

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Бережной, Н. Х. Галеева, А. И. Рахматуллин, Выбор параметров системы идентификации объектов. I. Аналитические модели,  
*Исслед. по информ.*, 2007, выпуск 12, 58–64

<https://www.mathnet.ru/ipi185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 09:40:38



# ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ I. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В.А. Бережной, Н.Х. Галеева, А.И. Рахматуллин

В данной статье изучается проблема выбора параметров устройства идентификации (опознавания) объектов. Предлагаются аналитические модели для получения общих оценок эффективности системы.

Процесс идентификации объектов заключается в приёме сигналов идентификации от объектов системой опознавания, анализе и обработке полученных сигналов, формировании и выдаче ответных сигналов [1].

Система идентификации объектов (СИО) может быть представлена как *трехфазная система массового обслуживания* (СМО), каждая фаза которой также является отдельной СМО (см. рис. 1):

1-я фаза – многоканальная СМО с отказами – является моделью подсистемы приёма сигналов;

2-я фаза – одноканальная СМО с очередью – реализует подсистему анализа, обработки и проверки полученных сигналов и формирования ответных сигналов;

3-я фаза – одноканальная СМО с отказами – представляет собой подсистему выдачи ответных сигналов.

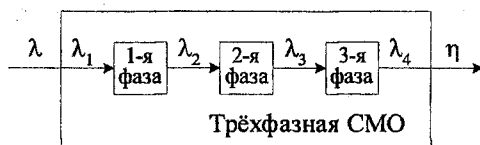


Рис. 1. Структура системы идентификации объектов

Здесь входной поток образуется поступающими в СИО заявками – сигналами от объектов, находящихся в зоне действия системы, устройствами обслуживания являются устройства приёма, обработки и выдачи сигналов. Под обслуживанием заявки системой будем понимать последовательное обслуживание заявки во всех фазах данной системы.

Для описания функционирования СИО в зависимости от вида фаз системы, их взаимодействия между собой, а также параметров системы необходимо использовать разные математические модели системы. При этом полный учёт многочисленных особенностей работы СИО возможен в случае имитационного моделирования системы.

Предлагаемые аналитические модели СИО являются частным случаем математической модели нестационарной системы обслуживания, рассмотренной в работе [2]. При этом исследуется стационарный режим функционирования системы, так как время ее работы на несколько порядков превышает время между поступлениями заявок и времени обслуживания в каждой фазе. Данные аналитические модели служат как для получения оценок вероятностей обслуживания, так и для проверки результатов имитационного моделирования СИО, рассмотренного ниже.

Введем следующие обозначения параметров СИО, используемые во всех рассматриваемых моделях [3, 4]:  $\lambda$  – интенсивность потока заявок, поступающих на обслуживание;  $\mu_k = 1/\bar{t}_{обс, k}$  – интенсивность обслуживания заявок в  $k$ -й фазе системы, где  $\bar{t}_{обс, k}$  – среднее время обслуживания заявки в  $k$ -й фазе,  $k = 1, 2, 3$ ;  $\mu'_k$  – эквивалентная интенсивность обслуживания в  $k$ -й фазе (см. ниже),  $k = 1, 2, 3$ ;  $\rho'_k = \lambda/\mu'_k$  – приведенная интенсивность обслуживания в соответствующей  $k$ -й фазе,  $k = 1, 2, 3$ ;  $M$  – число каналов (устройств) обслуживания в 1-й фазе системы;  $Q$  – длина очереди заявок во 2-й фазе системы;  $\nu = 1/\bar{t}_{оч}$  – интенсивность потока уходов заявок из очереди 2-й фазы системы, где  $\bar{t}_{оч}$  – среднее время ожидания заявки в очереди;  $\kappa = \nu/\mu'_2$  – приведенная интенсивность потока уходов заявок из очереди;  $\chi_k = \bar{t}_{обс, k}/\bar{t}_{обс, 2}$  – относительная (ко 2-й фазе) интенсивность обслуживания заявок,  $k = 1, 3$ .

Пусть также  $S_{ijk}$  – состояние системы, при котором в 1-й фазе СИО находится  $i$  требований, во 2-й фазе –  $j$  требований, а в 3-й –  $k$  требований,  $p_{ijk}$  – вероятность того, что система пребывает в состоянии  $S_{ijk}$ .

В общем случае модель СИО, учитывающая нахождение всех требований во всех фазах системы, оказывается очень громоздкой для получения аналитического решения. Поэтому в ряде случаев оказывается удобным так называемая эквивалентная замена, или приведение, фаз системы, рассмотренная ниже. В результате такого приведения фаз состояние СИО будет определяться лишь присутствием требования в соответствующей фазе, что позволяет использовать упрощенные математические модели и получать аналитическое решение для стационарного режима работы СИО.

*Приведение фазы системы.* Представим фазу СИО в виде одноканальной СМО с отказами, в которой вероятность обслуживания равна вероятности обслуживания в исходной СМО с учётом текущего значения интенсивности входного потока. Такое представление будем называть *эквивалентной* (в смысле вероятности обслуживания) *заменой* исходной СМО на одноканальную СМО с отказами, или же *приведением* (в том же смысле) исходной СМО к одноканальной СМО с отказами.

Пусть некоторая фаза СИО представляет собой СМО заданного вида с интенсивностью входного потока  $\lambda^*$  и интенсивностью обслуживания заявок  $\mu^*$ , при этом  $\lambda^* = \lambda \cdot P^*$ , где  $P^*$  – вероятность обслуживания многофазной СМО, включающей в себя все предыдущие фазы СИО.

Рассчитаем эквивалентную интенсивность обслуживания  $\mu'$ . Для исходной СМО по типу системы и её параметрам рассчитываем вероятность обслуживания заявок в этой системе  $P_{обс}^*$ . Приравнявая эту вероятность к вероятности обслуживания в эквивалентной одноканальной СМО с отказами, получаем

$$P_{обс}^* = 1/(1 + \rho''), \rho'' = \lambda/\mu',$$

откуда получаем требуемую эквивалентную интенсивность обслуживания

$$\mu' = \frac{\lambda^*}{1/P_{обс}^* - 1} = \frac{\lambda \cdot P^*}{1/P_{обс}^* - 1}.$$

Следует отметить, что данный способ допустимо применять лишь в том случае, когда данная фаза независима от других фаз СИО. В противном случае необходимо вводить корректирующие коэффициенты, учитывающие данную зависимость, либо не использовать метод приведения для данной фазы системы.

*Модель системы без блокировки.* Будем считать, что каждая из фаз системы действует независимо друг от друга. В этом случае граф переходов СИО будет иметь вид, представленный на рис. 2.

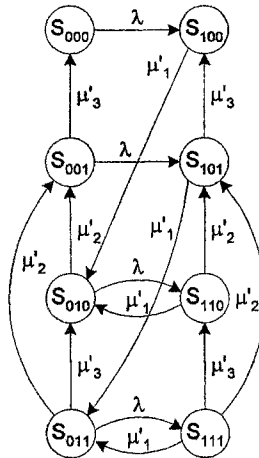


Рис. 2. Граф переходов СИО без блокировки

В соответствии с этим графом получаем следующую модель СИО:

$$P_{000} = ((1 + \rho'_1) \cdot (1 + \rho'_2) \cdot (1 + \rho'_3))^{-1}, P_{001} = \rho'_3 P_{000},$$

$$\begin{aligned}
 P_{011} &= \frac{\lambda^2 \mu'_1 (\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3)}{\mu'_3 (\mu'_1 + \mu'_2) (\mu'_2 + \mu'_3) (\mu'_1 + \mu'_3)} P_{000}, \\
 P_{101} &= \frac{\lambda^2 (\lambda + \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3)}{\mu'_3 (\mu'_1 + \mu'_2) (\mu'_1 + \mu'_3)} P_{000}, \\
 P_{111} &= \frac{\lambda}{\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3} P_{011}, \quad P_{010} = \frac{\lambda + \mu'_3}{\mu'_2} P_{001} - P_{011}, \\
 P_{100} &= \rho'_1 P_{000} + \frac{\mu'_3}{\mu'_1} P_{101}, \quad P_{110} = \frac{\lambda}{\mu'_1 + \mu'_2} P_{010} + \frac{\mu'_3}{\mu'_1 + \mu'_2} P_{111}.
 \end{aligned}$$

Вероятность обслуживания заявок системой определяется как отношение произведения вероятности нахождения требований в последней фазе и интенсивности обслуживания в этой фазе к интенсивности входного потока [5]. В нашем случае имеем

$$P_{\text{обсз,н}} = (P_{001} + P_{101} + P_{011} + P_{111}) \cdot \mu'_3 / \lambda = [\rho_a + \rho_d \cdot (\rho_c + \rho_d)] / (\rho_a \cdot \rho_b),$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_a &= (\rho'_1 + \rho'_2) \cdot (\rho'_1 + \rho'_3) \cdot (\rho'_2 + \rho'_3), \\
 \rho_b &= (1 + \rho'_2) \cdot (1 + \rho'_3) \cdot (1 + \rho'_3), \\
 \rho_c &= \rho'_1 \cdot \rho'_2 \cdot \rho'_3, \quad \rho_d = \rho'_1 \cdot \rho'_2 + \rho'_1 \cdot \rho'_3 + \rho'_2 \cdot \rho'_3.
 \end{aligned}$$

*Модель системы с полной блокировкой.* Рассмотрим случай, когда поступление заявки в 3-ю фазу вызывает блокировку принятия заявок в 1-ю фазу, а обслуживание заявки в 3-й фазе приводит к потере заявок, обслуживаемых в 1-й и 2-й фазах. Граф переходов СИО для данной модели представлен на рис. 3.

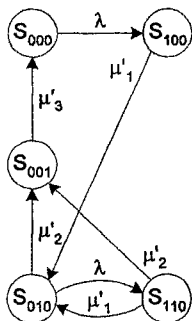


Рис. 3. Граф переходов СИО с полной блокировкой

Используя граф переходов, получаем следующую модель СИО:

$$\begin{aligned}
 P_{000} &= (1 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)^{-1}, \quad P_{001} = \rho'_3 P_{000}, \quad P_{100} = \rho'_1 P_{000}, \\
 P_{010} &= \frac{\rho'_2 \cdot (\rho'_1 + \rho'_2)}{\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_1 \cdot \rho'_2} P_{000}, \quad P_{110} = \frac{\rho'_1 \cdot \rho'_2 \cdot \rho'_2}{\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_1 \cdot \rho'_2} P_{000}.
 \end{aligned}$$

Тогда вероятность обслуживания в данной системе равна

$$P_{\text{обсз,п}} = p_{001} \cdot \mu'_3 / \lambda = p_{001} / \rho'_3 = p_{000} = (1 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)^{-1}.$$

Следует отметить, что, как уже отмечено выше, данная модель непосредственно применима для системы только с одним каналом в 1-й фазе. При приведении многоканальной 1-й фазы необходимо учесть блокировку заявок, приводящую к уменьшению интенсивности поступающего в систему потока заявок и потере заявок в данной фазе.

*Модели системы с частичной блокировкой.* Рассмотрим случай, когда, в отличие от модели с полной блокировкой, блокировка вызывает сбой приходящих заявок, но они принимаются на обслуживание в систему и отсеиваются лишь на выходе из 1-й фазы, что более соответствует технической реализации обработки сигналов и позволяет учесть реальную загрузку системы. Граф переходов для системы с одним каналом в 1-й фазе представлен на рис. 4.

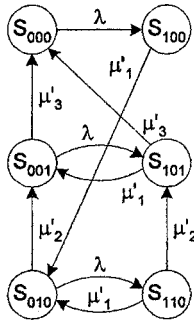


Рис. 4. Граф переходов СИО с частичной блокировкой и одним каналом в 1-й фазе

Решая систему уравнений, получаемую с помощью графа переходов, легко вычислить вероятность обслуживания в данной системе

$$P_{\text{обсз,ч1}} = (p_{001} + p_{101}) \cdot \mu'_3 / \lambda = p_{000} = (1 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)^{-1}.$$

Таким образом, несмотря на увеличение загрузки системы за счёт обслуживания в 1-й фазе сбившихся из-за блокировки заявок, вероятность обслуживания заявок осталась такой же, как и в приведённой выше модели с полной блокировкой.

Рассмотрим систему с двумя каналами в 1-й фазе. При этом не будем использовать приведение 1-й фазы с необходимостью учёта блокировки. Для данной системы получаем граф переходов, представленный на рис. 5.

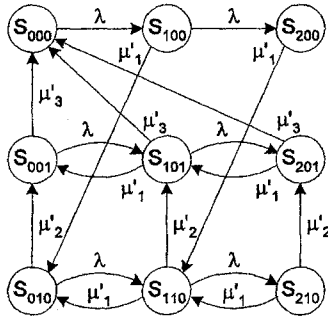


Рис. 5. Граф переходов СИО с частичной блокировкой и двумя каналами в 1-й фазе

Решая систему уравнений, получаемую по данному графу переходов, вычисляем вероятность обслуживания в данной системе

$$P_{\text{обсз,ч2}} = (p_{001} + p_{101} + p_{201}) \cdot \mu'_3 / \lambda = p_{000} = (1 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)^{-1}.$$

Рассмотрим систему с тремя каналами в 1-й фазе также без приведения этой фазы, граф переходов которой представлен на рис. 6.

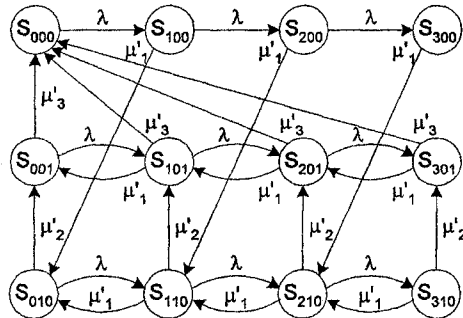


Рис. 6. Граф переходов СИО с частичной блокировкой и тремя каналами в 1-й фазе

Имеем

$$P_{\text{обсз,ч3}} = (p_{001} + p_{101} + p_{201} + p_{301}) \cdot \mu'_3 / \lambda = p_{000} = (1 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)^{-1}.$$

Таким образом, вероятности обслуживания для систем с частичной блокировкой и с одним, двумя и тремя каналами в 1-й фазе одинаковы.

*Сравнение моделей СИО.* Сравним вероятности обслуживания трёх-фазных СИО без блокировки и с полной блокировкой. Предположим, что интенсивности обслуживания заявок в каждой из трёх фаз обеих систем равны, т.е.  $\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = \mu'$ , или, переходя к приведённым интенсивностям обслуживания,  $\rho'_1 = \rho'_2 = \rho'_3 = \rho$ . Тогда получаем:

$$P_{\text{обсз,н}} = \frac{3\rho^2 + 9\rho + 8}{8(1+\rho)^3}, P_{\text{обсз,п}} = \frac{1}{1+3\rho}.$$

Рассмотрим разность между данными вероятностями

$$\Delta P_{\text{обсз}} = P_{\text{обсз,н}} - P_{\text{обсз,п}} = \frac{\rho(3+\rho)^2}{8(1+3\rho)(1+\rho)^3}.$$

Очевидно,  $\Delta P_{\text{обсз}} > 0$  при  $\rho > 0$ . По необходимому условию экстремума функции имеем

$$\frac{d(\Delta P_{\text{обсз}})}{d\rho} = \frac{3(3+\rho)(1-\rho-7\rho^2-\rho^3)}{8(1+3\rho)^2(1+\rho)^4}.$$

Решая уравнение  $1-\rho-7\rho^2-\rho^3=0$  с учётом дополнительного ограничения  $0 < \rho \leq 2$ , получаем значение  $\rho_{\text{опт}} \approx 0,3075$ , при котором разность максимальна.

Таким образом, введение блокировки уменьшает вероятность обслуживания, а максимальное уменьшение достигается при  $\rho_{\text{опт}} \approx 0,3075$ .

Во второй части статьи будет рассмотрена имитационная модель СИО, позволяющая учесть дополнительные особенности функционирования аппаратуры идентификации объектов.

## Литература

1. Алексеев А. Системы опознавания "свой – чужой" стран НАТО // Зарубежное военное обозрение. – 1999. – № 11. – С. 35-39.
2. Моисеев В.С., Рахматуллин А.И. Математические модели и методы оптимизации нестационарных систем обслуживания. – Казань: РИЦ «Школа», 2006.
3. Анализ возможностей применения методов и моделей теории массового обслуживания при разработке перспективных изделий: Тех. отчёт по договору ПМ6–СМ // Рук. В.С.Моисеев; С.С.Зайдуллин, Н.Х.Галеева, А.И.Рахматуллин. – Казань, 2002.
4. Имитационное моделирование системы обработки сигналов при разработке перспективных изделий: Тех. отчёт по договору ПМ6–СМ // Рук. В.С.Моисеев; Н.Х.Галеева, А.И.Рахматуллин. – Казань, 2003.
5. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: теория и применения. – М.: Мир, 1965.