_1) = -\int_{\Gamma_1} (\partial G(z, \zeta)/\partial n_\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, ds$, n_ζ — внешняя нормаль к Γ_1 в точке ζ, s — дуговая абсцисса точки ζ. Из (23) следует

$$p(x, 0) = (-1)^{n-1} h^{-1} \int_0^1 G(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d\xi + \Phi(x, 0), \quad 0 < x < 1. \tag{24}$$

Здесь $G(z, \zeta) = G_0[\omega(z), \omega(\zeta)]$, $z = x + iy_1$, $\zeta = \xi + i\eta_1$, (25)
где

$$G_0(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(\zeta + \bar{z} - 2\zeta\bar{z})(\zeta + z - 2\zeta z)}{(\zeta - z)(\zeta - \bar{z})} \right| \tag{26}$$

—функция Грина задачи N для полукруга Δ: $|2\zeta - 1| < 1$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$, а функция $\gamma = \omega(\zeta)$ конформно отображает область D_1 на полукруг Δ так, что отрезок AB преобразуется в себя и $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$. В силу принципа симметрии функция $\omega(\zeta)$ аналитически продолжается в окрестности точек $\zeta = 0$, $\zeta = 1$; следовательно, $\omega(x)$, $\omega'(x) \in H[0, 1]$, $\omega(x) = O(x)$, $1 - \omega(x) = O(1 - x)$. Положим в (24)

$$x = \lambda(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{27}$$

и сделаем в интеграле замену $\xi = \lambda(\beta) = \omega^{-1}(\beta)$. Обозначая

$$P(\alpha) = p[\lambda(\alpha), 0], \quad N(\alpha) = \nu[\lambda(\alpha)], \quad F(\alpha) = \Phi[\lambda(\alpha), 0], \tag{28}$$

с учетом (25), (26) имеем

$$P(\alpha) = F(\alpha) + (-1)^{n-1}(h\pi)^{-1} \int_0^1 \ln[(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)/|\alpha - \beta|]\, N(\beta)\, \lambda'(\beta)\, d\beta, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{29}$$

Дифференцируя (29) и обозначая

$$\mu(\alpha) = N(\alpha)\lambda'(\alpha), \tag{30}$$

получим:

$$P'(\alpha) = F'(\alpha) + \frac{(-1)^{n-1}}{h\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1-2\beta}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\right)\mu(\beta)\,d\beta. \tag{31}$$

Из (12) и (18) следует

$$b(x)\,\partial p(x,\ 0)/\partial x = (-1)^n h^{-1}a(x)\nu(x) + k2^{2n+1}\delta(x), \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered} a(x) = (-1)^n x^n \gamma(x) - (1-x)^n \theta(x), \\ b(x) = k\left[(-1)^n x^n \gamma(x) + (1-x)^n \theta(x)\right], \end{gathered} \tag{33}$$

$k = h^{-1}2^{2n+1}\varepsilon_n$. Делая в (32) замену (27), получим с учетом (30):

$$b_0(\alpha)P'(\alpha) = (-1)^n h^{-1}a_0(\alpha)\mu(\alpha) + k2^{2n+1}\delta[\lambda(\alpha)]\lambda'(\sigma), \tag{34}$$

где

$$a_0(\alpha) = a[\lambda(\alpha)], \quad b_0(\alpha) = b[\lambda(\alpha)], \tag{35}$$

причем в силу (21) $a_0(\alpha) \neq 0,\ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Подставляя (31) в (34), получаем следующее уравнение относительно функции $\mu(\alpha)$:

$$a_0(\alpha)\mu(\alpha) + \frac{b_0(\alpha)}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1-2\beta}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\right)\mu(\beta)\,d\beta = R(\alpha), \tag{36}$$

где

$$R(\alpha) = (-1)^n h b_0(\alpha)F'(\alpha) - (-1)^n hk2^{2n+1}\delta[\lambda(\alpha)]\lambda'(\alpha).$$

Как показано в [4], из свойств функций $F(\alpha)$, $\delta(x)$, $\lambda(\alpha)$ следует, что $R(\alpha) \in H[0,\ 1]$.

Решение уравнения (36) в классе функций, соответствующих нулевому индексу, имеет вид [5]:

$$\mu(\alpha) = a_0(\alpha)R(\alpha)\,|c_0(\alpha)|^{-2} - b_0(\alpha)\,e^{\Gamma(\alpha)}\pi^{-1}|c_0(\alpha)|^{-1} \times$$

$$\times \int_0^1 R(\beta)\,e^{-\Gamma(\beta)}|c_0(\beta)|^{-1}\left[(\beta-\alpha)^{-1} + (1-2\beta)/(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\right]d\beta, \tag{37}$$

где

$$c_0(\alpha) = a_0(\alpha) + ib_0(\alpha) = |c_0(\alpha)|\,e^{i\sigma(\alpha)},$$

$$\sigma(\alpha) = \arg c_0(\alpha), \quad -\pi < \sigma(\alpha) < \pi,$$

$$\Gamma(\alpha) = -\pi^{-1}\int_0^1 \sigma(\beta)\left[(\beta-\alpha)^{-1} + (1-2\beta)/(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\right]d\beta.$$

Учитывая поведение функции $\Gamma(\alpha)$ при приближении α к концам отрезка [0, 1] [6], можно получить следующее представление:

$$\frac{e^{\Gamma(\alpha)}}{e^{\Gamma(\beta)}} = \frac{q(\alpha)}{q(\beta)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{\gamma_2}, \tag{38}$$

где

$$q(\alpha) \in H[0, 1], \quad \gamma_1 = -2\pi^{-1}\sigma(0), \quad \gamma_2 = 2\pi^{-1}\sigma(1). \tag{39}$$

Из (33) и (35) имеем $\sigma(0) = -\operatorname{arctg} k$, $\sigma(1) = \operatorname{arctg} k$ и в силу (39) $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$. Теперь из (37) и (38) заключаем, что $\mu(\alpha) = O[\alpha^{-\gamma_1}(1-\alpha)^{-\gamma_2}]$, следовательно, $\mu(\alpha) \in H^*$ на [0, 1].

Из (28), (30) найдем функцию $\nu(x)$ в виде

$$\nu(x) = \mu[\omega(x)]\,\omega'(x). \tag{40}$$

В силу свойств $\omega(x)$ из (40) следует, что $\nu(x) = O[x^{-\gamma_1}(1-x)^{-\gamma_2}]$. Подставляя функцию $\nu(x)$ в (23), с учетом (16) найдем функцию $\operatorname{Re} f^{(2n)}(z) \in C(\bar{D}_1)$, причем нетрудно убедиться, что $\operatorname{Re} f^{(2n)}(z) \in H\,\partial D_1)$. По $\operatorname{Re} f^{(2n)}(z)$ восстановим функцию $f^{(2n)}(z)$. Отображая (область D_1 на единичный круг и применяя затем теорему И. И. Привалова [7], можно убедиться, что $f^{(2n)}(z) \in C(\bar{D}_1)$. Учитывая теорему единственности, в выражении для $f^{(2n)}(z)$ можно выбрать любое значение для чисто мнимого постоянного слагаемого, а функцию $f(z)$ можно взять в виде (см. [4]):

$$f(z) = \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^z (z-\zeta)^{2n-1} f^{(2n)}(\zeta)\,d\zeta. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (13), получим решение задачи 1 в области $\bar{\Omega}_1$. С помощью (15) найдем $\tau(x)$, а затем по формуле (6) — решение задачи 1 в $\bar{\Omega}_2$.

В случае, когда $a_0(\alpha) \equiv 0$ на [0, 1], $b_0(\alpha) \neq 0$ на]0, 1[, решение уравнения (36) записывается в виде [8]:

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1-2\beta}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\right)\frac{R(\beta)}{b_0(\beta)}\,d\beta;$$

отсюда следует, что $\mu(\alpha) = O[\ln\alpha(1-\alpha)]$ и $\nu(x) = O[\ln x(1-x)]$. Чтобы $R(\alpha)/b_0(\alpha)$ было ограниченным, будем предполагать дополнительно, что порядок функции $\delta(x)$ совпадает с порядками функций $\theta(x)$ и $\gamma(x)$ соответственно в точках $x = 0$ и $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.— Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 1, с. 44—59.

2. Крикунов Ю. М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)\,u_y=0$.— Изв. вузов. Математика, 1979, № 9, с. 21—28.

3. Крикунов Ю. М. Одна краевая задача для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)\,u_y=0$.— Изв. вузов. Математика, 1979, № 10, с. 57—63.

4. Крикунов Ю. М. Аналог задачи Трикоми для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)\,u_y=0$.— Изв. вузов. Математика, 1982, № 1, с. 26—32.

5. Каратопраклиев Г. Об одном обобщении задачи T для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy}=0$.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 6, с. 1271—1273.

6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968, с. 75.

7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966, с. 400.

8. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа.— Труды Математического института АН СССР, 1953, т. 41, с. 23.

Доложено на семинаре 30 января 1984 года.