Н. И. Дубровин, Некоммутативные кольца Крулля,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 8, 13–19

вложения [6] будем иметь $u_p \in \mathfrak{C}^{1/2}(G)$. В случае, когда носитель ψ_p не пересекается с M, утверждение теоремы 2 является следствием результатов работы [5]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4 проводится по той же схеме, что и теоремы 2, с учетом следующего локального результата о гладкости обобщенного решения.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты модельного оператора* (11) *удовлетворяют условию* (12), *функции* f, $f_{z,t}^k \in \mathrm{W}^p(G)$, $f_t^{k+p+1} \in L_2(G)$ *при* $p \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, *и выполняются условия* (8) *и* (9) *при* $l = k + p$. *Тогда найдется такое* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *что обобщенное решение* $u \in \mathrm{W}_{2p-\varepsilon}^{p+2}(G)$, $u_{z,t}^k \in \mathrm{W}_{2p-\varepsilon}^{p+2}(G)$ *и выполняется неравенство* $\|u\|_{\mathrm{W}_{2p-\varepsilon}^{p+2}} + \|u_{z,t}^k\|_{\mathrm{W}_{2p-\varepsilon}^{p+2}} \leqslant c\,[\|f\|_{\mathrm{W}^p} + \|f_{z,t}^k\|_{\mathrm{W}^p} + \|f_t^{k+p+1}\|_{L_2}]$.

Теорема 8 доказывается так же, как и теорема 1, с использованием результатов работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1965.— № 19.— С. 38—46.
2. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. матем. ин-та АН СССР.— 1971.— Т. 116.— С. 101—136.
3. Каратопраклиева М. Г. Об уравнениях смешанного типа и гиперболо-параболических уравнениях с разрывными коэффициентами // Докл. Болг. АН.— 1985.— Т. 38.— № 11.— С. 1453—1456.
4. Каратопраклиева М. Г. К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. I // Дифференц. уравнения.— 1987.— Т. 23.— № 1.— С. 85—102.
5. Каратопраклиева М. Г. К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. II // Дифференц. уравнения.— 1988.— Т. 24.— № 1.— С. 91—105.
6. Волевич Л. Р., Панеях Б. П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // УМН.— 1965.— Т. 20, вып. 1.— С. 3—74.
7. Арефьев В. Н. О задаче Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Тр. Моск. строит. ин-та.— 1979.— № 173.— С. 7—11.
8. Арефьев В. Н. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами.— М., 1977.— 18 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 20.05.77, № 1983—77.

г. Москва

Поступила
26.04.1990

Н. И. Дубровин

УДК 512.552

НЕКОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА КРУЛЛЯ

Введение

Работа посвящена некоммутативным кольцам Крулля в смысле Марубайаши [1]. Цель работы — применение техники некоммутативных колец дискретного нормирования, разработанной автором в статьях [2], [3], к изучению некоммутативных колец Крулля, подобно тому, как это делается в коммутативном случае (см. [4], гл. VII).

Перейдем к определению основных объектов. Под словом „кольцо" подразумевается ассоциативное кольцо с единицей. Символами $J(R)$, R^* будем обозначать радикал Джекобсона и множество регулярных элементов кольца R соответственно. Кольцо R называется матрично-локальным, если $R/J(R)$ — простое артиново кольцо. Если же кольцо $R/J(R)$ артиново, то R назовем полулокальным кольцом. Пусть R — порядок в простом артиновом кольце Q (см. [5]); аддитивную подгруппу I в Q назовем правым R-идеалом, если $IR = I$, I содержит обратимый в Q элемент, и $qI \subseteq R$ для некоторого $q \in Q^*$. Аналогично определяются левые R-идеалы. Правый R-идеал I назовем дивизориальным, если он совпадает с пересечением главных правых R-идеалов.

Определение 1 (см. [2], § 1, определение 7). Матрично-локальный порядок R простого артинова кольца Q назовем некоммутативным кольцом дискретного нормирования (НКДН), если $J(R)$ — главный правый и левый

R-идеал, и множество ненулевых двусторонних идеалов кольца R исчерпывается степенями радикала Джекобсона.

Конечно, можно привести более экономное определение НКДН, напр., такое: НКДН есть матрично-локальный порядок Асано в простом артиновом кольце. Суть, однако, состоит в том, что эти кольца играют ту же роль для некоммутативных колец Крулля и Дедекинда, что и кольца дискретного нормирования в коммутативном случае. Кроме того, любое кольцо (дискретного) нормирования центра простой конечномерной алгебры над полем может быть продолжено до некоммутативного кольца (дискретного) нормирования всей алгебры (см. [3], § 3, теорема 2).

Определение 2. Пусть R_i, $i \in \Lambda$, — семейство НКДН в простом артиновом кольце Q такое, что:

(К1) для любого регулярного элемента $q \in Q$ равенство $qR_i = R_i$ имеет место почти для всех $i \in \Lambda$;

(К2) для любого конечного семейства индексов $i_0, i_1, \ldots, i_n$ найдется элемент $q \in Q$ такой, что

$$q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, J(R_{i_0})); \; q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, J(R_{i_t})), \; 1 \leqslant t \leqslant n,$$

и $q \in R_j$ для остальных индексов j.

В этом случае пересечение $R = \bigcap R_i$ $(i \in \Lambda)$ назовем некоммутативным кольцом Крулля (НКК).

У читателя могут возникнуть претензии к условию (К2) в этом определении; аналогичное требование в коммутативном случае не нужно. Более того, условие (К2) может быть ослаблено до требования того, чтобы R_j были попарно независимы и пересечение R было бы порядком в Q в том важном частном случае (на который прежде всего и рассчитана данная работа), когда Q — простая конечномерная алгебра над полем. Однако в общем случае остается открытым вопрос о таком ослаблении условия (К2).

§ 1. Теорема об аппроксимации

Итак, пусть R — некоммутативное кольцо Крулля и семейство некоммутативных колец дискретного нормирования R_i, $i \in \Lambda$, удовлетворяет условиям (К1) и (К2) определения 2. Обозначим $P_i = J(R_i) \cap R$ $(i \in \Lambda)$. Понятно, что P_i — идеал кольца R, и фактор-кольцо R/P_i можно считать подкольцом простого артинова кольца $R_i/J(R_i)$. Пусть $q \in R_i \setminus J(R_i)$ ($\setminus$ — знак теоретико-множественной разности) и $i_1, \ldots, i_t$ — все индексы j такие, что $q \notin R_j$. Выберем элемент $a \in R$ с условием $a \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P_{i_j})$, $1 \leqslant j \leqslant t$; $a \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, P_i)$. Тогда $a^m q$, $q a^m \in R$ для подходящей степени m, причем эти элементы по-прежнему не лежат в $J(R_i)$. Этим доказано, что:

(I) *R/P_i — порядок в кольце $R_i/J(R_i)$.*

Отсюда вытекает:

(II) *P_i — первичный идеал кольца R.*

Для любого первичного идеала P кольца R множество $C(P)$ элементов из R, регулярных по модулю P, будет мультипликативно замкнутым.

(III) *Множество $C(P_i)$ является левой и правой системой Оре регулярных в кольце R элементов, локализация по которой совпадает с НКДН R_i.*

Докажем это утверждение. Из первого утверждения следует, что все элементы из $C(P_i)$ обратимы по модулю $J(R_i)$, а значит, обратимы и в кольце R_i. Отсюда следует, что все элементы из $C(P_i)$ регулярны в кольце R.

Пусть $r \in R$ и $c \in C(P_i)$. Тогда $rc_1 \equiv cr_1 \,(\mathrm{mod}\, P_i)$ для некоторых $r_1 \in R$ и $c_1 \in C(P_i)$. Это значит, что $m = rc_1 - cr_1 \in P_i$. Рассмотрим элемент $m_1 = c^{-1}m$. Так же, как и в доказательстве первого утверждения, найдем элемент $c_0 \in C(P_i)$ такой, что $m_1 c_0 \in R$. Тогда $rc_1c_0 = cr_1c_0 + mc_0 = c(r_1c_0 + m_1c_0)$, причем $c_1c_0 \in C(P_i)$ и $r_1c_0 + m_1c_0 \in R$. Этим доказано, что $C(P_i)$ — правая система Оре. Аналогично доказывается, что $C(P_i)$ — левая система Оре.

Прямым следствием доказанного утверждения является следующее:

(IV) *некоммутативное кольцо Крулля — двусторонний порядок в простом артиновом кольце.*

Отметим еще два легко проверяемых утверждения:

(V) $P_i \overset{\text{не}}{\subseteq} P_j$ *при* $i \neq j$;

(VI) $P_iR_j = R_jP_i = R_j$ *при* $i \neq j$ *и* $P_iR_i = R_iP_i = J(R_i)$.

Теорема 1 (об аппроксимации). *Пусть* R_i, $i \in \Lambda$, — *семейство НКДН простого артинова кольца* Q, *удовлетворяющее условиям* (K1) *и* (K2) *определения 2. Тогда для любых индексов* $i_1, \ldots, i_t \in \Lambda$, *элементов* $q_1, \ldots, q_t \in Q$ *и натуральных чисел* $n_1, \ldots, n_t$ *существует элемент* $q \in Q$ *такой, что*

$$q \equiv q_j (\operatorname{mod} J(R_{i_j})^{n_j}),\ j = 1, \ldots, t,$$

и $q \in R_j$ *для остальных* $i \in \Lambda$.

Доказательство. Во-первых, образуем конечное множество индексов Λ_0, объединив данный набор индексов $\Delta = \{i_1, \ldots, i_t\}$ со всеми $j \in \Lambda$, для которых совокупность элементов $q_1, \ldots, q_t$ не содержится в R_j. Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем элемент a_α кольца Q с условием $a_\alpha \equiv 1 \ (\operatorname{mod} J(R_\alpha))$, $a_\alpha \equiv 0 \ (\operatorname{mod} J(R_\beta))$, $\beta \in \Lambda_0$, $\beta \neq \alpha$, и $a_\alpha \in R_j$ для остальных $j \in \Lambda$. Тогда элемент $d_\alpha = (1 - a_\alpha)^k$ лежит в $J(R_\alpha)^k$ (k — натуральное число), а элемент $b_\alpha = (1 - d_\alpha)^m$ удовлетворяет сравнениям $b_\alpha \equiv 1 \ (\operatorname{mod} J(R_\alpha)^k)$, $b_\alpha \equiv 0 \ (\operatorname{mod} J(R_\beta)^m)$, $\beta \in \Lambda_0$, $\beta \neq \alpha$, и $b_\alpha \in R_j$ для $j \in \Lambda / \Lambda_0$.

Рассмотрим элемент $q = q_1 b_{i_1} + \ldots + q_t b_{i_t}$. В силу конечности множества Λ_0 найдется такое натуральное число l, что все элементы $q_1, \ldots, q_t$ лежат в $J(R_\beta)^{-l}$ для всех $\beta \in \Lambda_0$. Пусть $\alpha = i_s \in \Delta$. Тогда $q - q_\alpha = q_1 b_{i_1} + \ldots + q_s(b_\alpha - 1) + \ldots + q_t b_{i_t} \in J(R_\alpha)^{m-l} + J(R_\alpha)^{k-l}$. Если взять числа m и k достаточно большими, так что $m - l$ и $k - l$ были бы больше, чем $\max\{n_1, \ldots, n_t\}$, то $q - q_\alpha \in J(R_\alpha)^{n_s}$. При этом если $\beta \in \Lambda_0 \setminus \Delta$, то $q \in J(R_\alpha)^{m-l} \subseteq R_\alpha$. Кроме того, $q \in R_j$ для любого $j \in \Lambda_0$, т. к. в этом случае все b_α и q_i лежат в R_j. Следовательно, доказано, что элемент q искомый. Теорема доказана.

Одним из следствий теоремы об аппроксимации является следующее утверждение:

(VII) *некоммутативное кольцо Крулля ограничено, т. е. любой регулярный односторонний идеал содержит регулярный двусторонний идеал.*

Доказательство. Пусть $q \in R$ — регулярный элемент НКК R и R_i, $i \in \Lambda$, — семейство НКДН из определения 2. Пусть n_i — наименьшее целое число такое, что $qR_i \supseteq J(R_i)^{n_i}$. В силу условия (K1) почти все n_i равны нулю. Тогда идеал $J = \bigcap J(R_i)^{n_i}$ кольца R ненулевой в силу теоремы об аппроксимации. Кроме того, $qR_i \supseteq J$ для любого i. Тогда $qR \supseteq J$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что левый главный идеал Rq содержит ненулевой идеал кольца R.

Замечание. В доказательстве этого утверждения мы воспользовались ограниченностью НКДН. (По этому поводу см. [5], предложение 2.)

Из доказанных свойств (I)—(VII) следует, что определение 2 некоммутативного кольца Крулля дает тот же класс колец, что и определение Марубайаши ограниченного некоммутативного кольца Крулля (см. [1], § 1). Однако в определении 2 не задействовано такое, подчас трудно проверяемое, требование для колец R_i: быть существенными надкольцами кольца R.

§ 2. Теория дивизоров некоммутативных колец Крулля

Пусть R — порядок в простом артиновом кольце Q, I — правый R-идеал. Обозначим через I_d пересечение главных правых R-идеалов, содержащих I. Из определения односторонних R-идеалов вытекает, что I_d также будет правым R-идеалом и, более того, дивизориальным правым R-идеалом. Операцию $I \to I_d$ назовем дивизориальным замыканием.

Предположим теперь, что R — НКК и R_i, $i \in \Lambda$, — семейство НКДН в простом артиновом кольце Q, удовлетворяющее условиям (K1) и (K2) определения 2. Оказывается, в этом случае операцию дивизориального замыкания можно описать иначе.

Теорема 2. *Пусть I — дробный правый идеал некоммутативного кольца Крулля R. Тогда*

$$I_d = \bigcap IR_i,\ i \in \Lambda. \tag{1}$$

Доказательство. Если $I \subseteq aR$, то $IR_i \subseteq aR_i$. Следовательно, $\bigcap IR_i \subseteq \bigcap aR_i = a \bigcap R_i = aR$, и поэтому $\bigcap IR_i \subseteq I_d$, т. е. доказано включение „$\supseteq$" в (1).

Теперь докажем, что правая часть в (1) может быть записана в виде

$$\bigcap a_i R_i, \tag{2}$$

где $a_i \in Q^*$ и $a_i R_i = R_i$ почти для всех i. Действительно, пусть $d_1 R \subseteq I \subseteq d_2 R$ для некоторых регулярных элементов d_1, d_2. Тогда $IR_i = R_i$ для всех i, для которых $d_1 R_i = R_i = d_2 R_i$, а такие индексы составляют почти все индексное множество.

Докажем далее, что любой правый R-модуль вида (2) с условием $a_i R_i = R_i$ почти для всех i является дивизориальным правым R-идеалом. Пусть $a \notin \bigcap a_i R_i$ и, значит, $a \notin a_\alpha R_\alpha$ для какого-либо конкретного α. Выберем элемент $b \in Q^*$ с условием: $a_i R_i = bR_i$, если $a_i R_i \neq R_i$ или $i = \alpha$, и $b \in R_i$ в остальных случаях. Далее, выберем элемент $c \in Q^*$ так, что $cR_i = R_i$, если $a_i R_i \neq R_i$ или $i = \alpha$; $c^{-1} R_i = b^{-1} R_i$, если $a_i R_i = R_i$ и $bR_i \subset R_i$, и $c \in R_i$ в остальных случаях. Выбор элементов b и c можно осуществить согласно теореме об аппроксимации. В силу выбора элементов b и c имеем $a \notin bc^{-1} R_\alpha = a_\alpha R_\alpha$ и $bc^{-1} R_i \supseteq a_i R_i$, если $i \neq \alpha$. Тогда $bc^{-1} R = \bigcap bc^{-1} R_i \supseteq \bigcap a_i R_i$, причем $a \notin bc^{-1} R$. Это и означает, что $\bigcap a_i R_i$ совпадает с пересечением главных правых R-идеалов. Вместе с тем мы доказали, что $\bigcap a_i R_i$ — правый R-идеал. Регулярность этого правого идеала следует также из теоремы об аппроксимации.

Следствие. Множество дивизориальных правых R-идеалов состоит из пересечений вида (2), где $a_i \in Q^*$ и $a_i R_i = R_i$ почти для всех i.

Решетки дивизориальных правых или левых R-идеалов обладают тем недостатком, что они не несут никакой мультипликативной структуры в общем случае. Но, оказывается, их можно включить в более обширное множество с частичной алгебраической структурой группоида Брандта (о группоидах Брандта см., напр., [6], гл. 6, § 11). Далее до конца параграфа R — некоммутативное кольцо Крулля и R_i, $i \in \Lambda$,— семейство НКДН из определения 2.

Лемма 1. *Пусть $a_i \in Q^*$, $i \in \Lambda$, и $a_i R_i = R_i$ почти для всех i. Тогда*

$$S = \bigcap a_i R_i a_i^{-1},\ i \in \Lambda, \tag{1}$$

есть НКК, а аддитивная подгруппа $I = \bigcap a_i R_i$, $i \in \Lambda$, будет дивизориальным правым R- и левым S-идеалом. В частности, порядки S и R эквивалентны. Более того, левый множитель группы I совпадает с S, а правый — с R.

Доказательство. Для произвольно заданного элемента $d \in Q$ равенство $d(a_i R_i a_i^{-1}) = a_i R_i a_i^{-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда $d a_i R_i = a_i R_i$. Отсюда следует, что для семейства НКДН $a_i R_i a_i^{-1}$, $i \in \Lambda$, выполняется условие (К1). Условие (К2) для этого же семейства колец следует из теоремы об аппроксимации.

Пусть $O_l(I) = \{q \in Q \mid qI \subseteq I\}$, $O_r(I) = \{q \in Q \mid Iq \subseteq I\}$ — соответственно левый и правый множители группы I. Включения $O_l(I) \supseteq S$ и $O_r(I) \supseteq R$ следуют сразу из определения этих множеств. Докажем, что $R \supseteq O_r(I)$. Пусть $Iq \subseteq I$. Тогда $IqR_i \subseteq IR_i$. Но $IqR_i \supseteq a_i q R_i$ и $IR_i = a_i R_i$ (теорема об аппроксимации). Отсюда $a_i q R_i \subseteq a_i R_i$, и поэтому $q \in R_i$. Это рассуждение справедливо для любого индекса i и, значит, $q \in R$. Аналогично доказывается, что $S \supseteq O_l(I)$.

Согласно следствию теоремы 2 I — правый R-идеал. Так как $I = \bigcap (a_i R_i a_i^{-1}) a_i$, то, аналогично, I — левый S-идеал. Лемма доказана.

Теорема 3. *Рассмотрим множество $\operatorname{Div} R$ подгрупп N аддитивной группы Q, $+$ вида*

$$N = \bigcap a_i R_i b_i, \tag{4}$$

где a_i, $b_i \in Q^*$ и $a_iR_ib_i = R_i$ почти для всех i. Введем на этом множестве частичную операцию умножения $*$. Если $L = \bigcap c_iR_id_i$ — другой элемент множества $\mathrm{Div}\,R$, *то умножение $N * L$ определено в том и только том случае, когда $b_i^{-1}R_ib_i = c_iR_ic_i^{-1}$ для любого i. В этом случае полагаем $N * L = \bigcap a_ib_ic_iR_id_i = \bigcap a_iR_ib_ic_id_i$. Тогда множество* $\mathrm{Div}\,R$ *образует группоид Брандта относительно умножения $*$, единицами в котором будут некоммутативные кольца Крулля вида* (3). *Группоид* $\mathrm{Div}\,R$ *изоморфен прямой сумме группоидов* $\mathrm{Div}\,R_i$, $i \in \Lambda$.

Доказательство того факта, что $\mathrm{Div}\,R$, $*$ — группоид Брандта, с учетом леммы 1 превращается в стандартную проверку.

Докажем последнее утверждение теоремы. Отображение $\mathrm{Div}\,R \xrightarrow{\varphi} \oplus \mathrm{Div}\,R_i$ зададим так: $\bigcap a_iR_ib_i \to \oplus\, a_iR_ib_i$. Докажем корректность этого отображения.

Пусть $\bigcap a_iR_ib_i = \bigcap c_iR_id_i$. Требуется доказать, что $a_iR_ib_i = c_iR_id_i$ для любого $i \in \Lambda$. Зафиксируем $\alpha \in \Lambda$ и докажем равенство $a_\alpha R_\alpha b_\alpha = c_\alpha R_\alpha d_\alpha$. Прежде всего доказательство сведем к случаю $c_\alpha = d_\alpha = 1$. Так как $(\bigcap a_iR_ib_i)R_\alpha = a_\alpha R_\alpha b_\alpha R_\alpha$ по теореме об аппроксимации, то $a_\alpha R_\alpha b_\alpha R_\alpha = R_\alpha$. Отсюда следует включение $a_\alpha R_\alpha b_\alpha \supseteq R_\alpha$. Обратное включение $c_\alpha R_\alpha d_\alpha \subseteq a_\alpha R_\alpha b_\alpha$ доказывается аналогично.

§ 3. Некоммутативные кольца Крулля в простых конечномерных алгебрах над полем

В этом параграфе простое артиново кольцо Q будет конечномерной центральной алгеброй над полем K. Пусть A — область целостности с полем частных K. Напомним, что A-порядком называется подкольцо S алгебры Q такое, что каждый элемент из S цел над A, $S \supseteq A$, и $SK = Q$. Для заданной области целостности A построить какой-либо A-порядок не составляет труда: возьмем конечно-порожденный A-подмодуль M в Q такой, что $MK = Q$; тогда $O_l(M)$ (и, конечно, $O_r(M)$) будет A-порядком. Нетрудно видеть, что объединение любого количества линейно упорядоченных по включению A-порядков, а также пересечение конечного числа A-порядков будет снова A-порядком. В частности, отсюда следует, что существуют максимальные A-порядки. Как они устроены? Этому вопросу посвящено множество работ. Если A — кольцо дискретного нормирования и S — максимальный A-порядок, то S будет НКДН в алгебре Q, т.е. если A — дедекиндова область, то S — некоммутативное дедекиндово кольцо (см. [6], гл. 6). В § 3 работы [1] приведен ответ на поставленный выше вопрос в случае, когда A — кольцо Крулля с полем частных K, а именно, в этом случае любой максимальный A-порядок будет НКК алгебры Q. Ниже будет приведено более короткое доказательство этого факта, а также получен ответ на вопрос о том, как связаны между собой два максимальных A-порядка в этом случае.

Пусть V_i, $i \in \Lambda$, — семейство существенных колец дискретного нормирования поля K для кольца Крулля A, т.е. V_i попарно независимы и $A = \bigcap V_i$. Обозначим, далее, через S какой-либо A-порядок в Q. Для каждого $i \in \Lambda$ выберем НКДН R_i в Q, продолжающее V_i и содержащее SV_i (напр., какой-либо максимальный V_i-порядок, содержащий SV_i).

Теорема 4. *Семейство R_i, $i \in \Lambda$, удовлетворяет условиям* (K1) *и* (K2) *определения 2, некоммутативное кольцо Крулля $R = \bigcap R_i$ является максимальным A-порядком, содержащим S. Наоборот, любой максимальный A-порядок будет иметь вид* (3) *для некоторых $a_i \in Q^*$ таких, что $a_iR_ia_i^{-1} = R_i$ почти для всех i. В частности, любой максимальный A-порядок будет некоммутативным кольцом Крулля, эквивалентным R.*

Доказательство. Пусть $q \in Q^*$ и a_1, $a_2 \in A^*$ — такие элементы, что a_1q, $a_2q^{-1} \in S$. Если a_1, a_2 обратимы в V_i, то $q, q^{-1} \in SV_i$, и поэтому элемент q обратим в кольце R_i. Так как такие индексы составляют почти все индексное множество, то условие (K1) проверено. Справедливость условия (K2) для колец R_i вытекает из того, что это условие выполняется для колец V_i (см. [4], гл. VI, § 7), а также соотношений $V_i = R_i \cap K$, $J(V_i) = J(R_i) \cap K$.

Для продолжения доказательства теоремы понадобится одно утверждение о спектрах колец A и R, представляющее и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Обозначим $p_i = J(V_i) \cap A$; p_i — минимальный ненулевой простой идеал кольца A. Тогда существует ровно один первичный идеал $P_i = J(R_i) \cap R$ кольца R, лежащий над p_i. Для него*

$$R_{P_i} = R_{p_i} = R_i. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $r \in R_i \setminus J(R_i)$. Выберем элемент $c \in A$ с условием $c \equiv 1 \pmod{p_i}$ и $c \equiv 0 \pmod{p_j}$, если $r \notin R_j$. Тогда $rc^m \in R$ для достаточно большого натурального m, причем $c \in A \setminus p_i$. Тем самым доказано, что $R_{p_i} \supseteq R_i$. Так как включения $R_{p_i} \subseteq R_{P_i} \subseteq R_i$ очевидны, то соотношение (5) доказано. Пусть $P \in \operatorname{spec} R$ и $P \cap K = p_i$. Тогда PR_{p_i} — собственный идеал в R_{p_i}, отсюда $P \subseteq J(R_i) \cap R = P_i$. Из минимальности первичного идеала P_i следует, что $P = P_i$.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть T есть A-порядок, содержащий R. Для любого существенного нормирования V_i TV_i есть V_i-порядок, содержащий $RV_i = R_{p_i} = R_i$. В силу максимальности R_i получаем, что $TV_i = R_i$. Следовательно, $T \subseteq \bigcap TV_i = \bigcap R_i = R$ и, значит, $T = R$. Максимальность порядка R доказана.

Наоборот, пусть T — максимальный A-порядок. Из доказательства первой части теоремы следует, что T — НКК. Докажем, что T имеет вид (3).

Во-первых заметим, что если R_1 и T_1 — два НКДН в Q, лежащие над одним и тем же кольцом дискретного нормирования V, то они сопряжены. Этот результат справедлив не только для дискретного нормирования и, таким образом, можно было бы сослаться на соответствующую общую теорему (см. [7]). Но в этом частном нётеровом случае можно обойтись и без ссылок: R_1 и T_1 есть конечно-порожденные V-модули, отсюда $T_1R_1 = aR_1$ (R_1 — кольцо главных идеалов). Следовательно, $T_1 = O_l(aR_1) = aR_1a^{-1}$. Итак, T имеет вид (3) и остается доказать, что $a_iR_ia_i^{-1} = R_i$ почти для всех i.

Заметим, что т.к. $R \cap T$ есть A-порядок, то мы можем считать, что A-порядок S, о котором упоминалось в формулировке теоремы, содержится в $R \cap T$. Тогда завершает доказательство последнего утверждения и всей теоремы следующее

Предложение. *Почти для всех i имеет место равенство $SV_i = R_i$.*

Докажем это утверждение. Перейдем от A-порядка S к A-порядку S_0, лежащему в S, с дополнительным условием: S_0 — свободный A-модуль. Для этого в S надо выбрать какой-либо K-базис пространства Q и, если нужно, подвергнуть его гомотетии с коэффициентом из A. Понятно, что равенство $SV_i = R_i$ вытекает из равенства $S_0V_i = R_i$. В свою очередь, равенство $S_0V_i = R_i$ будет установлено, как только докажем, что S_0V_i — НКДН.

Обозначим через $f(x_1, \ldots, x_N)$ центральный полином, т.е. линейный полином с коэффициентами ± 1 алгебры Q, не равный тождественно нулю, причем f является тождеством для любой простой алгебры, имеющей меньшую размерность над центром, чем Q (см. [8]). Тогда $f(m_1, \ldots, m_N) = k \neq 0$ для некоторых элементов m_i A-модуля S_0. Имеем $k \in S \cap K = A$ и почти для всех i элемент k обратим в кольце V_i. Тогда для таких i f будет центральным, не равным тождественно нулю полиномом $V_i/J(V_i)$-алгебры $S_0V_i/S_0J(V_i)$. Следовательно, найдется максимальный идеал в этой фактор-алгебре, факторизация по которому приводит к простой алгебре, имеющей над центром размерность l, не меньшую, чем $\dim_K Q$. Но

$$l \leqslant \dim_{V_i/J(V_i)} S_0V_i/S_0J(V_i) = \dim_K Q. \qquad (6)$$

Следовательно, $S_0V_i/S_0J(V_i)$ — простая центральная $V_i/J(V_i)$-алгебра в этом случае, причем в силу равенства в соотношении (6) $S_0J(V_i)$ — единственный максимальный идеал в S_0V_i. Тогда S_0V_i — матрично-локальное кольцо, все собственные идеалы которого исчерпываются степенями идеала $S_0J(V_i)$, т.е. S_0V_i — НКДН. Доказательство теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marubayashi H. Non commutative Krüll rings // Osaka J. Math.— 1975.— V. 12.— № 3.— P. 703—714.
2. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования // Тр. Моск. матем. о-ва.— 1982.— Т. 45.— С. 265—280.
3. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования в простых конечномерных алгебрах над полем // Матем. сб.— 1984.— Т. 123.— № 4.— С. 496—509.
4. Бурбаки Н. Элементы математики. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.— 707 с.
5. Дубровин Н. И. О кольцах главных правых идеалов // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 2.— С. 30—37.
6. Джекобсон Н. Теория колец.— М.: Ин. лит., 1947.— 287 с.
7. Wadsworth A. R. Dubrovin valuation rings and henselization // Math. Ann.— 1989.— Bd. 283.— S. 301—328.
8. Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР.— 1973.— Т. 37.— № 3.— С. 483—501.

г. Владимир

Поступила 04.05.1990

Г. З. Златанов

УДК 514.764

О КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

Введение

Пусть $W_n(g_{is}, T_k)$ есть n-мерное пространство Вейля с метрическим тензором g_{is} и дополнительным вектором T_k. Следуя А. П. Нордену [1], можно принять, что метрический тензор g_{is} пространства W_n при перенормировании преобразуется по закону

$$\overset{\vee}{g}_{is} = \lambda^2 g_{is}, \tag{1}$$

а дополнительный вектор T_i — по формуле

$$\overset{\vee}{T}_i = T_i + \partial_i \ln \lambda, \tag{2}$$

где λ — функция точки.

Все псевдовеличины, преобразующиеся по закону

$$\overset{\vee}{A} = \lambda^k A, \tag{3}$$

будем называть спутниками веса $\{k\}$ тензора g_{is} [2].

Существование ковектора T_i позволяет ввести продолженное дифференцирование (см. [3]—[5]) спутников веса $\{k\}$ тензора g_{is} по формуле

$$\overset{\circ}{\nabla}_s A = \nabla_s A - kT_s A, \tag{4}$$

где $\nabla_s A$ — ковариантная производная.

Далее для простоты и краткости метрика пространства W_n считается эллиптической. Согласно [1] имеем

$$\overset{\circ}{\nabla}_k g_{is} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k g^{is} = 0, \tag{5}$$

где g^{is} — взаимный тензор для тензора g_{is}.

Пусть в $W_n(g_{is}, T_k)$ заданы независимые псевдовекторы $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$, удовлетворяющие условию

$$g_{is} \underset{\alpha}{v}^i \underset{\alpha}{v}^s = 1. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\underset{\alpha}{v}^i$ являются спутниками тензора g_{is} с весом $\{-1\}$.

Векторы $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$ определяют n-мерную сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$. Взаимную систему векторов $\overset{\alpha}{v}_i$ определим следующим образом: