



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

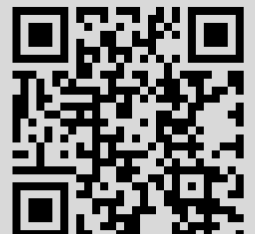
И. Ш. Славутский, Вещественное квадратичное поле и гипотеза Анкени–Артина–Човлы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2002, том 286, 159–168

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

12 февраля 2025 г., 22:55:33



И. Ш. Славутский

ВЕЩЕСТВЕННОЕ КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ И  
ГИПОТЕЗА АНКЕНИ—АРТИНА—ЧОВЛЫ

Памяти Я. В. Успенского,  
Б. А. Венкова и А. А. Киселева,  
“связки” петербургских теоретикочисловиков

Рассматриваемая ниже гипотеза Анкени–Артина–Човлы (в дальнейшем ААЧ-гипотеза) может трактоваться как изучение частного случая более общей задачи рассмотрения арифметических свойств чисел Бернулли (и их обобщений). В обзоре автора [1] приведен ряд примеров, в которых фигурируют связи между числами Бернулли  $B_i$  ( $1 \leq i \leq p-1$  для фиксированного простого нечетного числа  $p$ ) и различными вопросами теории чисел, алгебраической геометрии, функционального анализа, топологии. Однако, в целом, наши знания относительно индивидуальных чисел Бернулли весьма скудны. Если быть точными, мы можем упомянуть лишь два факта (полученных, кстати, одновременно в 1840 году):

1) теорема Штаудта–Клаузена для знаменателей чисел Бернулли ([2] или [3]) и

2)  $B_{(p+1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , следствие сравнения Коши [4]

$$h(-p) \equiv -2B_{(p+1)/2} \pmod{p}, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (1)$$

Обсудим здесь лишь один специальный случай  $i = (p-1)/2$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

**1<sup>0</sup>**. Как известно, с помощью аналитических методов, разработанных математиками XIX века, были получены классические формулы для числа классов абсолютно абелевых числовых полей. В общем случае (даже для вещественных квадратичных полей!) они содержали трансцендентные функции. Но число классов есть число натуральное, так что возникает несколько задач:

(i) получить формулы для числа классов арифметическим путем;

(ii) придать формулам арифметический характер; или хотя бы  
 (iii) предложить арифметический метод вычисления числа классов.

Здесь мы остановимся на простейшем случае – вещественном квадратичном поле, связанном с обсуждаемой ААЧ-гипотезой.

Как известно, для мнимого квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  с фундаментальным дискриминантом  $d < 0$  первый существенный вклад в этом направлении принадлежит Б. А. Венкову ([5] или [6]). К 1931 году, используя лишь арифметические методы, он предложил доказательство формул для числа классов мнимых квадратичных полей в случае  $d \not\equiv 1 \pmod{8}$  (на языке бинарных квадратичных форм). Заметим, что некоторое упрощение (и дополнение) этих результатов можно найти в работах Р. Левиса [7, 8]. Что касается вещественного квадратичного поля, то к 1945 году серией работ, принадлежащих Х. Тиге, Х. Хассе и Г. Бергстрему (см., например, [9]) был построен алгоритм для арифметического вычисления числа классов  $h(d)$ ,  $d < 0$ , исходя из формул Дирихле. Задача рационализации формул Дирихле в этом случае оставалась нерешенной (детали см. в [10]).

В 1948 году А. А. Киселевым [11] опубликована хорошо известная в настоящее время заметка, содержащая сравнение

$$h(p)U_1 \equiv T_1 B_{(p-1)/2} \pmod{p}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (2)$$

Здесь  $h(p)$  и  $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$  – соответственно число классов и главная единица вещественного квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ , а числа Бернулли  $B_n$  приведены в четной нумерации, так что  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_{2n+1} = 0$  для  $n \in \mathbf{N}$ .

Далее в 1948–1949 гг. Киселев [12, 13] публикует серию подобных сравнений  $\pmod{p}$ , связывающих число классов  $h(d)$  с числами (и полиномами) Бернулли в случаях:

- 1)  $d < 0, d = -np, n \in \mathbf{N}$  и  $(n, p) = 1$ ;
- 2)  $d < 0, p \nmid d$ ;
- 3)  $d > 0, d = np, n \in \mathbf{N}$  и  $(n, p) = 1$ ;
- 4)  $d > 0, p \nmid d$ ,

где  $d$  – фундаментальный дискриминант соответствующего квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ .

Заметим, что первый случай содержит некоторые частные результаты А. Гурвица [14], а именно  $d = -3p$  и  $d = -5p$ .

В частности, если  $h(d) < p$  и коэффициент  $h(d)$  (в правой части этих сравнений) взаимно прост с  $p$ , мы получаем арифметический способ вычисления числа классов  $h(d)$ . Кстати, напомним, что к тому времени уже было известно, что  $h(d) = O(\sqrt{d})$  для вещественного квадратичного поля. В действительности мы теперь имеем более точные результаты, например,  $h(p) < \sqrt{p}/2$  для простого нечетного числа  $p \equiv 1 \pmod{4}$  (см. [15]). Поэтому, если  $U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  (что то же самое,  $B_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ), как это следует из сравнения Киселева (2)), то для поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$  мы получаем арифметический способ вычисления  $h(p)$ , однако лишь в случае, когда  $U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ !

В то время Киселев затруднялся сказать что-либо относительно условия

$$U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

В 1951–1952 гг. Н. Анкени, Э. Артин и С. Човла публикуют две работы [16, 17], в которых с помощью  $p$ -адических методов авторы получают сравнение для числа классов квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ , но только в случае  $d > 0$  и  $p|d$ . Как выяснилось впоследствии, эти работы оказались очень важны при построении широко известных в настоящее время конструкций  $p$ -адических  $L$ -функций Куботы–Леопольдта.

Отметим, что правая часть ААЧ-сравнений содержит функцию – целую часть числа. Эквивалентность этих результатов и сравнений Киселева, содержащих числа и многочлены Бернулли, может быть установлена с помощью обобщенного сравнения Вороного (см. [18] и [19]). Кстати, в случае  $d = p \equiv 1 \pmod{4}$  для доказательства эквивалентности этих результатов достаточно использовать один старый результат М. Лерха [20].

Отметим, что по поводу всех этих результатов Хассе [21] заметил, что они требуют систематизации, а решение этой задачи можно найти в недавно опубликованной работе автора [22]: система четырех сравнений естественным образом сведена к двум (по модулю  $p^l$ ,  $l \in \mathbf{N}$ ).

В цитированной работе [17] авторы указывают, что условие (3) было ими проверено для  $p \equiv 5 \pmod{8}$ ,  $p < 2000$ , и предположили, что оно выполняется для любого такого простого числа  $p$ . Заметим далее, что в 1959 году несколько более общее предположение было сформулировано в [18] (и независимо несколько позже в заметке [23]):

Если свободное от квадратов ядро фундаментального дискриминанта  $d$  вещественного квадратичного поля является простым нечетным числом  $p$ , т.е.  $\text{Kern}(d) = p$ , то для главной единицы  $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$  этого поля выполняется условие  $U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Выше мы видели, что сравнение (2) соответствует сравнению (1) для числа классов мнимого квадратичного поля. Теперь мы рассмотрим частный случай другого сравнения Киселева:

$$h(4p)U_1 \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{2}{p}\right) T_1 E_{(p-3)/2} \pmod{p}, \quad p \equiv 3 \pmod{4},$$

где  $E_n$  – число Эйлера (см. [24] для  $l = 1$ ). Как известно, здесь также  $h(4p) < p$ . Тогда, если  $\left(\frac{p-3}{2}, p\right)$  не является иррегулярной парой для чисел Эйлера, то  $U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Рассматриваемый же теперь случай соответствует мнимому квадратичному полю  $\mathbf{Q}(\sqrt{-4p})$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , где, в частности, сравнение Киселева ([12] или [13], см. также более позднюю работу Карлица [25]), имеет вид

$$h(-4p) \equiv \frac{1}{2} E_{(p-1)/2} \pmod{p}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Здесь  $h(-4p) < p$  (см., например, [26]), так что  $E_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Отметим, что, как информировал Морделл [23], приведенная выше расширенная ААЧ-гипотеза была проверена для простых чисел  $p < 18000$ . Обратим также внимание на то, что если даже  $\text{Kern}(d) = 2p$ , распространение гипотезы ошибочно. Например,  $d = 8 \cdot 23$  и  $U_1 = 23 \cdot 29$ .

Заключим эту часть работы замечанием, что упомянутые выше результаты автора дают арифметическое представление формул Дирихле для числа классов вещественных квадратичных полей. Действительно, пусть  $p > 3$  – простое нечетное число и  $\chi$  – символ Кронекера (с соответствующим кондуктором). Доказано, что

$$h(d)U_l/p^{l-1} \equiv -T_l B_{m,\chi}/(2m) \pmod{p^l}, \quad m = (p-1)p^l/2, \quad \chi \pmod{n},$$

где  $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{d}$  – главная единица поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d = np > 0$ ,

$\varepsilon_l = T_l + U_l\sqrt{d} = \varepsilon_1^{p^{l-1}}$ ,  $B_{n,\chi}$  – обобщенные числа Бернулли, принадлежащие характеру  $\chi$ , а  $l, n \in \mathbf{N}$  ([24], [27]). Если мы заметим, что  $\text{ord}_p U_1 = \text{ord}_p(U_l/p^{l-1})$  и  $p \nmid T_l$  ([26], лемма), то мы можем решить последнее сравнение с одной неизвестной величиной

$h(d)$ . Действительно, достаточно только выбрать  $l \geq \alpha + \beta$ , где  $\alpha = \text{ord}_p U_1$  и  $h(d) < \sqrt{d} < p^\beta$

Мы хотели бы закончить эту часть несколько более общим замечанием о связи компоненты  $U_1$  основной единицы вещественного квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d = np$ , с обобщенными числами Бернулли. В выбранных обозначениях выполняется равенство

$$\text{ord}_p U_1 = \text{ord}_p(B_{m,\chi}/m)$$

для  $1 \leq n < p$ . Здесь  $m = \frac{p-1}{2}p^{l-1}$ ,  $p > 3$ ,  $l \in \mathbf{N}$  и  $\chi \pmod n$  – символ Кронекера. В действительности, отмеченное равенство верно для  $1 \leq n < 4p$ , как это следует из недавно доказанных результатов [15].

**Замечание.** Очевидно, что для простого дискриминанта  $p = a^2 + 1$  или  $a^2 + 4$  утверждение ААЧ-гипотезы верно. Но мы не знаем ответа на вопрос: существует ли бесконечно много простых чисел, например, формы  $a^2 + 1$ . См. также недавнюю заметку [28], принадлежащую Р. Хашимото.

**2<sup>0</sup>.** Может оказаться, что утверждение  $B_{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p$ ,  $p \equiv 1 \pmod 4$  (или, что то же самое,  $U_1 \equiv 0 \pmod p$ ) встретится для достаточно большого простого числа  $p$  (см. [29], гл. 5). Это обстоятельство является, вероятно, одним из стимулов для появления работ, содержащих далеко продвинутое вычисления. Недавно появившаяся работа группы авторов [30] перечисляет основные этапы процесса проверки ААЧ-гипотезы для всех простых чисел  $p < L$ ,  $L \in \mathbf{N}$ . При этом всегда подсчитывалось значение  $U_1 \pmod p$ . В цитируемой публикации применялся алгоритм, использовавший два совмещенных компьютера и проверивший интервал  $(10^9, 10^{11})$ . Так что к настоящему моменту ААЧ-гипотеза проверена для  $p < 10^{11}$ .

**3<sup>0</sup>.** ААЧ-гипотеза была сформулирована в виде (3) или

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod p, p \equiv 1 \pmod 4. \quad (4)$$

К настоящему моменту известно довольно много эквивалентных форм гипотезы. Ниже кратко перечислены некоторые из них.

**I. Следствие формулы Бернулли и некоторые результаты, связанные с частными суммами гармонического ряда ([31], [32])**

Например,

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p} \iff \sum_{i=1}^{p-1} i^{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p-1} i^{-(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Имеется и много других подобных результатов, в частности, см. работы Лерха [20] и Т. Аго, Т. Шойи [33].

## II. Произведения квадратичных вычетов и невычетов $(\text{mod } p)$

Если  $\mathbf{A} = \prod_r r, 0 < r < p, \left(\frac{r}{p}\right) = 1$ , и  $\mathbf{B} = \prod_n n, 0 < n < p, \left(\frac{n}{p}\right) = -1$ , где  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$  – символ Лежандра, то

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p} \iff (\mathbf{A} + \mathbf{B})/p \not\equiv 0 \pmod{p},$$

см. [16] (доказательство приводится в работе Карлица [34]).

## III. Представление натурального числа суммами нечетного количества целых квадратов

Тождество Морделла для представления натурального числа  $n$  суммами  $s$  квадратов содержит коэффициенты  $\alpha_s(k), 2 \nmid s$ . Здесь  $s > 8$  и  $k = 1, \dots, \epsilon$ , где  $\epsilon \in \mathbf{N}$  и однозначно определено условием  $8\epsilon < s \leq 8(\epsilon + 1)$ .

В случае  $s = p, p \equiv 1 \pmod{4}$ , для первого коэффициента  $\alpha_p(1)$  справедливо

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0 \pmod{p} \iff 8\alpha_p(1)/p \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Детали см. в заметке [35].

## IV. $p$ -адические $L$ -функции, принадлежащие символу Лежандра

Рассмотрим вновь вещественное квадратичное поле  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$  с фундаментальным дискриминантом  $d = p, p \equiv 1 \pmod{4}$ . Как известно,

$$2h(p)U_l/p^{l-1} \equiv -T_l B_m/m \pmod{p^l}, m = \frac{p-1}{2}p^{l-1}, l \in \mathbf{N}, \quad (5)$$

а  $T_l + U_l\sqrt{d} = (T_1 + U_1\sqrt{d})^{p^{l-1}}$  ([27]). Методами, развитыми в [36], был получен  $p$ -адический вариант формулы Дирихле для числа классов поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$  в форме

$$2h(p) \frac{\log \varepsilon_1}{\sqrt{p}} = L_p(1, \omega^{(p-1)/2}), \quad (6)$$

представляющий собой частный случай теперь хорошо известного общего результата Г. -В. Леопольдта (см., например, монографию [29]). Здесь  $\omega$  – характер Тейхмюллера  $\text{mod } p$ , значения которого принадлежат полю  $p$ -адических чисел  $\mathbf{Q}_p$ . Тогда характер  $\chi = \omega^{(p-1)/2} = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$  представляет собой символ Лежандра. Далее  $\text{ord}_p(U_l/p^{l-1}) = \text{ord}_p U_1$  и  $U_l/(T_l p^{l-1}) \rightarrow \frac{\log \varepsilon_1}{\sqrt{p}}$  при условии, что  $l \rightarrow \infty$ , так что из (5) и (6) следует

$$\left| L_p \left( 1, \left( \frac{\cdot}{p} \right) \right) \right|_p = 1 \iff U_1 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Но, к сожалению, наши знания о  $L_p(s, \chi)$  недостаточны и лишь известно, что  $L_p \left( 1, \left( \frac{\cdot}{p} \right) \right) \neq 0$  (относительно деталей см. [36–38]).

#### V. Кольца вещественного квадратичного поля

Одно тривиальное замечание [27]: {ААЧ-гипотеза верна}  $\iff$  {главная единица вещественного квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , не совпадает с главной единицей кольца дискриминанта  $d = p^3 n^2$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , рассматриваемого поля}.

#### VI. Неразветвленное расширение простого кругового поля (Н.Накагошу [39])

Пусть  $p \equiv 1 \pmod{4}$  – простое число,  $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$  – главная единица вещественного квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ . Если обозначить  $k = \mathbf{Q}(\exp(2\pi i/p))$ , то

$$U_1 \equiv 0 \pmod{p} \iff \{k(\sqrt[p]{\varepsilon_1}) \text{ – неразветвленное поле степени } p \text{ над } k\}.$$

Заметим, что доказательство автора не использует гипотезу Вандивера о втором множителе числа классов поля  $k$ , а ряд интересных замечаний сделан в предположении, что главная единица поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$  удовлетворяет условию (3).



## VII. Гиперболические отражения классического уравнения Пелля

Исходя из известной связи главной единицы  $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$  вещественного квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , и соответствующего уравнения Пелля (см., например, [9]), М. Шейнгорн [40, 41] соотносит арифметические свойства компоненты  $U_1$  (в частности, выполняется или нет условие (3)) с геометрическими свойствами определенных отражений на соответствующую гиперболическую поверхность. Арифметическая часть работ автора использует результаты статей [16–18, 23].

<sup>4</sup>0. В заключение мы приводим еще одно замечание, касающееся нулей  $p$ -адических  $L$ -функций ([42, 43]).

Рассмотрим  $p$ -адическую  $L$ -функцию, принадлежащую характеру  $\chi = \omega^{-s}$ . Тогда для  $2 \leq s < p-5$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , верна импликация

$\{\beta \equiv s+1 \pmod{p}\}$  является нулем  $p$ -адической  $L$ -функции, принадлежащей характеру  $\omega^{-s}$   $\Rightarrow B_{(p-1)p-s} \equiv 0 \pmod{p^2}$ .

Далее, используя сравнение Куммера

$$B_{(p-1)p-s} \equiv \frac{p(p-1)-s}{p-s-1} B_{p-1-s} \pmod{p}$$

для  $p \geq 13$  и  $s = (p-1)/2$ , мы заключаем

$$\begin{aligned} \{\beta \equiv (p+1)/2 \pmod{p}\} \text{ является нулем } L_p(s, \omega^{-(p-1)/2}) \\ \Rightarrow B_{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

или

$$L_p\left(\beta, \left(\frac{p}{\cdot}\right)\right) = 0 \Rightarrow \text{ААЧ-гипотеза ошибочна.}$$

Здесь мы использовали то, что характер  $\omega^{-(p-1)/2} = \omega^{(p-1)/2} = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$  является символом Лежандра.

### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ш. Славутский, *Очерк истории исследования арифметических свойств числа Бернулли. Штаудт, Куммер, Вороной*, Историко-мат. исследования **32/33** (1991), 158–181.
2. К. Г. С. von Staudt, *Beweis eines Lehrsatzes die Bernoulli'schen Zahlen betreffend*, J. Reine Angew. Math. **21** (1840), 373–374.
3. Т. Clausen, *Lehrsatz aus einer Abhandlung über die Bernoullischen Zahlen*, Astron. Nachr. **17**, (1840), 351–352.

4. A. L. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des nombres*, Mémoires Acad. Sci., Paris **17** (1840), 249–269, 235–455.
5. B. A. Venkov, *Über die Klassenzahl positiver binärer quadratischer Formen*, Math. Zeitschr. **33** (1931), 350–374.
6. B. A. Venkov, *Elementary Number Theory*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1970.
7. R. W. Davis, *Class number formulae for imaginary quadratic fields. I*, J. für Reine Angew. Math. **286/287** (1976), 369–379.
8. R. W. Davis, *Class number formulae for imaginary quadratic fields. II*, J. Reine Angew. Math. **299/300** (1978), 245–255.
9. H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Springer, Berlin (1964).
10. А. А. Киселев, И. Ш. Славутский, *Преобразование формул Дирихле и арифметическое вычисление числа классов идеалов квадратичных полей*, Тр. 4-го Всесоюзн. Мат. съезда, 1961, Изд. "Наука" **2** (1964), 105–112.
11. А. А. Киселев, *Выражение числа классов идеалов вещественных квадратичных полей через числа Бернулли*, Докл. СССР **61** (1948), 777–779.
12. А. А. Киселев, *Выражение числа классов идеалов квадратичных полей через числа Бернулли*, Научн. сессия ЛГУ. Тезисы докл. по секц. мат. наук, 1948, 37–39.
13. А. А. Киселев, *О некоторых сравнениях для числа классов идеалов вещественных квадратичных полей*, Учен. зап. ЛГУ, Сер. мат. наук, No. 16 (1949), 20–31.
14. A. Hurwitz, *Über die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, Acta Math. **19** (1895), 351–384.
15. M.-N. Le, *Upper bound for class numbers of real quadratic fields*, Acta Arithm. **68** (1994), 141–144.
16. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, *The class numbers of real quadratic fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 524–525.
17. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, *The class numbers of real quadratic number fields*, Ann. Math. **56** (1952), 479–493.
18. А. А. Киселев, И. Ш. Славутский, *О числе классов идеалов квадратичного поля и его колец*, Докл. СССР **126** (1959), 1191–1194.
19. И. Ш. Славутский, *Обобщенное сравнение Вороного и число классов многого квадратичного поля. II*, Известия ВУЗ'ов. Математика, No. 4(53) (1966), 118–126.
20. M. Lerch, *Zur Theorie des Fermatschen Quotienten  $(a^{p-1} - 1)/p = q(a)$* , Math. Ann. **60** (1905), 471–490.
21. H. Hasse, *Review of paper [2]*, Zbl.43.40.
22. I. Sh. Slavutskii, *On the generalized Bernoulli numbers that belong to unequal characters*, Rev. Mat. Iberoamericana **16**, No. 3 (2000), 459–475.
23. L. J. Mordell, *On a Pellian equation conjecture. II*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 282–288.
24. И. Ш. Славутский, *О числе классов вещественного квадратичного поля*, Известия ВУЗ'ов. Математика No. 4(17) (1960), 173–177.
25. A. L. Carlitz, *The class numbers of an imaginary quadratic number fields*, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 338–345.

26. И. Ш. Славутский, *Оценка сверху и арифметическое вычисление числа классов идеалов вещественных квадратичных полей*, Известия ВУЗ'ов. Математика No. 2(45) (1965), 161–165.
27. И. Ш. Славутский, *Некоторые сравнения для числа классов вещественного квадратичного поля с простым дискриминантом*, Учен. зап. Ленингр. Гос. Педагог. ин-та им. А. И. Герцена **218** (1961), 179–189.
28. R. Hashimoto, *Ankeny–Artin–Chowla conjecture and continued fraction expansion*, J. Number Theory **90**, No. 1 (2001), 143–154.
29. L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, 2th ed., Springer, Berlin, 1997.
30. A. J. van der Poorten, H. J. J. te Riele, H. C. Williams, *Computer verification of the Ankeny–Artin–Chowla conjecture for all primes less than  $10^{11}$* , Math. Comp. **70**, No. 235 (2001), 1311–1318.
31. L. J. Mordell, *Recent work in number theory*, Scripta Math. **25** (1960), 93–103.
32. I. Sh. Slavutskii, *Leudesdorf's theorem and Bernoulli numbers*, Arch. Math. (Brno) **35** (1999), 299–303.
33. T. Agoh, T. Shoji, *Quadratic equations over finite fields and class numbers of real quadratic fields*, Monatsh. Math. **125**, No. 4 (1998), 279–292.
34. L. Carlitz, *Note on the class number of real quadratic fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 535–537.
35. И. Ш. Славутский, *Бескватратные числа и квадратичное поле*, Colloq. Math. **32** (1975), 291–300.
36. И. Ш. Славутский, *О числе классов дивизоров вещественного квадратичного поля. II*, В кн: Современная алгебра. Межвузовский сб. научн. работ, Ленинград, 1980, 124–128.
37. A. Brumer, *Travaux récent d'Iwasawa et de Leopoldt*, Séminaire Bourbaki, 19e année (1966/67) **325** (1968), 1–14.
38. И. Ш. Славутский, *L-функции локального поля и вещественное квадратичное поле*, Известия ВУЗ'ов. Математика No. 2(81) (1969), 99–105.
39. N. Nakagoshi, *On the unramified extension of the prime cyclotomic number field and its quadratic extension*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 151–164.
40. M. Sheingorn, *Hyperbolic reflections of Pell's equation*, J. Number Theory **33**, No. 3 (1989), 267–285.
41. M. Sheingorn, *The  $\sqrt{p}$  Riemann surface*, Acta Arithm. **63**, No. 3 (1993), 255–266.
42. L. C. Washington, *p-adic L-functions and sums of powers*, J. Number Theory **69**, No. 1 (1998), 50–61.
43. I. Sh. Slavutskii, *Partial sums of the harmonic series, p-adic L-functions and Bernoulli numbers*, Tatra Mt. Math. Publ. **20** (2000), 11–17.