В. А. Краснов, Неравенство Гарнака–Тома для критической точки многочлена, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 717–720

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

НЕРАВЕНСТВО ГАРНАКА — ТОМА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ МНОГОЧЛЕНА

В. А. Краснов

Введение. Пусть $P \in \mathbf{R}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $P(0) = 0$ и $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ — изолированная критическая точка многочлена P в $\mathbf{C}^{n+1}$. Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда в замкнутой ε-окрестности точки 0 рассмотрим множества уровня:

$$A_t = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid P(x) = t, \quad |x| \leqslant \varepsilon\},$$
$$\mathbf{C}A_t = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid P(z) = t, \quad |z| \leqslant \varepsilon\},$$

где $t \in \mathbf{R}$ — фиксированное число. Существует $\eta > 0$ такое, что при $0 < |t| < \eta$ эти множества являются многообразиями с краем; для них выполняется неравенство Гарнака — Тома

$$\dim H_*(A_t) \leqslant \dim H_*(\mathbf{C}A_t),$$

где $H_*(\cdot) = \oplus H_q(\cdot, \mathbf{F}_2)$ (см. [1] далее, если не указано противное, то группы гомологий рассматриваются с коэффициентами в $\mathbf{F}_2$).

В этой заметке мы доказываем усиление данного неравенства; чтобы сформулировать его, обозначим через

$$h\colon H_*(\mathbf{C}A_t) \to H_*(\mathbf{C}A_t)$$

оператор монодромии (см. [2, с. 72).

ТЕОРЕМА. *Имеет место неравенство*

$$\dim H_*(A_t) \leqslant \dim H_*(\mathbf{C}A_t)^h, \tag{1}$$

где справа стоит размерность инвариантного подпространства.

Стоит заметить, что

$$H_q\ (\mathbf{C}A_t) = 0$$

при $q \neq 0,\ n$ (см. [2, с. 63), поэтому

$$\dim H_* (\mathbf{C}A_t)^h = 1 + \dim H_n (\mathbf{C}A_t)^h.$$

С другой стороны, выполняется равенство

$$\dim H_n\ (\mathbf{C}A_t)^h = \dim H_n\ (\mathbf{C}A_t) - \operatorname{rang} M,$$

где M — матрица пересечений с коэффициентами в $\mathbf{F}_2$, а именно: если $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — базис $H_n\ (\mathbf{C}A_t)$, то $M = (\Delta_i \cdot \Delta_j)$. Это равенство нетрудно получить из формулы Пикара — Лефшеца, если предварительно совершить морсовское шевеление функции P (см. [3, с. 23).

Доказательство основного результата. Мы сначала докажем три леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $A_{\pm t} \neq \varnothing$, тогда выполняется равенство*

$$\dim H_*\ (A_{-t}) = \dim H_*\ (A_t).$$

Доказательство. Обозначим через S_ε сферу в $\mathbf{R}^{n+1}$ радиуса ε с центром в $0 \in \mathbf{R}^{n+1}$, и пусть $S_\varepsilon^{\pm}$ обозначает часть сферы S_ε, где $P\ (x) \gtrless 0$, тогда множество уровня $A_{\pm t}$ диффеоморфно части сферы $S_\varepsilon^{\pm}$, при условии, что $0 < t < \eta$. Доказательство этого утверждения фактически содержится к [2]. Осталось применить двойственность Александера к паре $(S_\varepsilon,\ S_\varepsilon^{+})$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим теперь расслоение $P\colon V \to S$, где

$$V = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid\ |z| \leqslant \varepsilon,\ |P\ (z)| = t\},$$
$$S = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| = t\},\ 0 < t < \eta,$$

тогда имеет место

ЛЕММА 2. *Выполняется равенство*

$$\dim H_*\ (V) = 2 \dim H_*\ (\mathbf{C}A_t)^h,$$

где гомологии рассматриваются с коэффициентами в произвольном поле.

Доказательство. Заметим сначала, что $\mathbf{C}A_t$ — слой расслоения $P\colon V \to S$ над точкой t, поэтому точная последовательность Вана этого расслоения имеет вид (см. [2, с. 72])

$$\ldots \to H_q(\mathrm{C}A_t) \xrightarrow{h-I} H_q(\mathrm{C}A_t) \to H_q(V) \to$$
$$\to H_{q-1}(\mathrm{C}A_t) \xrightarrow{h-I} H_{q-1}(\mathrm{C}A_t) \to \ldots$$

Из нее получаем равенства

$$\dim H_q(V) = \dim \operatorname{Coker}[h-I\colon\ H_q(\mathrm{C}A_t) \to H_q(\mathrm{C}A_t)] +$$
$$+ \dim \operatorname{Ker}[h-I\colon\ H_{q-1}(\mathrm{C}A_t) \to H_{q-1}(\mathrm{C}A_t)] =$$
$$= \dim H_q(\mathrm{C}A_t)^h + \dim H_{q-1}(\mathrm{C}A_t)^h.$$

Осталось просуммировать эти равенства по q. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Если* $A_{-t} = \varnothing$, *то*

$$\dim H_*(\mathrm{C}A_t)^h \geqslant 2.$$

Доказательство. При замене многочлена $P(x_0, \ldots, x_n)$ на многочлен

$$P(x_0, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^m x_{n+i}^2$$

$\dim H_*(\mathrm{C}A_t)^h$ не меняется (см. [3, с. 46]), поэтому можем считать, что n — нечетное. Пусть $\tau\colon\ V \to V$ — комплексное сопряжение на многообразии V, тогда выполняется формула Лефшеца

$$\chi(V^\tau) = \sum (-1)^q \operatorname{tr}(\tau \mid H_q(V, \mathbf{Q})).$$

В силу того что A_t диффеоморфно S_ε и

$$V^\tau = A_{-t} \cup A_t = A_t,$$

имеем $\chi(V^\tau) = 0$. С другой стороны,

$$\operatorname{tr}(\tau \mid H_0(V, \mathbf{Q})) = 1,$$
$$\operatorname{tr}(\tau \mid H_1(V, \mathbf{Q})) = -1,$$

так как

$$H_1(V, \mathbf{Q}) = H_1(S, \mathbf{Q}).$$

Следовательно,

$$\sum_{q>1} \dim H_q(V, \mathbf{Q}) \geqslant 2,$$

поэтому

$$\dim H_*(V, \mathbf{Q}) \geqslant 4,$$

а тогда

$$\dim H_*(V, \mathbf{F}_2) \geqslant 4.$$

Осталось применить лемму 2. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству неравенства (1). Если $A_{-t} = \varnothing$, то A_t диффеоморфно S_ε, поэтому неравенство (1) следует из леммы 3. Пусть теперь $A_{\pm t} \neq \varnothing$, тогда рассмотрим неравенство Гарнака—Тома для τ: $V \to V$, т. е.

$$\dim H_* (V^\tau) \leqslant \dim H_* (V).$$

Так как $V^\tau = A_{-t} \bigcup A_t$, то

$$\dim H_* (V^\tau) = \dim H_* (A_{-t}) + \dim H_* (A_t).$$

Если теперь применить леммы 1, 2 , то верхнее неравенство перейдет в неравенство (1).

Ярославский государственный университет

Поступило 09.01.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта.— Функцион. анализ и его прил., 1972, т. 6, вып. 4, с. 58—64.

[2] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.

[3] Арнольд В. И. и др. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, 1984.