А. Н. Рудаков, И. Р. Шафаревич, О вырождении поверхностей типа $K3$ над полями конечной характеристики,
Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, том 45, выпуск 3, 646–661

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 45, № 3, 1981

УДК 513.6

РУДАКОВ А. Н., ШАФАРЕВИЧ И. Р.

О ВЫРОЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3$ НАД ПОЛЯМИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Отправной точкой этой работы является вопрос о том, в какой мере суперсингулярная поверхность типа $K3$ определяется своими периодами (определение отображения периодов для суперсингулярных поверхностей типа $K3$ см. в [7]). Этот вопрос сводится, как известно, к вопросу о возможных вырождениях подобных поверхностей. Мы решаем вопрос в предположении, что поверхность является сильно эллиптической, т. е. содержит эллиптический пучок с сечением. Как известно, это накладывает одно соотношение на модули поверхности. В этих предположениях мы можем решить и гораздо более общую задачу — описать все вырождения тех поверхностей, для которых инвариант Хассе равен 0, иными словами, введенная Артином [1] высота $h>1$ (для суперсингулярной поверхности $h=\infty$).

Авторы выражают благодарность П. Делиню, В. С. Куликову и Т. Цинку за полезные обсуждения результатов этой работы.

1. Инвариант Хассе эллиптической поверхности типа $K3$. Мы будем дальше рассматривать алгебраические поверхности типа $K3$ над алгебраически замкнутым полем k конечной характеристики p, отличной от 2 и 3. Для такой поверхности X пространство $H^2(X, \mathcal{O})$ одномерно, поэтому действие морфизма Фробениуса задается в нем (при выборе базиса) одним элементом $\lambda(X)\in k$, который называется инвариантом Хассе поверхности X. Если ω — дифференциальная форма, образующая дуальный базис пространства $H^0(X, \Omega^2)$, то инвариант Хассе может быть определен при помощи операции Картье C: если $C\omega=\alpha\omega$, то $\lambda(X)=\alpha^p$.

Предположим теперь, что поверхность X сильно эллиптическая, т. е. обладает таким морфизмом $f: X\to\mathbf{P}^1$, что его общий слой — эллиптическая кривая и соответствующий пучок имеет сечение $s:\mathbf{P}^1\to X$. В этом случае пучок f может быть задан в вейерштрассовой нормальной форме:

$$y^2=x^3+a(t)x+b(t), \tag{1}$$

где t — координата на $\mathbf{P}^1$, а $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены степени 8 и 12. Более точный смысл этого утверждения следующий. Рассмотрим $a(t)$ и $b(t)$ как сечения расслоений $\mathcal{O}(8)$ и $\mathcal{O}(12)$ над $\mathbf{P}^1$. Пусть E — расслоение $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(4)\oplus\mathcal{O}(6)$ и в проективизированном расслоении $\mathbf{P}(E)$ подмногообразие X^* задается уравнением

$$y^2z=x^3+a(t)xz^2+b(t)z^3,$$

где x, y и z — сечения расслоений $\mathcal{O}(4)$, $\mathcal{O}(6)$ и $\mathcal{O}$. Если дискриминант $4a^3+27b^2$ не равен тождественно 0 и не существует точки $\xi\in\mathbf{P}^1$, в которой a и b имеют нули кратностей $\geqslant 4$ и $\geqslant 6$ соответственно, то X^* имеет лишь двойные рациональные особые точки и минимальное их разрешение приводит к гладкой поверхности X типа $K3$.

В нормальной форме (1) инвариант Хассе поверхности X вычисляется следующим образом. Форма, являющаяся базисом пространства $H^0(X, \Omega^2)$, может быть взята в виде $\omega=y^{-1}dx\wedge dt$ (ее регулярность очевидна при $t\neq\infty$, а при $t=\infty$ становится очевидной после стандартной замены $t=\tau^{-1}$). Так как

$$\omega=\frac{y^{p-1}}{y^p}dx\wedge dt=\frac{(x^3+a(t)x+b(t))^{\frac{p-1}{2}}}{y^p}dx\wedge dt,$$

то для вычисления $C\omega$ нам надо представить многочлен $(x^3+a(t)x+$ $+b(t))^{(p-1)/2}$ в виде $\sum\limits_{0\leqslant i,\, j\leqslant p-1}A_{ij}x^it^j$. Тогда

$$C\omega=\frac{(A_{p-1,\,p-1})^{1/p}}{y}dx\wedge dt$$

и $\lambda(X)=A_{p-1,\,p-1}$. Из подсчета степеней очевидно, что в $(x^3+a(t)x+b(t))^{(p-1)/2}$ входит только один член вида $\Lambda(t)x^{kp-1}$, именно при $k=1$. Коэффициент $\Lambda(t)$ при x^{p-1} по определению является инвариантом Хассе общего слоя эллиптического пучка f, т. е. кривой (1) над полем $k(t)$. Напомним, что если мы придадим a и b вес 4 и 6, то инвариант Хассе $\Lambda(a, b)$ кривой $y^2=x^3+ax+b$ будет изобарным веса $p-1$ (это следует из того, что $\Lambda(a, b)$ есть коэффициент при x^{p-1} в $(x^3+ax+b)^{(p-1)/2}$, а многочлен x^3+ax+b изобарен веса 6, если придать x вес 2). В частности,

$$\Lambda(c^4a,\ c^6b)=c^{p-1}\Lambda(a,\ b). \tag{2}$$

Если a и b — многочлены от t степеней 8 и 12, то из доказанного следует, что $\Lambda(a(t), b(t))$ имеет степень $2p-2$. Поэтому в него входит только один член λt^{kp-1}, именно при $k=1$. Отсюда мы видим, что для поверхности X, заданной уравнением (1), $\lambda(X)=\lambda$, т. е. инвариант Хассе эллиптической поверхности $K3$ равен среднему коэффициенту (при t^{p-1}) в инварианте Хассе общего слоя эллиптического расслоения. (Легко проверить, что в многочлене степени $\leqslant 2p-2$ коэффициент при t^{p-1} при дробно-линейном преобразовании φ умножается на $(\det\varphi)^{p-1}$.)

2. Умеренные вырождения. Эллиптическое расслоение типа **$K3$, заданное уравнением** (1), определяется коэффициентами многочленов a и b. При этом коэффициентам многочлена a естественно припи-

сывать вес 4, а b — 6. Поэтому мы будем изображать это расслоение точкой в взвешенно-проективном пространстве $\mathfrak{P}$ типа $(4^9, 6^{13})$. Мы будем рассматривать и те точки пространства $\mathfrak{P}$, которые не соответствуют поверхностям типа $K3$. Соответствующие им уравнения (1) определяют поверхности, которые мы будем называть *вырождениями поверхностей типа* $K3$.

Группа дробно-линейных преобразований проективной прямой $\mathbf{P}^1$ с координатой t определяет некоторую группу автоморфизмов взвешенно-проективного пространства $\mathfrak{P}$. Относительно этой группы можно ввести понятие стабильных и полустабильных точек в смысле теории инвариантов [6]. Чтобы выяснить, какие точки являются стабильными или полустабильными, можно применить критерий Гильберта ([6, теорема 2.1]). Так как при этом задача решается отдельно для коэффициента a и коэффициента b в уравнении, то задача решается совершенно так же, как в случае действия группы $\mathrm{SL}(2)$ на $S^n(\mathbf{P}^1)$, т. е. в теории бинарных форм ([6, предложение 4.1]). Мы приведем ответ:

Точка пространства $\mathfrak{P}$, *определенная уравнением* (1), *не стабильна, если существует точка* $\xi \in \mathbf{P}^1$, *в которой* a *и* b *имеют нули кратностей* $\geqslant 4$ *и* $\geqslant 6$. *Эта точка не полустабильна, если в некоторой точке* $\xi \in \mathbf{P}^1$ a *и* b *имеют нули кратности* >4 *и* >6.

Нас будут дальше интересовать только полустабильные точки и соответствующие им поверхности.

Как было сказано в п. 1, поверхность, задаваемая уравнением (1), может не быть поверхностью типа $K3$ в двух случаях.

I. Дискриминант правой части уравнения тождественно равен 0. В этом случае правая часть имеет кратный корень $c(t) \in k[t]$ и поэтому

$$a = -3c^2, \quad b = 2c^3, \quad \deg c = 4.$$

Мы будем называть вырождение *умеренным, если многочлен* $c(t)$ *не имеет кратных корней.* Заметим, что из условия полустабильности следует, что c не имеет корней кратности >2.

II. Дискриминант правой части уравнения (1) не равен тождественно 0, но a и b имеют в некоторой точке $\xi \in \mathbf{P}^1$ нули кратностей $\geqslant 4$ и $\geqslant 6$. Очевидно, что такая точка может быть одна или их может быть две. Условие означает, что в окрестности такой точки ξ уравнение (1) определяет не минимальную модель Вейерштрасса. Поэтому слой над точкой ξ мы будем называть в этом случае не минимальным. Если $t(\xi) = t_0$, то минимальная в окрестности точки ξ модель задается уравнением:

$$y_1^2 = x_1^3 + a_1 x_1 + b_1, \quad a_1 = \frac{a}{(t-t_0)^4}, \quad b_1 = \frac{b}{(t-t_0)^6},$$
$$x_1 = x(t-t_0)^2, \quad y_1 = y(t-t_0)^3. \tag{3}$$

Минимальность модели (3) в окрестности точки ξ следует из условия полустабильности.

В этом случае мы будем называть вырождение *умеренным, если для каждого не минимального слоя соответствующий слой минимальной мо-*

дели (3) — *гладкий*. Заметим, что из условия полустабильности следует, что $a_1(t)$ и $b_1(t)$ в уравнении (3) не обращаются одновременно в 0 в точке ξ. Поэтому в полустабильном случае мы имеем либо умеренное вырождение, либо слой над точкой 0 должен иметь мультипликативный тип.

Более инвариантный смысл этих условий в обоих случаях следующий. В случае I поверхность не нормальна: она имеет кривую особенностей $x=c(t)$, $y=0$. После нормализации прообразом кривой особенностей будет кривая $s^2=3c(t)$. Наше условие заключается в том, что ее род равен 1. В случае II поверхность имеет изолированную особую точку $t=t_0$, $x=0$, $y=0$. Уравнение (3) определяет минимальное разрешение этой особой точки (т. е. разрешение и стягивание всех исключительных кривых первого рода). Прообразом особой точки будет слой $t=t_0$. Наше условие заключается в том, что его род равен 1. Таким образом, в обоих случаях мы имеем дело с «эллиптическими особенностями» — при их разрешении возникают кривые арифметического рода 1. Условие умеренности заключается в том, что геометрический род этой кривой также равен 1, т. е. что мы имеем «невырожденную эллиптическую особенность».

Перед формулировкой следующей теоремы заметим, что инвариант Хассе поверхности с уравнением (1) определяется полиномиальными формулами, содержащими коэффициенты многочленов $a(t)$ и $b(t)$. Поэтому он определен и для вырожденных поверхностей. Таким же образом мы будем понимать и инвариант Хассе вырожденных кривых рода 1, записанных в форме Вейерштрасса.

ЛЕММА. *Инвариант Хассе вырожденной эллиптической кривой мультипликативного типа отличен от* 0.

Открытое множество неособых точек кривой в этом случае может быть изоморфно отображено на мультипликативную группу G_m, причем регулярной дифференциальной форме при этом соответствует инвариантная форма $\omega=t^{-1}dt$ на G_m. Равенство $C\omega=\omega$ проверяется для нее непосредственно.

Можно доказать лемму иначе, записав кривую в виде $y^2=x^2(x-\alpha)$, причем $\alpha\neq 0$ ввиду того, что кривая имеет мультипликативный тип. Инвариант Хассе равен коэффициенту при x^{p-1} в $(x^2(x-\alpha))^{(p-1)/2}=$ $=x^{p-1}(x-\alpha)^{(p-1)/2}$, т. е. равен $(-\alpha)^{(p-1)/2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Полустабильное вырождение сильно эллиптической поверхности типа $K3$ с инвариантом Хассе* 0 *является умеренным.*

Рассмотрим отдельно вырождения типа I и II.

I. Как было уже сказано, ввиду полустабильности вырождения, многочлен $c(t)$ не может иметь корня кратности >2. Если бы вырождение не было умеренным, то c имел бы двукратный корень. Этот корень можно принять за 0, так что $c=t^2d$. Тогда, ввиду (2),

$$\Lambda(a, b)=t^{p-1}d^{\frac{p-1}{2}}\Lambda(-3,2).$$

Так как кривая $y^2=(x-1)^2(x+2)$ имеет мультипликативный тип, то $\Lambda(-3,2)\neq 0$. Поэтому равенство 0 инварианта Хассе означает, что $d(0)=0$, т. е. что c имеет трехкратный корень.

II. В этом случае расслоение (1) имеет один или два не минимальных слоя. Пусть один из них расположен над точкой $t=0$, т. е. $a=t^4a_1$, $b=t^6b_1$. Тогда $\Lambda(a, b)=t^{p-1}\Lambda(a_1, b_1)$ и по определению $\lambda(X)=\Lambda(a_1, b_1)(0)$, т. е. равняется инварианту Хассе соответствующего слоя минимальной модели (3). По условию $\Lambda(a_1, b_1)(0)=0$. Отсюда следует, что если в модели (3) слой над точкой 0 вырожден, то его инвариант Хассе равен 0. По лемме он имеет тогда аддитивный тип. Но это возможно только при $a_1(0)=b_1(0)$, откуда следует, что a и b имеют корни кратности >4 и >6 в точке $t=0$, что противоречит полустабильности вырождения.

3. Вырождения семейств. Теперь мы рассмотрим семейства сильно эллиптических поверхностей типа $K3$ над базой $S=\operatorname{Spec} k[[\varepsilon]]$ с общей точкой η и замкнутой точкой s. Мы будем предполагать, что общий слой X_η семейства является поверхностью типа $K3$ и записан в виде (1), а прообраз замкнутой точки X_s может вырождаться. Перестройкой семейства $\mathscr{X}\to S$ называется семейство $\mathscr{X}'\to S$, общий слой которого изоморфен общему слою исходного семейства. Мы будем говорить, что вырождение семейства $\mathscr{X}\to S$ имеет тип цепочки, если прообраз замкнутой точки $X_s=\sum_{i=0}^{n} X_i$, $X_i\cap X_j=\varnothing$ при $|i-j|>1$, X_0 и X_n — рациональные поверхности, X_i $(0<i<n)$ — гладкие линейные расслоения над эллиптической кривой C, $X_i\cap X_{i+1}$ есть сечение этого расслоения на X_i при $0<i<n$ и на X_{i+1} при $0\leqslant i<n-1$. Кроме того, трехмерная схема $\mathscr{X}$ гладка в точках кривой $X_i\cap X_{i+1}$, X_i и X_{i+1} пересекаются трансверсально и единственные допустимые особые точки на слоях (общем и замкнутом) — двойные рациональные (на поверхностях X_0 и X_n).

ТЕОРЕМА 2. *Любое семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$, имеющее умеренное вырождение, может быть перестроено, после некоторого подъема базы, в семейство, которое или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки.*

Мы опять разберем отдельно два возможных типа вырождений эллиптической поверхности типа $K3$.

Вырождение I типа.

ЛЕММА. *Пусть f, $g\in k[[\varepsilon]][t]$, $f\not\equiv 0(\varepsilon)$ и f^3-g^2 делится точно на* ε^{2k}, $k>0$ (откуда, конечно, следует существование такого многочлена $h_0\in k[t]$, что $f\equiv h_0^2(\varepsilon)$, $g\equiv h_0^3(\varepsilon)$). *Предположим, что h_0 не имеет кратных корней. Тогда возможно представление*

$$f\equiv h^2+\varepsilon^kU\ (\varepsilon^{2k}),\quad g\equiv h^3+\frac{3}{2}\varepsilon^kUh\ (\varepsilon^{2k}).$$

Предположим, что $f\equiv h^2(\varepsilon^r)$, $g\equiv h^3(\varepsilon^r)$, $r<2k$. Записывая $f=h^2+\varepsilon^rU+\varepsilon^{2r}V$, $g=h^3+\varepsilon^rU_1+\varepsilon^{2r}W$, мы получим сначала из соотношения $f^3\equiv g^2(\varepsilon^{2r})$, приравнивая члены с ε^r, что $U_1=\frac{3}{2}Uh$, а из соотношения

$f^3 \equiv g^2(\varepsilon^{2r+1})$, приравнивая члены с ε^{2r}, что $U \equiv 0(h_0, \varepsilon)$ (здесь используется, что h_0 не имеет кратных корней). Отсюда индукцией вытекает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть $a, b \in k[[\varepsilon]][t]$. Предположим, что дискриминант многочлена X^3+aX+b делится точно на ε^{2k}, $k>0$, откуда вытекает представление $X^3+aX+b \equiv (X-c_0)^2(X+2c_0)(\varepsilon)$. Предположим, что в нем $c_0(t)$ не имеет кратных корней. Тогда при помощи сдвига по X можно преобразовать многочлен X^3+aX+b в $X^3+CX^2+\varepsilon^kAX+\varepsilon^{2k}B$, причем $A^2-4BC \not\equiv 0(\varepsilon)$.*

Так как $4a^3+27b^2 \equiv 0(\varepsilon^{2k})$, то согласно лемме (надо положить $a=-3f$, $b=2g$) возможно представление $a \equiv -3h^2-3U\varepsilon^k(\varepsilon^{2k})$, $b \equiv 2h^3+3Uh\varepsilon^k(\varepsilon^{2k})$ или $a=-3h^2+A\varepsilon^k$, $b=2h^3-Ah\varepsilon^k+B\varepsilon^{2k}$, где $A=-3U$. Отсюда

$$X^3+aX+b=(X-h)^2(X+2h)+\varepsilon^kAX-\varepsilon^khA+\varepsilon^{2k}B.$$

Полагая $3h=C$, после подстановки $X-h \to X$ получаем нужное представление. Подставляя выражения $a=-3h^2+A\varepsilon^k$ и $b=2h^3-Ah\varepsilon^k+B\varepsilon^{2k}$ в формулу для дискриминанта D, мы получим, что $D \equiv C^2(4BC-A^2)\varepsilon^{2k}$ (ε^{2k+1}), где $C=3h$. Из предположения о дискриминанте теперь вытекает последнее утверждение следствия.

Теперь мы можем перейти собственно к исследованию вырождений I типа. Мы будем предполагать семейство $\mathscr{X}$ заданным уравнением

$$\begin{gathered} y^2=x^3+a(t, \varepsilon)x+b(t, \varepsilon), \\ a(t, \varepsilon), b(t, \varepsilon) \in k[[\varepsilon]][t], \end{gathered} \tag{4}$$

в $\mathbf{P}(E)$, где $E=\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(4)\oplus\mathcal{O}(6)$ — расслоение над $\mathbf{P}_S^1$, $S=\operatorname{Spec} k[[\varepsilon]]$. Перейдя в случае необходимости к накрытию базы S, можно считать, что дискриминант левой части уравнения (4) делится на четную степень ε, и, если эта степень равна $2k$, записать уравнение на основании леммы в виде

$$\begin{gathered} y^2=x^3+C(t)x^2+\varepsilon^kA(t, \varepsilon)x+\varepsilon^{2k}B(t, \varepsilon), \\ A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon), C(t, \varepsilon) \in k[[\varepsilon]][t], \quad \deg C=4, \quad \deg A=8, \quad \deg B=12, \\ A^2-4BC \not\equiv 0(\varepsilon). \end{gathered} \tag{5}$$

Нужная нам перестройка семейства (4) будет получена при помощи σ-процесса в многообразии $\mathbf{P}(E)$ вдоль кривой, определенной уравнениями $x=0$, $y=0$, $\varepsilon=0$. Эта кривая целиком лежит в конечной (по x и y) части многообразия $\mathbf{P}(E)$, в которой $\mathscr{X}$ задано уравнением (4). Нам надо рассмотреть две карты, являющиеся прообразами множеств $t \neq \infty$ и $t \neq 0$ на $\mathbf{P}_S^1$. Так как их рассмотрение производится совершенно одинаково, то мы ограничимся первой из них. Обозначим через $\mathscr{X}_1$ собственный прообраз многообразия $\mathscr{X}$ при σ-процессе. $\mathscr{X}_1$ покрывается тремя картами:

(1) $y=ux,\quad \varepsilon=\eta x,$

$$u^2=x+C(t,\ \eta x)+\eta^k A(t,\ \eta x)x^{k-1}+\eta^{2k}B(t,\ \eta x)x^{2k-2}.$$

Прообраз замкнутой точки X_s задается уравнением $\varepsilon=0$ и приводи́м: $X_s=X_0\bigcup X_1$,

$$X_0:\ \eta=0,\quad u^2=x+C(t,\ 0),$$

$$X_1:\ x=0,\quad u^2=C(t,\ 0)\ \text{ при }\ k>1,$$

$$x=0,\quad u^2=C(t,\ 0)+\eta A(t,\ 0)+\eta^2 B(t,\ 0)\ \text{ при }\ k=1.$$

(2) $x=vy,\ \varepsilon=\theta y,$

$$1=v^3y+C(t,\ \theta y)v^2+\theta^k y^{k-1}A(t,\ \theta y)v+\theta^{2k}y^{2k-2}B(t,\ \theta y),$$

$$X_s=X_0\bigcup X_1,\quad X_0:\ \theta=0,\quad 1=v^2(vy+C(t,\ 0)),$$

$$X_1:\ y=0,\quad 1=C(t,\ 0)v^2\ \text{ при }\ k>1,$$

$$y=0,\quad 1=C(t,\ 0)v^2+A(t,\ 0)v\theta+B(t,\ 0)\theta^2\ \text{ при }\ k=1.$$

(3) $x=x_1\varepsilon,\quad y=y_1\varepsilon,$

$$y_1^2=x_1^3\varepsilon+C(t,\ \varepsilon)x_1^2+\varepsilon^{k-1}A(t,\ \varepsilon)x_1+\varepsilon^{2k-2}B(t,\ \varepsilon).$$

Прообраз замкнутой точки неприводим:

$$X_s=X_1:\ \varepsilon=0,\quad y_1^2=C(t,0)x_1^2\ \text{ при }\ k>1,$$

$$\varepsilon=0,\quad y_1^2=C(t,\ 0)x_1^2+A(t,\ 0)x_1+B(t,\ 0)\ \text{ при }\ k=1.$$

Поверхности X_1 во всех трех картах склеиваются в единую поверхность X_1. Поверхности X_0 в картах (1) и (2) склеиваются в поверхность X_0. $X_0\bigcap X_1$ есть эллиптическая кривая Y_0 с уравнениями (в карте (1)) $x=0$, $\eta=0$, $u^2=C(t,\ 0)$. По условию наше вырождение является умеренным и поэтому эта кривая гладкая. Легко видеть, что в ее точках многообразие $\mathscr{X}_1$ гладко.

Поверхность X_0 рациональна и гладка. При $k>1$ поверхность X_1 имеет в карте (3) двойную кривую Y_1: $y_1=x_1=0$. Нормализация поверхности X_1 является линейчатой поверхностью с эллиптической базой. Кривые Y_0 и Y_1 не пересекаются.

Если $k>1$, то мы должны совершить σ-процесс вдоль кривой Y_1. При этом компонента X_0 отображается изоморфно, прообраз компоненты X_1, как легко проверить, совпадает с ее нормализацией и является гладкой эллиптической поверхностью и, кроме того, в вырожденном слое возникает еще одна компонента X_2, которая при $k>2$ является эллиптической линейчатой поверхностью с двойной кривой Y_2. Этот процесс продолжается k шагов. После σ-процесса с номером, меньшим k, мы будем прибавлять к нашей цепочке еще одну эллиптическую поверхность. Последняя поверхность будет после k-го σ-процесса иметь в карте (3) уравнение

$$y_k^2=C(t,\ 0)x_k^2+A(t,\ 0)x_k+B(t,\ 0). \tag{6}$$

Так как согласно лемме $A(t, 0)^2-4B(t, 0)C(t, 0)\neq 0$, то эта поверхность будет содержать пучок рациональных кривых, следовательно, она рациональна.

Нам осталось исследовать особые точки последней поверхности (6). Положим $A(t, 0)=a(t)$, $B(t, 0)=b(t)$, $C(t, 0)=c(t)$ и запишем (6) в виде

$$y^2=cx^2+ax+b. \tag{7}$$

Особые точки соответствуют тем значениям t_0, для которых $(a^2-4bc)(t_0)=0$. Можно считать, что $t_0=0$. Если $c(0)\neq 0$, то, положив $c^{1/2}x=x_1$ и сделав сдвиг по x_1, мы приведем (7) к виду $y_1^2=x_1^2+t^nu(t)$. Это особенность типа A_{n-1}. Так как наше вырождение умеренное, то остающаяся возможность — $c(0)=0$, $c'(0)\neq 0$. Тогда и $a(0)=0$ и аналогичным преобразованием (7) приводится к виду $y_1^2=tx_1^2+t^n$. Это особенность типа D_{n+1}. Тем самым теорема 2 в случае вырождения I типа доказана.

Вырождение II типа. Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию: семейство $\mathscr{X}$ эллиптических поверхностей, заданное уравнением

$$\begin{gathered} y^2=x^3+a(t, \varepsilon)x+b(t, \varepsilon), \\ a(t, \varepsilon),\ b(t, \varepsilon)\in k[[\varepsilon]][t], \\ a(t, \varepsilon)\in(t, \varepsilon)^4, \quad b(t, \varepsilon)\in(t, \varepsilon)^6. \end{gathered} \tag{8}$$

Нас будут интересовать степени по t не $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$, но $a(t, 0)$ и $b(t, 0)$ и мы предположим, что

$$\deg a(t, 0)\leqslant 4r, \qquad \deg b(t, 0)\leqslant 6r. \tag{9}$$

В этом случае прообраз замкнутой точки X_s задается уравнением

$$y^2=x^3+t^4\alpha(t)x+t^6\beta(t),$$

т. е. является не минимальным. Мы определим «элементарную перестройку», цель которой — заменить этот слой соответствующим минимальным (при $t=0$) слоем

$$y_1^2=x_1^3+\alpha(t)x_1+\beta(t).$$

Это можно сделать, положив $x=t^2x_1$, $y=t^3y_1$. Однако во всем трехмерном семействе $\mathscr{X}$ такой перестройки можно добиться только за счет прибавления к замкнутому слою еще одной компоненты.

Это новое семейство $\mathscr{X}_1$ определено над базой Σ, получающейся из $\mathbf{P}_S^1$, σ-процессом в точке $t=0$, $\varepsilon=0$. Напомним, что Σ обладает морфизмом $\sigma:\Sigma\to\mathbf{P}_S^1$, и если $\mathbf{P}_S^1=V_1\cup V_0$, где $V_1=\{t\neq\infty\}$, а $V_0=\{t\neq 0\}$, то $\sigma^{-1}V_0\to V_0$ есть изоморфизм, а $\sigma^{-1}(V_1)=U_1\cup U_2$, причем

$$\begin{gathered} U_1=\operatorname{Spec} k[[\varepsilon]][t, \varepsilon_1]/(t\varepsilon_1-\varepsilon), \\ U_2=\operatorname{Spec} k[[\varepsilon]][t_2, \varepsilon]/(t_2\varepsilon-t) \end{gathered}$$

и множества $U_{12}\subset U_1$ и $U_{21}\subset U_2$ определены условиями $\varepsilon_1\neq 0$ и $t_2\neq 0$ и изоморфно отображаются друг на друга благодаря соотношению $\varepsilon_1 t_2 = 1$.

Семейство $\mathscr{X}_1$ определено над U_1 уравнением

$$y_1^2 = x_1^3 + a_1 x_1 + b_1,$$
$$a_1 = a(t, t\varepsilon_1)/t^4, \quad b_1 = b(t, t\varepsilon_1)/t^6,$$

а над U_2 — уравнением

$$y_2^2 = x_2^3 + a_2 x_2 + b_2,$$
$$a_2 = a(t_2\varepsilon, \varepsilon)/\varepsilon^4, \quad b_2 = b(t_2\varepsilon, \varepsilon)/\varepsilon^6.$$

Над $U_{12}\simeq U_{21}$ эти семейства склеиваются по формулам:

$$x_1 = x_2\varepsilon_1^2, \quad y_1 = y_2\varepsilon_1^3 \text{ на } U_{12},$$
$$x_2 = x_1 t_2^2, \quad y_2 = y_1 t_2^3 \text{ на } U_{21}.$$

Над U_1 при $t\neq 0$ формулы $x_1 = x/t^2$, $y_1 = y/t^3$ дают изоморфизм открытых множеств семейств $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$. Над U_2 при $\varepsilon\neq 0$ такой же изоморфизм дается формулами $x_2 = x/\varepsilon^2$, $y_2 = y/\varepsilon^3$. Таким образом, $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$ изоморфны на V_1 вне прообраза точки $(t=0,\ \varepsilon=0)$. Благодаря этому построенное над V_1 семейство $\mathscr{X}_1$ склеивается с прообразом $\mathscr{X}$ над множеством V_0 и дает единое семейство $\mathscr{X}_1$ над Σ, называемое элементарной перестройкой семейства $\mathscr{X}$ в слое $t=0$.

В $\mathscr{X}_1$ прообраз замкнутой точки X_s распадается на 2 компоненты: $X_s = X_0 \cup X_1$, причем X_0 определяется над U_1 уравнением $\varepsilon_1 = 0$, $y_1^2 = x_1^3 + a_1(t, 0)x_1 + b_1(t, 0)$, т. е. $y_1^2 = x_1^3 + \alpha(t)x_1 + \beta(t)$. Теперь $\deg\alpha(t)\leqslant 4(r-1)$, $\deg\beta(t)\leqslant 6(r-1)$. С прообразом U_2 эта компонента не пересекается. Чтобы исследовать компоненту X_1, положим

$$a(t, \varepsilon) = \sum_{i+j\geqslant 4} \alpha_{ij} t^i \varepsilon^j, \quad b(t, \varepsilon) = \sum_{i+j\geqslant 6} \beta_{ij} t^i \varepsilon^j.$$

Тогда X_1 задается над U_1 уравнениями

$$t = 0, \quad y_1^2 = x_1^3 + \Big(\sum_{i+j=4} \alpha_{ij}\varepsilon_1^j\Big) x_1 + \sum_{i+j=6} \beta_{ij}\varepsilon_1^j,$$

а над U_2 — уравнениями

$$\varepsilon = 0, \quad y_2^2 = x_2^3 + \Big(\sum_{i+j=4} \alpha_{ij} t_2^i\Big) x_2 + \sum_{i+j=6} \beta_{ij} t_2^i. \tag{10}$$

Кривая $Y_0 = X_0 \cap X_1$ задается уравнениями $\varepsilon_1 = 0$, $t = 0$, $y_1^2 = x_1^3 + a_1(0, 0)x_1 + b_1(0, 0)$ или же $y_1^2 = x_1^3 + \alpha(0)x_1 + \beta(0)$. Если эта кривая гладкая, то, как легко проверить, семейство $\mathscr{X}_1$ в любой точке кривой Y_0 — гладкое, X_0 и X_1 тоже гладки в этой точке и пересекаются трансверсально вдоль Y_0.

Теперь переходим к описанию последовательности элементарных перестроек, которые в результате дадут ту перестройку, существование которой утверждает теорема. Мы начинаем с семейства $\mathscr{X}$ поверхностей типа $K3$, имеющих при $\varepsilon=0$ умеренное вырождение II типа. Пусть в нем прообраз замкнутой точки X_s имеет неминимальный слой при $t=0$, т. е. для него имеют место формулы (8) с $r=2$. Тогда, совершив в этом слое элементарную перестройку, мы получим семейство $\mathscr{X}^{(1)}$, в котором прообраз замкнутой точки состоит из двух компонент: $X_s^{(1)}=$ $=X_0^{(1)}\bigcup X_1^{(1)}$, $X_0^{(1)}\bigcap X_1^{(1)}=Y_0$ — гладкая эллиптическая кривая, компонента $X_0^{(1)}$ бирационально изоморфна X_0, но имеет при $t=0$ минимальный слой, а компонента $X_1^{(1)}$ задается уравнением (10) с $r=1$ и поэтому или является рациональной поверхностью (если все ее слои минимальные) или имеет еще один не минимальный слой и тогда ее минимальная модель изоморфна $\mathbf{P}^1\times Y_0$. Заметим, что в этом последнем случае дискриминант эллиптического пучка (10) не равен нулю при $t_2=0$, значит, не равен нулю тождественно. То же верно и для компоненты $X_0^{(1)}$ — она или рациональна или имеет еще один неминимальный слой Y_1 и тогда ее минимальная модель изоморфна $\mathbf{P}^1\times Y_1$, откуда $Y_1\simeq Y_0$. Если обе компоненты $X_0^{(1)}$ и $X_1^{(1)}$ — рациональные поверхности, то наш процесс обрывается и теорема доказана. Если это не так, то одна из них или обе имеют не минимальный слой, не пересекающийся с Y_0, вдоль которого (или вдоль которых) мы опять производим элементарную перестройку. В результате каждой перестройки та компонента, в не минимальном слое которой мы эту перестройку совершали, заменятся компонентой $X_i^{(2)}\simeq\mathbf{P}^1\times Y_0$ ($i=0$ или 1), а в соответствующем минимальном слое эту компоненту пересекает новая компонента $X_j^{(2)}$, являющаяся опять рациональной поверхностью (если она минимальна) или не минимальной моделью поверхности $\mathbf{P}^1\times Y_0$, если она имеет не минимальный слой. Компоненту, пересекающуюся с $X_1^{(2)}$, мы обозначим $X_2^{(2)}$ (если она возникнет), а компоненту, пересекающуюся с $X_0^{(2)}$, — $X_{-1}^{(2)}$ (если она возникнет). Через несколько шагов мы получим семейство, вырожденный слой которого является цепочкой $\bigcup\limits_{i=-r}^{q} X_i$, $X_i\bigcap$ $\bigcap X_{i+1}\simeq Y_0$, $X_i(-r<i<q)$ изоморфны $\mathbf{P}_0^1\times Y_0$, а X_{-r} и X_q являются минимальными рациональными эллиптическими поверхностями или же имеют один не минимальный слой. В первом случае наш процесс закончен и теорема доказана, а во втором случае мы должны его продолжать, совершая элементарные перестройки в не минимальных слоях. Нам остается, таким образом, доказать, что рано или поздно наш процесс оборвется. Это доказательство совершенно аналогично для обоих концов цепочки ($i>0$ и $i<0$), так что мы изложим его для одного конца ($i>0$).

Предположим, что процесс построения семейств $\mathscr{X}^{(i)}$ продолжается до бесконечности: мы приводим это предположение к противоречию с тем, что общий слой является поверхностью типа $K3$, точнее говоря, с тем, что его вейерштрассова модель минимальна. По построению мы начинаем со случая, когда вырожденный слой имеет не минимальный слой над точкой $t=0$. Может оказаться, что после нескольких элементарных перестроек эта ситуация будет сохраняться. Докажем, однако, что так не может быть при всех элементарных перестройках, т. е. что рано или поздно мы придем к цепочке $X_0 \bigcup \cdots \bigcup X_q$, у которой поверхность X_q есть эллиптическое расслоение с не минимальным слоем над точкой $t=\lambda\neq 0$. Действительно, если бы при всех элементарных перестройках не минимальный слой находился бы над точкой $t=0$, то последовательность s перестроек задавалась бы формулами $t=t_s\varepsilon^s$ и полученное расслоение в вейерштрассовой форме имело бы уравнение (8) с коэффициентами

$$a_s(t_s, \varepsilon)=a(t_s\varepsilon^s, \varepsilon)/\varepsilon^{4s}, \qquad b(t_s, \varepsilon)=b(t_s\varepsilon^s, \varepsilon)/\varepsilon^{6s}. \tag{11}$$

Но общий слой семейства имеет над $t=0$ минимальный слой и поэтому или $a\not\equiv 0(t^4)$ или $b\not\equiv 0(t^6)$. Например, в первом случае в $a=\sum \alpha_{ij}t^i\varepsilon^j$ существует член $\alpha_{ij}t^i\varepsilon^j$ с $\alpha_{ij}\neq 0$, $0\leqslant i<4$. После подъема базы $\varepsilon=\varepsilon_1^k$ и преобразования по формулам (11) он даст член $\alpha_{ij}t^i\varepsilon_1^{kj+(i-4)s}$. Мы можем подобрать s так, что $kj+(i-4)s=0$ (так как $i<4$), т. е. положим

$$s=\frac{kj}{4-i} \tag{12}$$

(за счет выбора k мы добьемся того, что это число целое). В результате мы получим в $a_s(t_s, \varepsilon)$ член $\alpha_{ij}t^i$ с $\alpha_{ij}\neq 0$, а это показывает, что теперь $a_s(t_s, 0)\not\equiv 0(t^4)$, т. е. новое расслоение имеет над $t=0$ минимальный слой.

Таким образом, на некотором, например, s-м, шаге не минимальный слой в расслоении $\mathscr{X}^{(s)}$ окажется над точкой $t=\lambda\neq 0$. Докажем, что тогда при первых s перестройках нам не нужен был подъем базы. Действительно, наше предположение означает, что

$$a_s(t_s, 0)=\alpha(t_s-\lambda)^4, \quad b_s(t_s, 0)=\beta(t_s-\lambda)^6,$$

причем или $\alpha\neq 0$ или $\beta\neq 0$. Если, например, $\alpha\neq 0$, то в $a_s(t_s, 0)$ входит член γt_s^3 с $\gamma\neq 0$. Предположим, что в процессе мы сделали подъем базы $\varepsilon\to\varepsilon^k$ и что член γt_s^3 получился из члена $\delta t^3\varepsilon^j$ в $a(t, \varepsilon)$. Согласно формуле (12) тогда $s=kj$, т. е. $s\equiv 0(k)$ и наше преобразование $t=t_s\varepsilon_1^s$ записывается в виде $t=t_s\varepsilon^{s/k}$ без подъема базы.

Следовательно, если наш процесс перестроек продолжается бесконечно, то в нем (согласно первому замечанию) бесконечное число раз должно происходить изменение той точки, над которой находится не минимальный слой, а поэтому (согласно второму замечанию) весь процесс протекает без подъема базы. Если на первых s шагах не минимальный слой находился над точкой $t=0$, а на $s+1$-м он находится над точкой $t=\lambda\neq 0$, то

$$a_s(t_s, \varepsilon)\equiv\alpha(t_s-\lambda)^4(\varepsilon), \qquad b_s(t_s, \varepsilon)\equiv\beta(t_s-\lambda)^6(\varepsilon).$$

Из того, что $t=t_s\varepsilon^s$ и из формул (11) мы получаем, что

$$a(t_s\varepsilon^s, \varepsilon)\equiv\alpha\varepsilon^{4s}(t_s-\lambda)^4(\varepsilon^{4s+1}),$$
$$b(t_s\varepsilon^s, \varepsilon)\equiv\beta\varepsilon^{6s}(t_s-\lambda)^6(\varepsilon^{6s+1}),$$

т. е.

$$a(t,\ \varepsilon)\equiv\alpha(t-\lambda\varepsilon^s)^4(\varepsilon^{4s+1}),\qquad b(t,\ \varepsilon)\equiv\beta(t-\lambda\varepsilon^s)^6(\varepsilon^{6s+1}).$$

Положим $t-\lambda\varepsilon^s=t_1$, мы получим, что

$$a(t_1,\ \varepsilon)\in(t_1^4,\ \varepsilon^{4s+1}),\qquad b(t_1,\ \varepsilon)\in(t_1^6,\ \varepsilon^{6s+1}).$$

Продолжая такие подстановки, мы найдем степенной ряд $\varphi(\varepsilon)=$ $=\lambda\varepsilon^s+\lambda_1\varepsilon^{s_1}+\lambda_2\varepsilon^{s_2}+\cdots$, $s<s_1<s_2\cdots$, обладающий тем свойством, что для $\tau=t-\varphi(\varepsilon)$ $a(\tau,\ \varepsilon)\equiv0(\tau^4)$, $b(\tau,\ \varepsilon)\equiv0(\tau^6)$. Это означает, что общий слой имеет при $t=\varphi(\varepsilon)$ не минимальный слой, т. е. не является поверхностью типа $K3$. Полученное противоречие доказывает теорему.

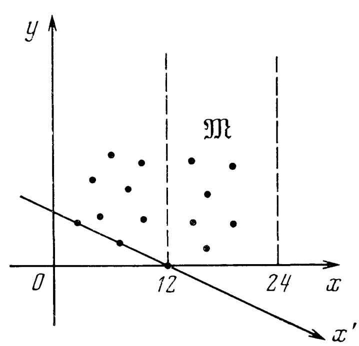
Замечания. 1. Последнее рассуждение в доказательстве теоремы можно пояснить следующей иллюстрацией. Сопоставим каждому члену $\alpha_{ij}t^i\varepsilon^j$ с $\alpha_{ij}\neq0$ в разложении $a(t,\ \varepsilon)=\sum\alpha_{ij}t^i\varepsilon^j$ точку на плоскости с координатами $(3i,\ 3j)$, а члену $\beta_{ij}t^i\varepsilon^j$ с $\beta_{ij}\neq0$ в разложении $b(t,\ \varepsilon)=$ $=\sum\beta_{ij}t^i\varepsilon^j$ точку с координатами $(2i,\ 2j)$. Мы получим множество точек $\mathfrak{M}$ на плоскости, причем $\mathfrak{M}$ содержится в «полуполосе» $y\geqslant0$, $0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant24$, отрезок оси x с $0\leqslant x<12$ не содержит точек из $\mathfrak{M}$ и точка $(12,\ 0)$ в $\mathfrak{M}$ содержится. Элементарная перестройка эквивалентна замене координат:

$$x'=x,$$
$$y'=y+x-12,$$

при которой ось y не меняется, а ось x поворачивается вокруг точки $(12,\ 0)$. Последовательность l преобразований такого вида вместе с заменой базы $\varepsilon=\varepsilon_1^k$ равносильна замене системы координат

$$x'=x,$$
$$y'=y+\gamma(x-4)$$

с произвольным рациональным $\gamma=l/k>0$. В результате такого преобразования мы можем взять за ось x «опорную прямую» множества $\mathfrak{M}$ (см. рисунок).



Тогда на новой оси x' будут лежать по крайней мере 2 точки множества $\mathfrak{M}$. Это означает, что не минимальный слой соответствующей компоненты расположен над точкой $t=\lambda\neq 0$. Как было доказано, в этом случае угловой коэффициент γ должен быть целым числом. Сдвиг $t_1=t-\lambda$ равносилен некоторой перестройке множества $\mathfrak{M}$, при которой все точки этого множества, кроме точки (12, 0), лежат уже строго выше новой оси x. Если этот процесс продолжается до бесконечности, то ось x, вращаясь вокруг точки (12, 0), подымается неограниченно высоко и в пределе мы получаем такое уравнение семейства $\mathscr{X}$, что для него множество $\mathfrak{M}$ не содержит точек в полосе $0\leqslant x<12$. Это означает, что $a(t, \varepsilon)\equiv 0(t^4)$ и $b(t, \varepsilon)\equiv 0(t^6)$, т. е. общий слой семейства не является поверхностью типа $K3$.

2. Если вырождение не является умеренным, то тот же процесс приводит к некоторой его перестройке, в которой прообраз замкнутой точки тоже имеет вид цепочки, однако ее компоненты уже имеют несколько более сложные особенности. Кажется правдоподобным, что дальнейшие перестройки этой цепочки могут привести к семействам с вырождениями того же типа, как найденные в характеристике 0 В. С. Куликовым [5].

3. Интересно было бы попробовать применить аналогичные рассуждения к исследованию поверхностей типа $K3$, являющихся двойными плоскостями. Полезные соображения в этом направлении содержатся в работе Хорикавы [4].

4. Приведем один пример к теореме 2. Пусть A_ε — невырождающееся при $\varepsilon=0$ семейство эллиптических кривых, а B_ε — такое семейство, что B_0 имеет мультипликативный тип. Возьмем за X_ε куммерову поверхность $(A_\varepsilon\times B_\varepsilon)/G$, $G=\{1, \sigma\}$, $\sigma(x, y)=(-x, -y)$. Проекции $A_\varepsilon\times B_\varepsilon\to A_\varepsilon$ и $A_\varepsilon\times B_\varepsilon\to B_\varepsilon$ определяют пучки $X_\varepsilon\to A_\varepsilon/G$ и $X_\varepsilon\to B_\varepsilon/G$, которые задают на X_ε две структуры сильно эллиптической поверхности. Если A_ε и B_ε задаются уравнениями:

$$A_\varepsilon : y^2=x^3+a(\varepsilon)x+b(\varepsilon),$$
$$B_\varepsilon : v^2=u^3+\alpha(\varepsilon)u+\beta(\varepsilon),$$

то соответствующие уравнения для X_ε имеют вид:

$$v^2=u^3+\alpha(\varepsilon)(t^3+a(\varepsilon)t+b(\varepsilon))^2u+\beta(\varepsilon)(t^3+a(\varepsilon)t+b(\varepsilon))^3,$$
$$y^2=x^3+a(\varepsilon)(t^3+\alpha(\varepsilon)t+\beta(\varepsilon))^2x+b(\varepsilon)(t^3+\alpha(\varepsilon)t+\beta(\varepsilon))^3.$$

Вырождения имеют соответственно I и II тип. Если минимальная модель семейства B_ε имеет вырожденный слой C типа A_n, то вырожденный слой семейства X_ε может быть взят в виде $(A_0\times C)/(1, \sigma)$, где σ — автоморфизм порядка 2 на A_0 и C. Если $C=\sum_{0\leqslant i\leqslant n} C_i$ является связной компонентой единицы, то

$$C/G=C_0/G+C_{\frac{n+1}{2}}/G+\sum_{0<i<\frac{n+1}{2}} C_i$$

(за счет подъема базы можно считать $n+1$ четным). Тогда $(A_0 \times G)/G$ имеет вид цепочки $X_0 \cup \ldots \cup X_{\frac{n+1}{2}}$, в которой $X_0 = (A_0 \times C_0)/G$, $X_{\frac{n+1}{2}} = (A_0 \times C_{\frac{n+1}{2}})/G$ — рациональные поверхности и $X_i = A_0 \times C_i$ при $0 < i < \frac{n+1}{2}$.

Мы возвращаемся к исследованию эллиптических поверхностей типа $K3$ над полем конечной характеристики.

ТЕОРЕМА 3. *Любое семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$, инвариант Хассе общего слоя которого равен 0, может быть перестроено, после некоторого подъема базы, в семейство, которое или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки с гладкими компонентами вырожденного слоя.*

Пусть задано семейство $\mathscr{X} \to S$, для которого выполнено условие $\lambda(X_\eta) = 0$. Прежде всего построим перестройку $\overline{\mathscr{X}}$, имеющую полустабильное вырождение. Для этого заметим, что задание семейства $\mathscr{X}$ равносильно заданию морфизма $\varphi : S \to \mathfrak{P}$ базы этого семейства во взвешенно-проективное пространство $\mathfrak{P}$. Обозначим через $\mathfrak{P}_{ss} \subset \mathfrak{P}$ открытое множество, состоящее из полустабильных точек пространства $\mathfrak{P}$ относительно действия группы $G = \mathrm{PGL}(2)$. Как известно, фактор $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}_{ss}/G$ существует и является проективным многообразием. Точка $\varphi(\eta)$ соответствует некоторой поверхности типа $K3$ и поэтому полустабильна. Поэтому мы имеем рациональное отображение $f : S \dashrightarrow \overline{\mathfrak{P}}$, $f = \psi\varphi$, где ψ — проекция $\mathfrak{P}_{ss} \to \overline{\mathfrak{P}}$. Ввиду полноты многообразия $\overline{\mathfrak{P}}$, f может быть расширено до морфизма $f : S \to \overline{\mathfrak{P}}$. На некотором накрытии $\bar{S} \to S$ этот морфизм может быть поднят до морфизма $\bar{f} : \bar{S} \to \mathfrak{P}_{ss}$, так что будет коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\bar{S} \arrow[d] \arrow[drr, "\bar{f}"] & & \\
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, "f"'] & \mathfrak{P} & \mathfrak{P}_{ss} \arrow[l] \arrow[d, "\psi"] \\
& & \overline{\mathfrak{P}}
\end{tikzcd}$$

Обратный образ определенного над $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_{ss}$ семейства расслоений дает над $\bar{S}$ нужное нам семейство $\overline{\mathscr{X}}$.

Теперь применим к $\overline{\mathscr{X}}$ теорему 1: она гарантирует, что вырождение семейства $\overline{\mathscr{X}}$ является умеренным. Таким образом, согласно теореме 2, существует перестройка $\mathscr{X}'$ этого семейства, которая или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки.

Пусть в построенной нами перестройке вырождение имеет вид цепочки: $X_s = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_m$, причем $X_1, \ldots, X_{m-1}$ изоморфны $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая, а X_0 и X_m — рациональные поверхности с пучком эллиптических кривых, все слои которого минимальны. Единственное, что отличает нашу ситуацию от того, что нам нужно доказать,— это возможное наличие особых точек на поверхностях X_0 и X_m. Но минимальные модели эллиптических поверхностей имеют только двойные рациональные особые точки. Поэтому здесь применима теорема, доказанная Г. Н. Тюриной [8] и Брискорном [3] над полями характеристики 0 и перенесенная Артиным [2] на поля конечной характеристики. Согласно этой теореме двойные рациональные особые точки могут быть разрешены в семействе за счет некоторого накрытия базы $S' \to S$. Нам остается проследить, что происходит с другими поверхностями нашей цепочки при этом накрытии. Если степень накрытия n, то локально $\mathcal{X} \times_S S'$ задается уравнением $xy = \tau^n$. Это уравнение совпадает с уравнением, определяющим особенность A_{n-1}. Поэтому при помощи тех же σ-процессов, что и при разрешении особенности A_{n-1}, мы разрешим нашу особенность, а в результате между X_i и X_{i+1} вклеится еще $n-1$ поверхность, изоморфная $\mathbf{P}^1 \times C$. В результате мы получим такое вырождение, существование которого утверждалось теоремой.

ТЕОРЕМА 4. *Семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$ с нулевым инвариантом Хассе тогда и только тогда может быть перестроено (после подъема базы) в невырождающееся семейство, когда его монодромия, действующая на группе $H^2(X_\eta)$, конечна.*

Ввиду теоремы 3 нам достаточно показать, что если семейство имеет вырождение типа цепочки, то его монодромия бесконечна. Для многообразий над полем комплексных чисел теория смешанных структур Ходжа устанавливает связь между монодромией семейства и геометрией вырожденного слоя. Это делается при помощи точной последовательности Клеменса — Шмида или спектральной последовательности Стинбринга — результаты в полезной для нас форме приведены в первом параграфе работы Куликова [5]. Недавно Рапопорт и Цинк [9] показали, что эти результаты имеют место и над полями конечной характеристики. В частности, устанавливается необходимое и достаточное условие конечности монодромии, доказанное ранее только над полем комплексных чисел. Нам будет достаточно следующее его следствие: *пусть семейство $\mathcal{X} \to S$ регулярно, вырожденный слой X_s распадается на гладкие поверхности X_i, имеющие нормальное пересечение, тогда монодромия бесконечна, если гомоморфизм ограничения*

$$\bigoplus_i H^1(X_i) \to \bigoplus_{i<j} H^1(X_i \cap X_j) \qquad (*)$$

не эпиморфен.

Нам остается применить этот критерий к вырождению типа цепочки: $X_s = X_0 \cup \cdots \cup X_n$. Положим $X_i \cap X_{i+1} = Y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как Y_i — эллиптические кривые, то $\operatorname{rg} H^1(Y_i) = 2$ и $\operatorname{rg}(\oplus H^1(X_i \cap X_j)) = 2n$. Среди поверхностей X_i X_0 и X_n — рациональные и поэтому $H^1(X_0) =$

$=H^1(X_n)=0$, а $X_1, \ldots, X_{n-1}$ — эллиптические линейчатые, так что $\mathrm{rg}\, H^1(X_i)=2$ при $i=1, \ldots, n-1$. Поэтому $\mathrm{rg}(\oplus(X_i))=2(n-1)$, так что гомоморфизм (*) не может быть эпиморфным.

ТЕОРЕМА 5. *Суперсингулярные сильно эллиптические поверхности типа К3 не вырождаются* *.

Иными словами, всякое семейство $\mathscr{X}\to S$, состоящее из таких поверхностей, может быть перестроено в гладкое семейство. Действительно, для суперсингулярной поверхности X

$$H^2(X, \mathbf{Q}_l) = (\mathrm{Pic}\, X)\otimes\mathbf{Q}_l,$$

а так как $\mathrm{Pic}\, X_\eta$ определен над конечным накрытием базы, то монодромия конечна. С другой стороны, одномерная формальная группа, сопоставляемая поверхности типа $K3$ [1], для суперсингулярной поверхности является аддитивной, поэтому инвариант Хассе такой поверхности равен 0 (касательное пространство к этой группе совпадает с $H^2(X, \mathcal{O})$, так что инвариант Хассе поверхности отличен от 0 тогда и только тогда, когда эта формальная группа изоморфна G_m). Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.

Как известно, *из доказанного утверждения следует аналог теоремы Торелли для сильно эллиптических суперсингулярных поверхностей типа* $K3$ и для отображения периодов, определенного Огасом [7]. Отсюда же следует и то, что *отображение периодов в этом случае является эпиморфным.*

Литература

1. *Artin M.* Supersingular $K3$ Surfaces.— Ann. Sci. l'Ecole Normale Superieure, 1974, 4-e ser., t. 7, fasc. 4, p. 543—567.
2. *Artin M.* Algebraic Construction of Brieskorn's Resolutions.— J. of Algebra, 1974, v. 29, № 2, p. 330—348.
3. *Brieskorn E.* Singular elements of semi-simple algebraic groups.— Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, 1970, t. 2, p. 279—290.
4. *Horikawa E.* Surjectivity of the Period Map of $K3$ Surfaces of Degree 2.— Math. Ann., 1977, B. 228, H. 2, s. 113—146.
5. *Куликов В. С.* Вырождения $K3$ поверхностей.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1977, т. 41, № 5, с. 1008—1042.
6. *Mumford D.* Geometric Invariant Theory. Berlin, 1965.
7. *Ogus A.* Supersingular $K3$ crystals. Paris: Asterisque, 1979, № 64, p. 3—86.
8. *Тюрина Г. Н.* Разрешение особенностей гладких деформаций изолированных рациональных двойных точек.— Функц. анализ и его прилож., 1970, т. 4, вып. 1, с. 77—83.
9. *Rapoport B.* und *Zink T.* Über die lokalen Faktoren der ζ-Funktion einiger Shimuramannigfaltigkeiten. Preprint, 1980.

Поступила в редакцию
20.I.1981

* Недавно авторы доказали теорему 5 без предположения о сильной эллиптичности.