

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Vorob'ev, N. A. Kruzhilin, Theory of nonstationary kinetic ionization, recombination and population of excited-states, *TVT*, 1982, Volume 20, Issue 3, 401–411

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt6319>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 28, 2025, 11:41:11



**ТЕПЛОФИЗИКА
ВЫСОКИХ
ТЕМПЕРАТУР**

МАЙ — ИЮНЬ

1982

МОСКВА

Журнал основан в 1963 году

Выходит 6 раз в год

УДК 533.951

**К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КИНЕТИКИ ИОНИЗАЦИИ,
РЕКОМБИНАЦИИ И ЗАСЕЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ***Воробьев В. С., Кружжлин Н. А.*

На основе модифицированного диффузионного приближения исследуется релаксация населенностей возбужденных состояний к их квазистационарным значениям при неизменных параметрах плазмы. Установлена связь между временем релаксации возбужденного состояния и характерным временем ионизации. Обсуждаются особенности релаксации при неравномерном расположении уровней в энергетическом спектре. Рассмотрено распространение электронной лавины в холодном газе с учетом прямой и ступенчатой ионизации.

Кинетика ионизации или рекомбинации благодаря ступенчатым процессам тесно связана с кинетикой заселения возбужденных состояний. Это приводит к необходимости рассматривать нестационарное уравнение баланса электронов совместно с нестационарными уравнениями баланса для многочисленных возбужденных состояний атомов или ионов. Однако характерные времена релаксации возбужденных состояний заметно меньше характерного времени изменения концентрации электронов. Это позволяет в уравнениях баланса для возбужденных атомов опустить временные производные и тем самым существенно упростить задачу. Такое приближение получило название приближения квазистационарности возбужденных состояний (ПКВС) и широко используется в различных работах [1–4]. В таком приближении населенности возбужденных состояний мгновенно подстраиваются под изменяющиеся параметры плазмы, а временные зависимости оказываются сглаженными в масштабах порядка времени релаксации возбужденных состояний. Вместе с тем в ряде задач возникает необходимость в более детальном исследовании кинетики процесса. Речь может идти о начальной стадии развития ионизации, когда на первом этапе происходит лишь прямая ионизация. Затем по мере заселения возбужденных состояний ионизация начинает носить ступенчатый характер. Для описания этих процессов необходимо в уравнение кинетики ионизации подставить концентрации возбужденных состояний, явно зависящие от времени.

В литературе известны примеры численного решения нестационарной системы уравнений баланса для электронов и возбужденных атомов, в которых для конкретного диапазона условий получены детальные временные зависимости для различных компонентов плазмы [5].

В данной работе используется модифицированное диффузионное приближение (МДП) [6, 7]. Рассматривается релаксация населенностей для

одного или двух возбужденных состояний к квазистационарным значениям при неизменных параметрах плазмы. Найдены характерные времена релаксации и установлена их связь с временами ионизации. На этой основе записаны критерии возможности использования ПКВС при развитии ионизации. Качественные особенности релаксации распределения населенностей возбужденных состояний выявляются с помощью нестационарного уравнения диффузии, описывающего распределение населенностей в предположении непрерывного изменения энергии связи. Исследуется развитие электронной лавины при пробое холодного газа в электрическом поле. Принимается во внимание как прямая, так и ступенчатая ионизация. При этом учитывается возможная нестационарность скорости ступенчатой ионизации.

1. Время квазистационарности возбужденных состояний. Населенность возбужденных состояний определяется из уравнений баланса. Запишем их в общем виде

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{n,q} (n_n w_{nk}^q - n_k w_{kn}^q), \quad (1)$$

где n_k — концентрация атомов на k уровне; w_{nk}^q — вероятность перехода из состояния n в состояние k , индекс q вероятности w_{nk}^q характеризует тип элементарного процесса: ударный, радиационный. Суммирование в (1) по n проводится по всем состояниям данного атома, включая состояние его ионизационного континуума.

Если в уравнении (1) $dn_k/dt=0$ для всех возбужденных состояний, то соответствующее распределение концентраций называют квазистационарным. Оно может меняться во времени за счет изменения концентрации электронов, их температуры и других параметров. Широко распространенный способ оценки времени установления квазистационарного значения населенностей основан на следующих соображениях. Допустим, что концентрация атомов на уровне k немного отклонилась от квазистационарного значения $n_k = n_k' + \Delta n_k$, где n_k' — квазистационарное значение концентрации ($\Delta n_k \ll n_k'$). Населенности других уровней остались неизменными. Подставляя значение n_k в уравнение (1), получим

$$d\Delta n_k/dt = -\Delta n_k/\tau_k,$$

где время установления квазистационарности τ_k определяется следующим образом:

$$\tau_k^{-1} = \sum_{n,q} w_{kn}^q. \quad (2)$$

Величину τ_k^{-1} удобно представить в виде

$$\tau_k^{-1} = \nu_k = \nu_{k\uparrow} + \nu_{k\downarrow}, \quad (3)$$

$$\nu_{k\uparrow} = \sum_{q,n>k} w_{kn}^q, \quad \nu_{k\downarrow} = \sum_{q,n<k} w_{kn}^q$$

— соответственно частоты переходов в единицу времени с уровня k на вышележащие и нижележащие состояния.

Времена квазистационарности возбужденных состояний (2) вычислялись в [1–4]. Обычно они составляют 10^{-7} – 10^{-9} с и заметно убывают с ростом k , т. е. $\tau_k \gg \tau_{k+1}$ и т. д. Это означает, что за время релаксации k -уровня населенности вышележащих состояний быстро достигают квазистационарных значений. В этой ситуации формула (2) остается справедливой, строго говоря, лишь в пределе бесконечно малого отклонения населенности уровня k от квазистационарного значения. При конечных отклонениях уровня k за время релаксации могут меняться и населенности вышележащих уровней. Оценка времени релаксации на основе (2) пере-

стает быть справедливой. Необходим более детальный анализ кинетики релаксации совокупности взаимосвязанных возбужденных состояний.

2. Модифицированное диффузионное приближение (МДП) и электротехническая аналогия. В общем виде нестационарная система уравнений баланса допускает решение лишь численными методами. В данной работе используется упрощенная запись уравнений баланса, соответствующая [6, 7]. В этом приближении состояния упорядочиваются по мере убывания их энергии связи. Уровни, имеющие близкие энергии связи, объединяются в одну группу. Так, основное состояние атома имеет энергию связи E_1 и индекс 1, нижнее возбужденное состояние (или группа близко лежащих уровней) — E_2 и индекс 2 и т. д. В результате уравнение баланса атомов в состоянии k может быть записано в виде

$$C_k dY_k/dt = (Y_{k-1} - Y_k)/R_{k-1, k} - (Y_k - Y_{k+1})/R_{k, k+1}, \quad (4)$$

где

$$Y_k = n_k / (n_k^0 \Pi_k) \quad (5)$$

— приведенная концентрация Y_k , n_k^0 — равновесная концентрация возбужденных атомов на уровне k . Величина Π_k отражает влияние радиационных процессов на распределение возбужденных атомов и определяется с помощью формулы

$$\Pi_k = \prod_{n \geq k} (1 + A_{n+1}/z_{n+1, n}), \quad A_n = \sum_{k > n} \sum_{m \leq n} A_{km}^*, \quad (6)$$

где $z_{n, n+1}$ — эффективная частота переходов между уровнями $n \rightarrow n+1$ за счет столкновений с электронами [6, 7]; A_{km}^* — эффективная (с учетом реабсорбции) вероятность радиационного перехода: $C_k = n_k^0 \Pi_k$; $R_{k, k+1}^{-1} = C_k z_{k, k+1}$. Эффективные вероятности переходов связаны соотношением

$$n_k^0 z_{k, k+1} = n_{k+1}^0 z_{k+1, k}.$$

Населенность последнего дискретного уровня k связана с населенностью континуума посредством величины $\Psi_e Y^+$, где $Y_e = n_e/n_e^0$, $Y^+ = n^+/(n^+)^0$; n_e^0 , n^+ — равновесные значения концентрации электронов и ионов атома данного сорта. В дальнейшем для простоты будем считать $Y_e = Y^+$. Частоты $\nu_k \uparrow$ и $\nu_k \downarrow$ в МДП определяются формулами

$$\nu_k \uparrow = z_{k, k+1}, \quad \nu_k \downarrow = z_{k, k-1} + A_k. \quad (7)$$

Выразим коэффициенты в (4) также через частоты

$$dY_k/dt = Y_{k-1} \nu_{k-1} \uparrow - Y_k \nu_k + Y_{k+1} \nu_{k+1} \downarrow.$$

Можно провести аналогию между системой уравнений (4) и уравнениями, описывающими переходные процессы в электрической цепи, содержащей сопротивления и емкости. Схема такой цепи приведена на рисунке. Каждому k -состоянию атома поставим в соответствие узел цепи с потенциалом Y_k . Между соседними потенциальными узлами включены омические сопротивления $R_{k, k+1}$ (рис. 1, а). Кроме того, каждый узел через «емкость» C_k соединен с землей. Между узлами протекает ток величиной

$$j_k = (Y_{k-1} - Y_k)/R_{k-1, k}, \quad (8)$$

а через емкости

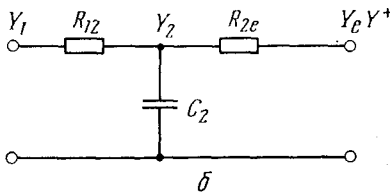
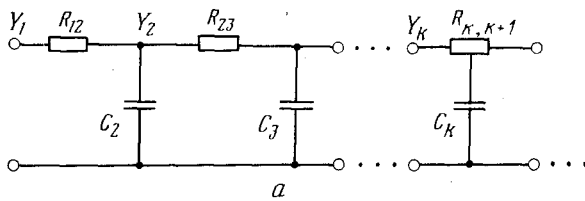
$$j_k^c = C_k dY_k/dt.$$

Перепишем (4) в виде

$$j_k^c = j_k - j_{k+1},$$

что представляет собой закон Кирхгофа для узла k .

Цепь с заданными $R_{k, k+1}$ и C_k подключена на концах к противоположно направленным постоянным источникам напряжения Y_1 и Y_e^2 . В установив-



Эквивалентная электрическая схема: *a* — общий случай; *б* — учет нестационарности лишь одного возбужденного состояния

шемся режиме ток течет только через сопротивления. Его величина определяется отношением разности потенциалов на концах цепи и полного омического сопротивления

$$j = (Y_1 - Y_e^2) / R_{1e}, \quad R_{1e} = \sum_{k=1}^k R_{k, k+1}. \quad (9)$$

Распределение потенциалов Y_k имеет вид

$$Y_k = (Y_1 R_{ke} + Y_e^2 R_{1k}) / R_{1e}, \quad (10)$$

$$R_{ke} = \sum_{n \geq k} R_{n, n+1}, \quad R_{1k} = \sum_{n=1}^{k-1} R_{n, n+1}.$$

Заметим, что емкости $C_k = n_k^0 \Pi_k$ резко убывают с ростом k . Сопротивления $R_{k, k+1}$ меняются с ростом k немонотонно. Величина k , при которой $R_{k, k+1}$ максимально, определяет так называемое «узкое место» [6, 7].

При изменении значений Y_1 и Y_e^2 происходит переход от начального установившегося распределения потенциалов к новому. Такой переход описывается системой (4) с заданным начальным распределением $Y_k(0)$.

Выразим полное омическое сопротивление цепи R_{1e} через частоты переходов (7)

$$R_{1e} = (n_1^0 z_{1e})^{-1},$$

$$z_{1e} = z_{12} \left(1 + \frac{v_{21}}{v_{21}} \left(1 + \frac{v_{31}}{v_{31}} (1 + \dots) \right) \right)^{-1}, \quad (11)$$

где z_{1e} — эффективная частота перехода электрона из основного состояния в континуум $1 \rightarrow e$ через промежуточные состояния $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3$ и т. д.

3. Релаксация возбужденных состояний. Пусть в начальный момент времени задано некоторое произвольное распределение возбужденных атомов. Рассмотрим его релаксацию к квазистационарному распределению, определяемому следующими параметрами плазмы: концентрацией атомов и электронов, их температурой, условиями выхода излучения и др. Предположим, что все эти параметры за время релаксации возбужденных состояний остаются неизменными. Задача в этой постановке сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Число уравнений такой системы совпадает с числом учитываемых возбужденных состояний и может быть весьма большим. Оценки времен квазистационарности на основе (2) показывают, что наи-

большими временами обладают низколежащие состояния. Воспользуемся этим и найдем решение задачи, учитывая нестационарность нижнего возбужденного состояния и полагая, что населенности выше лежащих состояний мгновенно достигают квазистационарных значений. В соответствии со схемой рисунка можно положить все $C_k=0$ при $k \geq 3$, а сопротивления на участке цепи с $k > 2$ объединить в эквивалентное сопротивление $R_{2e} = R_{23} + R_{24} + \dots$. Схема цепи приобретает вид, изображенный на рис. 1, б.

Уравнение для потенциала второго узла имеет вид

$$C_2 dY_2/dt = Y_1/R_{12} - Y_2(1/R_{12} + 1/R_{2e}) + Y_e^2/R_{2e}. \quad (12)$$

Решение (12) с начальным условием $Y_2(0)$

$$Y_2(t) = Y_2 + (Y_2(0) - Y_2) e^{-\nu_2' t},$$

где Y_2 — квазистационарное значение, определяемое (10),

$$\nu_2' = \tau_2^{-1} = z_{21} + A_2 + z_{2e}, \quad (13)$$

$$z_{2e} = z_{23} \left[1 + \frac{\nu_3 \downarrow}{\nu_3 \uparrow} (1 + \dots) \right]^{-1} \quad (14)$$

— эффективная частота перехода из состояния 2 в континуум e через промежуточные состояния $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$ и т. д.

Время квазистационарности по (13) $\tau_2' = (\nu_2')^{-1}$ отличается от времени квазистационарности по (2). Используя (7), (13) и (14), нетрудно показать, что

$$\nu_2'/\nu_2 = 1 - \nu_3 \downarrow \nu_2 \uparrow / (\nu_3' \nu_2).$$

Отношение $\nu_3 \downarrow \nu_2 \uparrow / (\nu_3' \nu_2)$ приближается к единице, когда переходы между уровнями $2 \rightleftharpoons 3$ происходят гораздо чаще, чем переходы с этих уровней в другие состояния. При этом $\nu_3 \downarrow / \nu_3' \ll 1$; $\nu_2 \uparrow / \nu_2 \ll 1$. Оценка времени релаксации по формуле (2) приводит к заниженному значению времени релаксации. Такая ситуация может реализоваться, если в энергетическом спектре уровни 2 и 3 расположены относительно близко, а энергетические промежутки $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ относительно велики.

В качестве примера рассмотрим атом цезия. Основному состоянию $6^2S_{1/2}$ ($E_1 = 3,89$ эВ, $g_1 = 2$) припишем индекс 1. Состоянию 2 отвечает группа уровней $6^3P_{1/2, 3/2}$ со средней энергией $E_2 = 2,47$ эВ и суммарным статистическим весом $g_2 = 6$. Состоянию 3 — $5^2D_{3/2, 5/2}$ с $E_3 = 2,09$ эВ, $g_{32} = 32$. Состояния 4 объединяет большую группу уровней $\{7^2S_{1/2}, 7^2P_{1/2, 3/2}, 6^2D_{3/2, 5/2}, 4^2F_{3/2, 5/2}\}$ и имеет среднюю энергию $E_4 = 1,03$ эВ и суммарный статистический вес 30. Более высокие уровни можно считать водородными и определять их энергию и статистический вес по формулам $E_k = R_\nu/k^2$, $g = 2k^2$. В спектре цезия имеются относительно большие энергетические зазоры между первым и вторым, третьим и четвертым уровнями. Второй и третий уровни близки.

Частоты	I	II
ν_2	$3,6 \cdot 10^7$	$1,8 \cdot 10^6$
$\nu_2 \uparrow$	$0,6 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^6$
$\nu_3 \downarrow$	$3,3 \cdot 10^6$	$3,3 \cdot 10^6$
$\nu_3 \uparrow$	$3,2 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$

В таблице для $n_e = 10^{12}$ см⁻³ и $T = 0,3$ эВ приводятся частоты ν_2 , ν_3' , $\nu_2 \uparrow$, $\nu_3 \downarrow$ для оптически прозрачной плазмы I и для плазмы, в которой резонансная линия полностью реабсорбирована II. В последнем случае вероятность радиационного перехода между вторым и первым уровнями $A_{21}^* = 0$.

Как видно, для случая II $\nu_2 \approx \nu_2 \uparrow$, $\nu_3' \approx \nu_3 \downarrow$, отношение $\nu_2'/\nu_2 \approx 0,2$. Для случая I существенную роль играют радиационные переходы $2 \rightarrow 1$, $\nu_2 \uparrow \ll \nu_2$, отличие ν_2 от ν_2' незначительно.

Рассмотрим решение задачи, учитывая нестационарность двух нижних возбужденных состояний $k=2$ и $k=3$, полагая, что состояния с $k \geq 4$ достиг-

ли квазистационарных значений. В этом случае система (4) сводится к двум линейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Их решение с начальными значениями $Y_2(0)$ и $Y_3(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= Y_2 + A_2 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}, \\ Y_3(t) &= Y_3 + a_2 A_2 e^{p_1 t} + a_3 B_2 e^{p_2 t}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (v_2 + p_1) / v_2 \uparrow, \quad a_3 = (v_3 + p_2) / v_3', \quad v_2 = z_{21} + A_2 + z_{23}, \\ v_3' &= z_{32} + A_3 + z_{3e}, \\ A_2 &= (Y_3(0) - Y_3 - a_3(Y_2(0) - Y_2)) / (a_2 - a_3), \\ B_2 &= -(Y_3(0) - Y_3 - a_2(Y_2(0) - Y_2)) / (a_2 - a_3), \\ p_{1,2} &= -(v_2 + v_3') / 2 \pm \sqrt{(v_2 - v_3')^2 / 4 + v_2 \uparrow v_3'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Временной ход решения определяется двумя характерными временами p_1^{-1} и p_2^{-1} .

Рассмотрим два случая. В первом случае

$$v_2 \gg v_3 \uparrow, \quad v_3 \gg v_3 \downarrow. \quad (17)$$

Имеем слабую связь уровней 2 и 3. Переходы между этими уровнями происходят редко по сравнению с переходами с них вниз и вверх соответственно. Выражением под знаком корня в (16) можно пренебречь, после чего характерные времена принимают вид $p_1 = -v_3'$, $p_2 = -v_2$. Поскольку $v_3' > v_2$, то за время $t \sim (v_3')^{-1}$ населенность третьего уровня достигает квазистационарного значения, при $t v_3' > 1$ меняется по закону

$$Y_3(t) = (Y_2(t) R_{3e} + Y_e^2 R_{23}) / R_{2e}.$$

$Y_2(t)$ определяется по (12). Заметим, что при выполнении неравенств (17) различие между v_2 и v_2' несущественно.

Во втором случае имеют место соотношения

$$v_2 \simeq v_2 \uparrow, \quad v_3 \simeq v_3 \downarrow. \quad (18)$$

Здесь реализуется сильная связь уровней 2 и 3. Нетрудно показать, что

$$p_1 = -(v_2 \downarrow v_3 + v_2 v_3 \uparrow) / (v_2 + v_3), \quad p_2 = -(v_2 + v_3) / 2. \quad (19)$$

В силу соотношения (18) имеет место неравенство $p_1 \ll p_2$. Это означает, что временной ход населенностей в данном случае определяется не частыми переходами между уровнями 2 и 3, а более редкими переходами с этих уровней в другие состояния. Время релаксации p_1^{-1} по (19) может заметно отличаться от v_2^{-1} . Так, для примера, рассмотренного выше, где реализуется случай сильной связи уровней 2 и 3 (случай II), $p_1 / v_2 \simeq 0,15$.

Проведенный анализ показал, что времена релаксации возбужденных состояний могут отличаться от значений, оцениваемых по (2). Особенно заметные различия возникают при неравномерном расположении уровней в энергетическом спектре.

Представляет интерес сопоставить времена установления квазистационарного значения населенностей с характерными временами изменения концентрации электронов. Для этого запишем уравнение для изменения концентрации электронов в приближении квазистационарности возбужденных состояний, используя (9)

$$dn_e / dt = (Y_1 - Y_e^2) / R_{1e}. \quad (20)$$

При развитии ионизации ($Y_1 \gg Y_e^2$) характерное время изменения концентрации электронов

$$\tau_i^{-1} = Y_1 / (n_e R_{1e}) = (n_i / n_e) z_{1e}, \quad (21)$$

где z_{1e} определяется формулой (11). Из (11) получим соотношение

$$z_{1e} = z_{12} v_2 \uparrow / v_2'. \quad (22)$$

Приближение квазистационарности справедливо, если $v_2' \gg \tau_i^{-1}$. Подставляя τ_i^{-1} по (21) с учетом (22), находим

$$v_2'^2 \gg (n_1/n_e) z_{12} v_2' \uparrow. \quad (23)$$

Для случая ударной кинетики отношение $z_{12} v_2' \uparrow / v_2'^2$ для данного атома зависит только от температуры электронов, и неравенство (23) дает ограничение на величину степени ионизации. Из (23) следует, что при больших значениях n_1/n_e процесс развития ионизации протекает в отсутствие квазистационарности возбужденных состояний. Неравенство (23) несколько упрощается, если переходы со второго уровня вверх преобладают над переходами вниз, т. е. $v_2' \approx v_2' \uparrow$. Тогда (23) можно переписать в виде

$$v_2' \uparrow \gg (n_1/n_e) z_{12}.$$

Из (20) вытекает, что характерное время рекомбинации ($Y_e^2 \gg Y_1$)

$$\tau_p^{-1} = (Y_e^2/Y_1) \tau_i^{-1}.$$

Критерий, аналогичный (23), имеет вид

$$v_2'^2 \gg n_e K_1 \Pi_1 z_{12} v_2' \uparrow, \quad (24)$$

где $K_1 = n_1^0/n_e^{0.2}$ — константа ионизационного равновесия.

В [8] исследовался разряд в аргоне с примесью цезия. На стационарно горящий разряд подавался импульс греющего поля величиной $\mathcal{E} \approx 3$ В/см и длительностью ≈ 100 мкс. Температура электронов за несколько микросекунд повышалась от 2200 К до $(5-6) \cdot 10^3$ К. Концентрация электронов не успевала следовать столь быстрым изменениям T_e . Представляет интерес выяснить, выполняется ли в этих условиях неравенство (23).

Рассмотрим конкретный режим с $n_e = 2 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$ и $T_e = 5500$ К, $n_{Cs} = 10^{16}$ см $^{-3}$, $n_{Ar} = 5 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$. В этих условиях $z_{2e} = v_2' \uparrow \approx 1,2 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $z_{12} = 0,9 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $v_2' = z_{21} + A_2 + z_{2e} \approx 7,2 \cdot 10^7$ с $^{-1}$. Нетрудно проверить, что критерий (23) при таких параметрах не выполняется. Это означает, что при расчете скорости ступенчатой ионизации нельзя использовать значения, полученные в предположении квазистационарности возбужденных состояний. Заметим, что скорость ступенчатой ионизации в цезии в этих условиях, рассчитанная в приближении квазистационарности возбужденных состояний, на три-четыре порядка больше прямой ионизации. Детальное исследование развития ионизации в этом эксперименте требует отдельного рассмотрения.

4. Дифференциальное уравнение, описывающее релаксацию возбужденных состояний. Известно, что для описания кинетики заселения большого числа близко расположенных высоковозбужденных уровней можно использовать дифференциальные представления [9]. Как показано в [7], при наличии столкновительных и радиационных процессов дифференциальное уравнение в частных производных, эквивалентное системе (6), имеет вид

$$C(E) \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} \left[C(E) D(E) \frac{\partial Y}{\partial E} \right], \quad (25)$$

где $C(E) = n^0(E) \Pi(E)$; $n^0(E)$ — равновесная концентрация возбужденных состояний, рассчитанная на единичный интервал энергий; $\Pi(E)$ — фактор, зависящий от соотношения эффективностей радиационных и ударных процессов

$$\Pi(E) = \exp \left(\int_0^E \frac{A(E')}{D(E')} dE' \right),$$

$$A(E) = A_k (dE_k/dk), \quad E = Ry/k^2;$$

$D(E)$ — коэффициент диффузии связанного электрона в пространстве энергии за счет столкновений со свободными электронами [7], равный

$$D(E) = \frac{2\sqrt{2}\pi e^4 n_e \Lambda}{3\sqrt{m}T_e} E = BE,$$

$\Lambda \approx 0,2$ — среднее значение кулоновского логарифма для связанных состояний [5]. Как показано в [6]

$$\Pi(E) \approx \exp(0,2E^4/E_R^4), \quad E_R = (n_e/4,5 \cdot 10^{13})^{1/4} T_e^{-1/4}, \quad (26)$$

где T_e — в эВ. Полагая $n^0(E) \sim g(E)e^{E/T}$, где $g(E) = Ry^{3/2}/E^{5/2}$ — кулоновская плотность состояний, уравнение (25) преобразуем к виду

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v(E) \frac{\partial Y}{\partial E} + D(E) \frac{\partial^2 Y}{\partial E^2}, \quad (27)$$

$$v(E) = \frac{\partial D}{\partial E} + D \frac{\partial \ln C}{\partial E} = \left(\frac{E}{T} + 0,8 \frac{E^4}{E_R^4} - \frac{3}{2} \right) B.$$

Первое слагаемое в правой части (27) описывает перенос в пространстве энергий со скоростью $v(E)$, второе — диффузию в пространстве энергий с коэффициентом диффузии $D(E)$. Видно, что при некотором значении энергии связанного электрона E_m $v(E_m) = 0$. Это значение энергии определяет положение «узкого места» для области спектра атома, в которой движение электрона носит чисто диффузионный характер и в связи с этим оказывающей наибольшее влияние на величину тока связанных электронов. По обе стороны от «узкого места» скорость $v(E)$ имеет разные знаки. При $E \rightarrow 0$ $D \rightarrow 0$, $v \approx -B$. Поэтому в этой области энергий диффузией можно пренебречь, и решение уравнения (27) имеет вид волны, бегущей от континуума в сторону «узкого места»

$$Y(E, t) = Y \left(\int_0^E \frac{dE'}{v(E')} + t \right) = Y \left(-\frac{E}{B} + t \right).$$

За фронтом волны устанавливается квазистационарное распределение. В случае преобладания столкновительных переходов характерный интервал энергий $E \approx T$ волна проходит за время $\tau = T/|v| = T/B$. В области энергий $E \approx E_m$ скорость $v(E_m) = 0$, и движение носит чисто диффузионный характер. Наконец, в области $E > E_m$ существенны и диффузия, и направленное движение.

Для оценки характерного времени релаксации высоковозбужденных состояний поступим аналогично выводу формулы (2). Допустим, что концентрация на уровне $E = E'$ претерпела возмущение и отклонилась от квазистационарного значения. За время релаксации этого возмущения населенности других состояний остаются неизменными. Этому требованию удовлетворяет возмущение вида $\Delta Y = f(t) \delta(E - E')$. Подставляя возмущенное решение в (27), найдем время его релаксации

$$\tau^{-1} = \frac{\partial^2 D}{\partial E^2} + \frac{\partial v}{\partial E} = 2 \frac{\partial^2 D}{\partial E^2} + \frac{\partial}{\partial E} (D \ln C) = \frac{B}{T_e} \left(1 + 3,2 \frac{E^3 T_e}{E_R^4} \right).$$

Тогда следует, что радиационные процессы уменьшают время релаксации. Если ими пренебречь, то

$$\tau \sim T_e/B \sim (n_e l^2 v)^{-1},$$

где $l = e^2/T_e$ — длина Ландау; v — тепловая скорость электрона. Полученное время одинаково для всех возбужденных состояний. Сравним его со временем τ_2 , обусловленным также столкновениями и имеющим порядок

$$\tau_2 \sim (n_e v \sigma_2)^{-1},$$

где σ_2 — сечение тушения второго уровня электронами. Отношение

$$\tau_2/\tau \sim l^2/\sigma_2 \sim 10^{14}/(\sigma_2 T_e^2) \gg 1$$

(T_e — в эВ).

Таким образом, если T_e не слишком велики, квазистационарное распределение на всей совокупности высоковозбужденных состояний устанавливается значительно быстрее, чем для уровней, расположенных вблизи основного состояния. Это обстоятельство оправдывает целесообразность приближений, используемых в предыдущих разделах.

5. Развитие ионизации в условиях нестационарного заселения возбужденных состояний. При развитии ионизации в первые моменты времени скорость нарастания концентрации электронов определяется исключительно прямой ионизацией. Лишь спустя некоторое время после заселения возбужденных состояний начинает играть роль ступенчатая ионизация.

Запишем уравнение для концентрации электронов с учетом прямой и ступенчатой ионизаций

$$dn_e/dt = n_e/\tau_d + n_e j_2(t), \quad (28)$$

где $\tau_d = (n_1 w_{1e})^{-1}$ — характерное время прямой ионизации (w_{1e} — вероятность в единицу времени ионизации атома из основного состояния); $j_2(t) = n_2(t) z_{2e}$. Рассмотрим решение уравнения (28) при начальном условии $n_2(t_0) = 0$ при $t = t_0$. Характерное время изменения n_2 равно τ_2 . Поэтому при $t \ll \tau_2$

$$n_e(t) = n_e(t_0) e^{t/\tau_d}. \quad (29)$$

Для $t \gg \tau_2$, если поток $j_2 \sim n_e$ (в кинетике преобладают ударные процессы), решение (28) имеет вид

$$n_e(t) = n_e(t_0) \exp(t(1/\tau_d + 1/\tau_s)), \quad (30)$$

$$\tau_s = \left(z_{12} \frac{z_{2e} n_1}{z_{e1} + z_{2e}} \right)^{-1}$$

— характерное время ступенчатой ионизации. Если j_2 определяется радиационными процессами, то решение при $t \gg \tau_2$ имеет неэкспоненциальный вид. Переход от (29) к (30) происходит за время τ_2 . При $t_0 + \tau_2 > t > t_0$ зависимость n_e от времени определяется поведением $n_2(t)$. Наиболее простой результат получается, когда за время τ_2 величина n_e изменяется мало, и в кинетике заселения возбужденных состояний преобладают радиационные процессы. Формально для этого следует в (12) опустить члены с R_{2e} . Подставляя в полученное таким образом уравнение $z_{21} = z_{21}' n_e(t_0)$, где $z_{21}' = z_{21}/n_e$, запишем его решение при начальном условии $n_2(t_0) = 0$

$$n_2(t) = n_1 \frac{z_{21}' n_e(t_0)}{A_{21}} [1 - e^{-A_{21}(t-t_0)}]. \quad (31)$$

За время $\tau_2 = A_{21}^{-1}$ величина n_2 нарастает от нуля до своего квазистационарного значения. Такая ситуация реализуется, например, при пробое холодного газа в электрическом поле, когда перед фронтом волны ионизации возбужденные атомы практически отсутствуют.

Применим полученные результаты для изучения закона распространения волны ионизации при пробое холодного газа. Уравнение, описывающее релаксацию электронной плотности в направлении x межэлектродного промежутка, имеет вид

$$\partial n_e / \partial t + W \partial n_e / \partial x - D_a \partial^2 n_e / \partial x^2 = v(x, t), \quad (32)$$

где W — скорость дрейфа электронов в электрическом поле; D_a — коэффициент диффузии; $v(x, t) = n_e/\tau_d + j_2(t)$ — скорость генерации электронов за счет прямой и ступенчатой ионизации. Начиная с момента $t_0 = x/W$, кон-

центрация возбужденных атомов меняется по (31) и соответственно

$$j_2(t) = n_1 \frac{z_{12}' n_e(x/W) z_{2e}'}{A_{21}} [1 - e^{-A_{21}(t-x/W)}] n_e, \quad (33)$$

где

$$n_e(x/W) = n_e(0) e^{x/W\tau_d}$$

— значение концентрации электронов на фронте: $n_e(0)$ — концентрация электронов в начале лавины.

Найдем решение (32) для условий, когда

$$D_e v / W^2 \ll 1 \quad (34)$$

и диффузией можно пренебречь. Введем новые переменные

$$\xi = \frac{1}{\tau_d} \left(\frac{x}{W} - t \right), \quad \eta = \frac{1}{\tau_d} \left(\frac{x}{W} + t \right), \quad N = \ln \frac{n_e(t)}{n_e(0)}. \quad (35)$$

В этих переменных уравнение (32) с учетом неравенства (34) имеет вид

$$2 \frac{\partial N}{\partial \eta} = 1 + \frac{\tau_d}{\tau_e(0)} e^{(\xi+\eta)/2} (1 - e^{-A_{21}\tau_d \xi}), \quad (36)$$

где

$$\eta > -\xi; \quad \xi < 0$$

$$(\tau_e(0))^{-1} = n_1 n_e(0) z_{12}' z_{2e}' / A_{21}.$$

Решение (36) при граничном условии $N(\xi; \eta = -\xi) = 0$, что соответствует заданной концентрации электронов у катода $n_e(0)$; имеет вид

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\xi + \eta + \frac{\tau_d}{\tau_e} (e^{(\xi+\eta)/2} - 1) (1 - e^{A_{21}\tau_d \xi}) \right]. \quad (37)$$

Переходя в (37) к обычным переменным x и t , получим

$$n_e(x, t) = n_e(0) \exp \left\{ \frac{x}{W\tau_d} + \frac{\tau_d}{\tau_e} (1 - e^{-x/(W\tau_d)}) [1 - \exp(- (t-x/W) A_{21})] \right\}, \quad (38)$$

где

$$\tau_e = \frac{n_1 n_e(0) z_{12}' z_{21}'}{A_{21}} e^{x/W\tau_d}$$

— характерное время ступенчатой ионизации на фронте. Выражение (38) дает форму волны ионизации с постепенным включением ступенчатых процессов. Качественно этот вопрос обсуждался в [10]. С ростом степени ионизации неравенство (34) может нарушиться, и произойдет смена механизма распространения волны с дрейфового на диффузионный. При этом фронт будет распространяться со скоростью $W \sim \sqrt{D_e v}$.

Авторы выражают благодарность Л. М. Биберману за ряд ценных замечаний.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1.IV.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. McWhirter P. W. P., Hearn A. G. Calculation of Instantaneous Population Densities of the excited levels of Hydrogen-like ions. — Proc. Phys. Soc., 1967, v. 82, N 5, p. 641.
2. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т. К теории неравновесной низкотемпературной плазмы. — В кн.: МГД-метод получения электроэнергий. М.: Энергия, 1968, с. 209.

3. *Drawin H. W.* Relaxation Times for Establishing Steady-State Populations in Optically Thin and Thick Plasmas.— *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 1970, v. 10, N 1, p. 33.
4. *Jonson C. L., Hinnov E.* Ionisation, Recombination and Population of Exited States in Hydrogen Plasmas.— *JQSRT*, 1973, v. 13, N 4, p. 333.
5. *Caccitore M., Capitelli M.* The temporal Evolution of Population Densities of Exited States in Atomic Oxygen Thin Plasmas.— *JQSRT*, 1976, v. 16, N 4, p. 325.
6. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика ударно-радиационной ионизации и рекомбинации.— *УФН*, 1972, т. 107, № 3, с. 353.
7. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Низкотемпературная плазма с неравновесной ионизацией.— *УФН*, 1979, т. 128, № 2, с. 233.
8. *Новичков Д. Н., Глебов В. В.* Явления при распаде плазмы в гелии, аргоне при повышенном давлении с примесью паров цезия.— *Electricity from MHD, Warsaw: Int. at. Energy*, 1968, v. 1, p. 287; Экспериментальные исследования нестационарных процессов в неравновесной плазме в смеси цезия с аргоном.— *ТВТ*, 1970, т. 8, N 4, с. 695.
9. *Питаевский Л. П.* Рекомбинация электронов в одноатомном газе.— *ЖЭТФ*, 1962, т. 42, № 4, с. 1326.
10. *Биберман Л. М., Белевцев А. А.* Влияние ступенчатой ионизации на первый коэффициент Таунсенда.— *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*, 1978, № 4, с. 106.