МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 33, № 2 (1983)

ОБ ОЦЕНКАХ НОРМ РЕЗОЛЬВЕНТ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ «БЛИЗКИХ» К САМОСОПРЯЖЕННЫМ И УНИТАРНЫМ

М. И. Гиль

В теории операторов и ее приложениях важную роль играют оценки норм резольвент нормального оператора и вполне непрерывного оператора из идеала C_p (см. [1]), справедливые во всех регулярных точках. В то же время аналогичные оценки для операторов других классов в литературе автору не встречались.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебра линейных непрерывных операторов, действующих в H. Ниже получены точные оценки нормы резольвенты, справедливые во всех регулярных точках, для оператора $A \in B(H)$, удовлетворяющего одному из следующих условий: а) $A_J = \frac{1}{2i}(A - A^*) \in C_2$, б) $A^*A - I \in C_1$ (напомним, что C_1 — идеал ядерных операторов, C_2 — идеал операторов Гильберта — Шмидта). Здесь и ниже I — тождественный оператор в H. Затем полученные результаты обобщаются на случаи

$$(A^p)_J = (A^p - (A^p)^*)/(2i) \in C_2, \quad (A^p)^*A^p - I \in C_1,$$
$$p = 2, 3, \ldots$$

Пусть $\sigma(A)$, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ — соответственно спектр и резольвента оператора A, $\rho(\lambda, A) = \inf |t - \lambda| \; (t \in \sigma(A))$, $\operatorname{sp} A$ — след оператора $A \in C_1$,

$| A |_2 = \mathrm{sp}\, (A^*A)^{1/2}$ — абсолютная норма оператора $A \in C_2$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $A \in B(H)$ *и* $A_J \in C_2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k-1} (\lambda, A)\, v^k (A)\, (k!)^{-1/2} \qquad (\lambda \overline{\in} \sigma (A)), \qquad (1)$$

где

$$v(A) = \sqrt{2}\, \left(| A_J |_2^2 - \sum_{k=1}^{\infty} | \operatorname{Im} \lambda_k |^2\right)^{1/2} \qquad (\lambda_k \in \sigma (A)).$$

Собственные числа здесь и ниже берутся с учетом кратности.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $A \in B(H)$ и $A^*A - I \in C_1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k-1} (\lambda, A)\, \varkappa^k (A)\, (k!)^{-1/2} \qquad (\lambda \overline{\in} \sigma (A)), \qquad (2)$$

где

$$\varkappa (A) = (\mathrm{sp}\, (A^*A - I) - \sum_{k=1}^{\infty} (| \lambda_k |^2 - 1))^{1/2} \qquad (\lambda_k \in \sigma (A)).$$

Общая часть доказательства этих теорем содержится в нижеследующих леммах, для формулировки которых нам понадобится понятие максимальной цепочки (см. [2], [3]). Напомним его. Пусть π — множество ортопроекторов в H, содержащее не менее двух ортопроекторов и удовлетворяющее следующему условию: из $P_1, P_2 \in \pi$ следует, что либо $P_1 < P_2$, либо $P_2 < P_1$. Тогда π называется цепочкой (ортопроекторов). Во множестве всех цепочек вводится следующее отношение порядка: цепочка π_1 считается предшествующей цепочке π_2, если каждый ортопроектор, входящий в состав π_1, принадлежит также π_2. Цепочка π, которая предшествует только самой себе, называется максимальной.

Мы будем говорить, что A обладает максимальной цепочкой π, если каждый ортопроектор из π проектирует на подпространство, инвариантное относительно A, т. е.

$$AP = PAP \qquad (P \in \pi).$$

ЛЕММА 1. *Пусть* $A \in B(H)$ *и* $A = D + V$, *где* D *нормальный,* V — (*абстрактный*) *вольтерров операторы из* $B(H)$, *обладающие общей максимальной цепочкой. Тогда* $\sigma(A) = \sigma(D)$, *и справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \rho^{-1} (\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} \| (V R_\lambda (D))^k \| \qquad (\lambda \overline{\in} \sigma (A)). \qquad (3)$$

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda(A) = R_\lambda(D)(1 + B_\lambda)^{-1} \quad (\lambda \,\overline{\in}\, \sigma(A) \cup \sigma(D)), \quad (4)$$

где $B_\lambda = VR_\lambda(D)$. Резольвента нормального оператора D обладает, очевидно, той же максимальной цепочкой, что и D. По следствию 2 теоремы 17.1 [3, с. 121] произведение вольтеррова и ограниченного операторов с общей максимальной цепочкой является вольтерровым оператором. Следовательно, B_λ $(\lambda \,\overline{\in}\, \sigma(D))$ — вольтерров оператор. Из (4) имеем

$$R_\lambda(A) = R_\lambda(D) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_\lambda^k \quad (\lambda \,\overline{\in}\, \sigma(A) \cup \sigma(D)). \quad (5)$$

Отсюда сразу следует, что $R_\lambda(A)$ ограничен только тогда, когда ограничен оператор $R_\lambda(D)$, т. е. $\sigma(D) = \sigma(A)$. Так как D нормален, то (см. [1]) $\| R_\lambda(D) \| = \rho^{-1}(\lambda, D)$. Из последнего равенства и из (5) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть в предположениях леммы* 1 $V \in C_2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda(A) \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k-1}(\lambda, A) \, |V|_2^k (k!)^{-1/2} \quad (\lambda \,\overline{\in}\, \sigma(A)).$$

Доказательство. Так как произведение ограниченного оператора и оператора Гильберта — Шмидта является оператором Гильберта — Шмидта (см. [1]), то $B_\lambda \in C_2$. Как доказано в [4] (см. также [5]), для всякого вольтеррова оператора $U \in C_2$ справедливо $\| U^n \|^2 \leqslant (n!)^{-1} |U|_2^{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\| B_\lambda^n \|^2 \leqslant (n!)^{-1} |B_\lambda|_2^{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Имеем, учитывая симметричность нормы $|\cdot|_2$ (см. [1]) $|VR_\lambda(D)|_2 \leqslant |V|_2 \| R_\lambda(D) \| = |V|_2 \rho^{-1}(\lambda, D)$. Так как по лемме 1 $\rho(\lambda, D) = \rho(\lambda, A)$, то отсюда и из (3) получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Как доказано в [6] (см. также [7]), A равен сумме нормального и вольтеррова операторов с общей максимальной цепочкой, т. е. удовлетворяет требованиям леммы 1: $A = D + V$. Так как D^* имеет ту же максимальную цепочку, что и D, то вновь пользуясь следствием 2 теоремы 17.1 [3, с. 121], можем утверждать, что D^*V вольтерров оператор, т. е. $\mathrm{sp}(D^*V) = \mathrm{sp}(V^*D) = 0$. Отсюда

$$\mathrm{sp}(A^* - A)^2 = \mathrm{sp}(V^* - V)^2 + \mathrm{sp}(D^* - D)^2,$$

или $|A_J|_2^2 = |V_J|_2^2 + |D_J|_2^2$. Так как $\sigma(D) = \sigma(A)$, то

$$|D_J|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda_k|^2$$

и, следовательно,

$$|V_J|_2^2 = |A_J|_2^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda_k|^2.$$

По теореме 1.10.2 [2, с. 61] справедливо равенство $|V|_2^2 = 2|V_J|_2^2$, т. е.

$$|V|_2^2 = 2\left(|A_J|_2^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda_k|^2\right) \equiv v^2(A).$$

Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. 1. Предположим пока, что $A^{-1} \in B(H)$. Тогда, как показано в [8] (см. также [7]), A удовлетворяет требованиям леммы 1, т. е. $A = D + V$. Как показано при доказательстве теоремы 1, справедливо равенство $\operatorname{sp}(D^*V) = \operatorname{sp}(V^*D) = 0$, откуда следует

$$\operatorname{sp}(A^*A - I) = \operatorname{sp}(D^*D - I) + \operatorname{sp}(V^*V).$$

Имеем $\operatorname{sp}(D^*D - I) \leqslant \operatorname{sp}(A^*A - I) < \infty$. Но $\sigma(D) = \sigma(A)$, и, таким образом,

$$|V|_2^2 = \operatorname{sp}(A^*A - I) - \sum_{k=1}^{\infty}(|\lambda_k|^2 - 1) \equiv \varkappa^2(A).$$

Отсюда и из леммы 2 получаем неравенство (2).

2. Пусть A не имеет ограниченного обратного, т. е. $0 \in \sigma(A)$. Обозначим проектор на собственное подпространство оператора A, соответствующее числу $\lambda = 0$, через P. По теореме Вейля о возмущении непрерывного спектра [9] точки спектра оператора A, не лежащие на единичной окружности, принадлежат его дискретному спектру, т. е. подпространство PH конечномерно. Следовательно, AP — нильпотентный оператор (конечномерный оператор с $\sigma(AP) = \{0\}$).

Так как $0 \overline{\in} \sigma(A(I - P))$, то $A(I - P)$ обратим в $(I - P)H$, причем $(A(I - P))^*(A(I - P)) - I \in C_2$. Следовательно, по изложенному выше, $A(I - P) = D + V_1$, где D — нормальный, V_1 — вольтерров операторы в $(I - P)H$ с общей максимальной цепочкой. Оператор $V = V_1 + AP$, очевидно, вольтерров. Тем самым $A = D + V$, где D и V удовлетворяют требованиям леммы 1. Задача свелась к предыдущей. Ч. т. д.

Следствие 1 теоремы 1. *Пусть для некоторого натурального* p $(A^p)_J \in C_2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \sum_{m=0}^{p-1} \| \lambda^{p-m-1} A^m \| \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1/2} \rho^{-k-1} (\lambda^p, A^p), v^k (A^p)$$
$$\lambda \overline{\in} \sigma (A).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 1 и тождеством

$$R_\lambda (A) = \sum_{m=0}^{p-1} \lambda^{p-m-1} A^m R_{\lambda^p} (A^p),$$

которое проверяется при $| \lambda | > \| A \|$ с помощью резольвентного ряда, а затем продолжается аналитически на все $\lambda \overline{\in} \sigma (A)$ (см. также [4]). Совершенно аналогично доказывается следующее предложение.

Следствие 1 теоремы 2. *Пусть при некотором натуральном* p $(A^p)^* A^p - I \in C_1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \sum_{m=0}^{p-1} \| \lambda^{p-m-1} A^m \| \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1/2} \rho^{-k-1} (\lambda^p, A^p) \varkappa^k (A^p) \qquad (\lambda \overline{\in} \sigma (A)).$$

Следующая теорема уточняет изложенные выше результаты в случае, когда λ находится в окрестности собственного числа конечной кратности.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть оператор* $A \in B(H)$ *удовлетворяет одному из следующих условий: для некоторого натурального* p $(A^p)_J \in C_2$ *или* $(A^*)^p A^p - I \in C_1$. *Если* λ_0 — *собственное число оператора* A *кратности* $r < \infty$, *то при* $| \lambda - \lambda_0 | \leqslant \inf\limits_{\substack{t \in \sigma(A) \\ t \neq \lambda_0}} | \lambda - t |$ *справедливо неравенство*

$$\| R_\lambda (A) \| \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} | \lambda - \lambda_0 |^{-k-1} | AQ |_2^k (k!)^{-1/2} + C(\lambda), \quad \lambda \overline{\in} \sigma (A),$$

где Q — *проектор на собственное подпространство оператора* A, *соответствующее числу* λ_0,

$$C(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \| \lambda^{p-m-1} A^m \| \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2 (\rho^{-1} (\lambda_0^p, A_Q^p))^{k+1} v^k (A_Q^p) (k!)^{-1/2} 2^{k+1} \quad \text{при} \quad (A^p)_J \in C_2,$$

$$C(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \| \lambda^{p-m-1} A^m \| \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^{-1} (\lambda_0^p, A_Q^p))^{k+1} \varkappa^k (A_Q^p) (k!)^{-1/2} 2^{k+1}$$
$$\text{при} \quad (A^*)^p A^p - I \in C_1,$$
$$A_Q \equiv A (I - Q).$$

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda(A) = R_\lambda(AQ)\,Q + R_\lambda(A_Q)(I - Q). \qquad (6)$$

Учитывая, что $2\rho(\lambda^p, A_Q^p) \geqslant \rho(\lambda_0^p, A_Q^p)$ получаем при $(A_J^p) \in C_2$ из следствия 1 теоремы 1

$$\| R_\lambda(A_Q) \| \leqslant \sum_{m=0}^{p-1} \| \lambda^{p-m-1} A^m \| \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^{-1}(\lambda_0^p, A_Q^p)^{k+1} v^k (A_Q^p)(k!)^{-1/2} 2^{k+1},$$

а при $(A^*)^p A^p - I \in C_1$ из следствия 1 теоремы 2 получаем

$$\| R_\lambda(A_Q) \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (2\rho^{-1}(\lambda_0^p, A_Q^p))^{k+1} \varkappa^k (A_Q^p)(k!)^{-1/2}, \qquad \lambda \overline{\in} \sigma(A).$$

Далее, для всякого конечномерного оператора B, как доказано в [4], справедливо неравенство

$$\| R_\lambda(B) \| \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{-1-k}(\lambda, B) \, | B |_2^k (k!)^{-1/2}, \qquad \lambda \overline{\in} \sigma(B).$$

Полагая $B = AQ$, из (6) получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Неравенства (1) и (2) точны — они переходят в равенство, $\| R_\lambda(A) \| = \rho^{-1}(\lambda, A)$, когда A — нормальный оператор. Действительно, если A нормален, то при $A_J \in C_2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \operatorname{Im} \lambda_k |^2 = | A_J |_2^2$$

и $v(A) = 0$, а при $A^*A - I \in C_1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (| \lambda_k |^2 - 1) = \operatorname{sp}(A^*A - I), \qquad \varkappa(A) = 0.$$

Хабаровский комплексный НИИ
ДВНЦ АН СССР

Поступило
11.I.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы (спектральная теория, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве), М., «Мир», 1966.

[2] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., «Наука», 1967.

[3] Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов, М., «Наука», 1969.

[4] Гиль М. И. Об оценке нормы резольвенты вполне непрерывного оператора, Матем. заметки, 26, № 5 (1979), 713—717.

[5] Г и л ь М. И. Об оценке нормы функции оператора Гильберта — Шмидта, Известия вузов. Математика, № 8, (1979), 14—19.

[6] Б р о д с к и й В. М., Б р о д с к и й М. С. Об абстрактном треугольном представлении линейных ограниченных операторов и мультипликативном разложении соответствующих им характеристических функций, Докл. АН СССР, **181**, № 3 (1968), 511—514.

[7] Б р о д с к и й В. М., Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, Функц. анализ, 3, вып. 4 (1969), 1—27.

[8] Б р о д с к и й В. М. О треугольном представлении операторов, близких к унитарным, и мультипликативном разложении их характеристических функций, Докл. АН СССР, **190**, № 3 (1970), 510—513.

[9] К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.