



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Samuta, V. A. Strelova, R. I. Parovik, Nonlocal model of neoclassical economic growth Solow, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, Number 2, 37–41

DOI: 10.18454/2079-6641-2012-5-2-37-41

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

January 15, 2025, 22:23:49



УДК 519.86

## **НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕОКЛАССИЧЕСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СОЛОУ**

**Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И.**

Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031,  
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложено обобщение модели Солоу, когда изменения ресурсов в производственной функции описывается производными дробных порядков в смысле Герасимова – Капуто. В результате мы приходим к важной экономической величине – капиталовооруженности, в которая характеризуется степенными функциями типа Миттаг-Леффлера.

*Ключевые слова: модель Солоу, оператор Герасимова – Капуто, функция типа Миттаг-Леффлера*

© Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И., 2012

MSC 00A71

## **NONLOCAL MODEL OF NEOCLASSICAL ECONOMIC GROWTH SOLOW**

**Samuta V.V., Strelova V.A., Parovik R.I.**

Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,  
Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

In generalization of the Solow model, when the change in resources in the production function described derivatives of fractional order in the sense of the Gerasimov – Caputo. As a result, we come to an important economic value — capital-labor ratio, which is characterized in stpennymi functions of Mittag-Leffler.

*Key words: Solow model, the operator Gerasimov – Caputo, function of the type Mittag-Leffler*

© Samuta V.V., Strelova V.A., Parovik R.I., 2012

## Введение

Как известно, модель Солоу считается односекторной динамической моделью экономического роста [1]. Особенностью такой экономической модели является то, что объектом исследования выступает единственный универсальный продукт (ЕУП), который в свою очередь потребляется в производственной и в непроизводственной сферах. В качестве ЕУП может выступать денежная оценка всей экономике. В производственной сфере потребление ЕУП может рассматриваться как инвестирование.

## Постановка задачи

Экономическая система, которая описывается в рамках этой модели явно не учитывает возможность экспорта или импорта и определяется двумя группами параметров: внутренними и внешними [1]. Внутренние параметры, которые зависят непрерывно от времени  $t$ :  $L(t)$  – трудовые ресурсы или затраты труда;  $K(t)$  – производственные фонды  $Y(t)$  – ЕУП, который определяется производственной функцией;  $C(t)$  – непроизводственные фонды;  $I(t)$  – инвестиции. Внешние параметры:  $-1 < a < 1$  – годовой темп прироста трудовых ресурсов;  $0 < b < 1$  – коэффициент выбытия капитала;  $0 < \eta < 1$  – норма накопления. Будем считать, что производственные и трудовые ресурсы для производства годового ЕУП расходуются полностью.

ЕУП определяется производственной функцией неоклассического типа. Обозначим эту функцию  $Y = F(K, L)$ . Эта функция является однородной функцией первого порядка, т.е. выполнено  $Y = F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ , а также обладает следующими свойствами:

- 1)  $Y = F(K, 0) = F(0, L) = 0$ , т.е. отсутствие какого-либо из ресурсов не дает производить ЕУП;
- 2)  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0$  – рост ресурсов влечет к росту производства;
- 3)  $\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0$  – с увеличением количества ресурсов темп роста производства замедляется;
- 4)  $Y = F(K, \infty) = F(\infty, L) = \infty$  – при неограниченном росте ресурсов производство неограниченно возрастает.

Из распространенных производственных функций, наиболее удовлетворяющих перечисленным выше условиям, является функция Кобба – Дугласа:

$$Y = F(K, L) = AK^\gamma L^{1-\gamma}, A > 0, 0 < \gamma < 1. \quad (1)$$

В работе [2] для вывода производственной функции предложена методика основанная на дробном исчислении [3]. Предполагается, что производственная функция  $F(K, L)$  – является решением следующего дифференциального уравнения дробного порядка:

$$\mu_1 D_{0K}^{\alpha_K} + \mu_2 D_{0L}^{\alpha_L} = 0, \quad (2)$$

где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – некоторые технические параметры,  $0 < \alpha_K, \alpha_L < 1$ . Решение такой задачи можно записать с помощью функции типа Миттаг-Леффлера:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha} E_{\alpha_K, \alpha_K}(\lambda_K K^{\alpha_K}) E_{\alpha_L, \alpha_L}(\lambda_L L^{\alpha_L}), E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (3)$$

где  $\lambda_K$  и  $\lambda_L$  – управляющие параметры,  $A_0 > 0$  – произвольная константа. Если в (3) положить  $\alpha_K + \alpha_L = 3$ ,  $A = A_0 / [\Gamma(\alpha_K) \Gamma(\alpha_L)]$ , то мы получим функцию Кобба – Дугласа (1). Существуют и другие методики определения производственных функций [4].

С другой стороны ЕУП используется на непроемственное потребление и инвестиции:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (4)$$

Инвестиции  $I(t)$  также можно представить через ЕУП и коэффициент накопления  $\eta$   $I(t) = \eta Y(t)$ , поэтому (4) можно записать  $Y(t) = C(t) + \eta Y(t)$  и отсюда непроемственные фонды можно найти из соотношения:

$$C(t) = Y(t) (1 - \eta). \quad (5)$$

Рассмотрим изменение ресурсов  $L(t)$  и  $K(t)$  в моменты времени  $t$ . В работе [1] изменение трудовых ресурсов  $L(t)$  описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dL(t)}{dt} = aL, L(0) = L_0, \quad (6)$$

где  $L_0$  – начальные трудовые ресурсы. В работе [5] изменение трудовых ресурсов происходит по логистическому закону:

$$\frac{dL(t)}{dt} = [a - \varepsilon L(t)]L(t), L(0) = L_0, \varepsilon \geq 0. \quad (7)$$

В работе мы будем предполагать, что прирост трудовых ресурсов будет происходить по другому закону:

$$\partial_{0t}^{\alpha_K} L(\tau) = aL, L(0) = L_0, \quad (8)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha_L} L(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_L)} \int_0^t \frac{L'(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha_L}}$  – оператор дробной производной порядка  $\alpha_L$  в

смысле Герасимова – Капуто [5]. Уравнение (8) считается нелокальным за счет степенного ядра в операторе дробного дифференцирования. Запасы капитала  $K(t)$  изменяются за счет инвестиций и выбытия капиталов (амортизации). В работе [1] запасы  $K(t)$  описываются дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \eta Y(t) - bK(t), K(0) = K_0, \quad (9)$$

где  $K_0$  – начальные запасы капитала. Мы обобщим закон (9), следуя уравнению (8)

$$\partial_{0t}^{\alpha_K} K(t) = \eta Y(t) - bK(t), K(0) = K_0, 0 < \alpha_K < 1. \quad (10)$$

Надо отметить, что при  $\alpha_K = \alpha_L = 1$  мы получим соотношения (6) и (9). Нелокальная модель Солоу с учетом соотношений (5), (8), (9) может быть записана так:

$$\begin{cases} Y(t) = F(K(t), L(t)), \\ C(t) = Y(t) (1 - \eta), \\ \partial_{0t}^{\alpha_K} L(\tau) = aL, L(0) = L_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_K} K(t) = \eta Y(t) - bK(t), K(0) = K_0, 0 < \alpha_K < 1. \end{cases} \quad (11)$$

## Решение задачи

Последние два уравнения имеют решения [6]:

$$L(t) = L_0 E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L}),$$

$$K(t) = K_0 E_{\alpha_K, 1}(-bt^{\alpha_K}) + \eta \int_0^t Y(\tau) (t - \tau)^{\alpha_K - 1} E_{\alpha_K, \alpha_K}(-b(t - \tau)^{\alpha_K}) d\tau.$$

Введем в рассмотрение величину  $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$  – капиталовооруженность. Тогда капиталовооруженность перепишем в виде:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K, 1}(-bt^{\alpha_K})}{E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L})} + \frac{\eta}{E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L})} \int_0^t Y(\tau) (t - \tau)^{\alpha_K - 1} E_{\alpha_K, \alpha_K}(-b(t - \tau)^{\alpha_K}) d\tau, \quad (12)$$

где  $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$ . Функция  $E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L})$  не имеет вещественных нулей [3], поэтому ограничений в (12) на  $t$  нет. Рассмотрим производственную функцию Кобба – Дугласа (1), подставим ее в решение (12) с учетом ее однородности, получим:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K, 1}(-bt^{\alpha_K})}{E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L})} + \frac{\eta A}{E_{\alpha_L, 1}(at^{\alpha_L})} \int_0^t k^\gamma(\tau) (t - \tau)^{\alpha_K - 1} E_{\alpha_L, 1}(a\tau^{\alpha_L}) E_{\alpha_K, \alpha_K}(-b(t - \tau)^{\alpha_K}) d\tau. \quad (13)$$

Уравнение (13) является нелинейным уравнением Вольтерра второго рода, его можно решить методом квадратур [7].

Необходимо отметить, что при значении параметров  $\alpha_K = \alpha_L = 1$  решение (13) переходит в известное решение [1]:

$$k(t) = \left[ \frac{\eta A}{b + a} + \left( k_0^{1-\gamma} - \frac{\eta A}{b + a} \right) e^{-(b+a)(1-\gamma)t} \right]^{1/(1-\gamma)}.$$

## Заключение

Решение (13) описывает поведение макроэкономических показателей экономической системы. Параметризация модели Солоу обобщает ранее известные результаты и содержит новые результаты, которые необходимо изучить отдельно и дать им соответствующую экономическую интерпретацию.

## Библиографический список

1. Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И. Математическое моделирование экономических процессов и систем. М.: Кнорус, 2011. 200 с
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Терехов Л.Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974. 113 с.
5. Нахушева З.А. Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования // Доклады АМАН. 2012. Т. 14. №1. С. 124–127.
6. Паровик Р.И. Решение нелокального уравнения аномальной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (2). С. 37-44.
7. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. Полянин А.А., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.11.2012