А. А. Миролюбов, Об одном неоднородном функциональном уравнении,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 56–67

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 517.948

А. А. Миролюбов

ОБ ОДНОМ НЕОДНОРОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

В статье исследуется линейное неоднородное функциональное уравнение вида

$$M(F) = W(z), \tag{1}$$

причем оператор $M(F)$ определен соотношением (4). Соответствующее однородное уравнение было изучено А. Ф. Леонтьевым в работе [1]. При рассмотрении уравнения (1) применяется метод, развитый в работе [1].

Для дифференциально-разностного уравнения

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = g(x), \quad 0 = h_0 < \ldots < h_n, \tag{*}$$

которое является частным случаем уравнения (1), в статье [2] построен ряд специального вида. Этот ряд при одних условиях ($k_{p0} \neq 0$, $p > 0$) сходится к решению $f(x)$ уравнения (*), а при других ($k_{p0} = 0$, $p > 0$, но $k_{00} \neq 0$) — к выражению $f(x) - \frac{1}{2k_{00}} g(x)$. Аналогично этому, решение уравнения (1) представляется здесь в виде предела некоторой функциональной последовательности (теорема 2).

В качестве иллюстрации полученных результатов найдено новое интегральное представление для решения неоднородного дифференциального уравнения бесконечного порядка.

§ 1. Основная формула

Пусть $\{P_n(z)\}$ — система функций (не обязательно аналитических), определенных на бесконечном множестве D комплексной плоскости. Считаем, что эта система обладает свойством единственности на множестве $G \subset D$. Именно, если $\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(z) = 0$ для $z \in G \subset D$, то $c_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Будем считать также, что ряд

$$A(z, h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) h^k \tag{2}$$

сходится для всех $z \in D$ и любых h.

Функция $F(z)$ принадлежит классу A, если

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(z), \quad z \in G \subset D. \tag{3}$$

Для функции $F(z) \in A$ вводятся операторы $D^n F = \sum_{k=n}^{\infty} d_k P_{k-n}(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, и требуется, чтобы соответствующие ряды тоже сходились на множестве G. Положим

$$M(F) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F \tag{4}$$

и будем считать в дальнейшем характеристическую функцию $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ целой.

Установим формулу для решения $F(z) \in A$ уравнения (1), правая часть которого тоже принадлежит классу A, т. е.

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(z), \quad z \in G. \tag{5}$$

При этом предполагаем, что на множестве G выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \{K_{n+k-1}[F] + |u| K_{n+k-2}[F] + \ldots + |u|^{k-1} K_n[F]\} < \infty, \tag{6}$$

$n = 0, 1, \ldots$, в котором

$$K_m[F] = \sum_{s=0}^{\infty} |d_{s+m} P_s(z)|, \quad |u| < \infty,$$

и что ряд

$$\mathcal{L}(z, u) = \sum_{s=1}^{\infty} (d_{s-1} + u d_{s-2} + \ldots + u^{s-1} d_0) P_s(z) \tag{7}$$

сходится для $z \in G$ и любых u. Подставляя в (1) разложение (3) и учитывая равенство (5), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu+m} P_\nu(z) \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu P_\nu(z), \quad z \in G.$$

Опираясь на условие (6), последнее соотношение можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_{\nu+m} c_m - \alpha_\nu \right) P_\nu(z) = 0.$$

Откуда, в силу свойства единственности, находим

$$\alpha_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} d_{\nu+m} c_m, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Пусть C — окружность $|u| = q$, на которой нет нулей характеристической функции $\varphi(u)$. Положим

$$R_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi[D^n F, u] \frac{du}{u^n \varphi(u)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\Phi[D^n F, u] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [D^{n+k-1} F + u D^{n+k-2} F + \ldots + u^{k-1} D^n F].$$

Тогда

$$R_k - R_{k-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \{\Phi[D^k F, u] - u\Phi[D^{k-1}F, u]\}\frac{du}{u^k\varphi(u)}. \tag{9}$$

Поскольку [1] $\Phi[D^n F, u] = \sum\limits_{s=0}^{\infty} B_{n,s}(u) P_s(z)$, причем ряд равномерно сходится, когда $z \in G$ фиксировано и переменное u изменяется в любой ограниченной области, а выражения

$$B_{n,s}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(d_{k+n+s-1} + ud_{k+n+s-2} + \ldots + u^{k-1}d_{s+n}); \quad n, s = 0, 1, 2, \ldots,$$

являются целыми функциями, то

$$\Phi[D^k F, u] - u\Phi[D^{k-1}F, u] = \sum_{s=0}^{\infty}[B_{k,s}(u) - uB_{k-1,s}(u)]P_s(z).$$

Величину, стоящую в правой части в квадратных скобках, обозначим через $L_{ks}(u)$. Тогда, пользуясь рядами для функций $B_{n,s}(u)$ и (8), найдем $L_{ks}(u) = \alpha_{s+k-1} - d_{s+k-1}\varphi(u)$. В таком случае последовательно получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} L_{ks}(u) = \sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{s+k-1}P_s(z) - \varphi(u)\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{s+k-1}P_s(z) = D^{k-1}W - \varphi(u)D^{k-1}F.$$

С учетом последнего результата выражение (9) примет вид

$$R_k - R_{k-1} = -A_k D^{k-1}W + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{du}{u^k} D^{k-1}F,$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{du}{u^k\varphi(u)}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $R_1 - R_0 = -A_1 W(z) + F(z)$, $R_k - R_{k-1} = -A_k D^{k-1} W$, $k > 1$.

Полученные равенства позволяют представить решение $F(z)$ в форме

$$F(z) = R_n - R_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda D^{\lambda-1}W. \tag{10}$$

Преобразуем теперь выражение для R_0. Пусть

$$Q(z, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C B_{0,0}(u)A(z, u)\frac{du}{\varphi(u)}, \tag{11}$$

где функция $A(z, u)$ определена формулой (2). Имеем

$$-R_0 - Q(z, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \{\Phi[F, u] - B_{0,0}(u)A(z, u)\}\frac{du}{\varphi(u)}. \tag{12}$$

Пользуясь соотношениями, определяющими функции $A(z, u)$ и $\Phi[F, u]$, получим

$$\Phi[F, u] - B_{0,0}(u)A(z, u) = \sum_{s=0}^{\infty}[B_{0,s}(u) - u^s B_{0,0}(u)]P_s(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\mu_s(u)P_s(u), \tag{13}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно, если z фиксировано и принадлежит множеству G, а переменное u изменяется в любой ограниченной области.

Найдем выражение для $\mu_s(u)$, учитывая состав функций $B_{n,s}(u)$ и (8). Имеем $\mu_{s+1}(u)=\alpha_s+u\mu_s(u)-d_s\varphi(u)$. С помощью полученной рекуррентной формулы находим

$$\mu_s(u)=(\alpha_{s-1}+u\alpha_{s-2}+\ldots+u^{s-1}\alpha_0)-(d_{s-1}+ud_{s-2}+\ldots+u^{s-1}d_0)\,\varphi(u);$$

$s=1, 2, \ldots$ Пусть

$$H(z, u)=\sum_{s=1}^{\infty}(\alpha_{s-1}+u\alpha_{s-2}+\ldots+u^{s-1}\alpha_0)\,P_s(z). \tag{14}$$

Тогда, учитывая выражение для $\mu_s(u)$, из равенства (13) заключаем, что $H(z, u)$ — целая функция переменного u для $z\in G$ (так как функция $\mathcal{L}(z, u)$, заданная рядом (7), целая). Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \varphi(u)\,(d_{s-1}+ud_{s-2}+\ldots+u^{s-1}d_0)\,\frac{du}{\varphi(u)}=0,$$

то из (12) и (13) получаем

$$-R_0-Q(z, q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C H(z, u)\,\frac{du}{\varphi(u)}\equiv T(z, q). \tag{15}$$

Определяя величину R_0 из последнего соотношения и подставляя затем найденное выражение в формулу (10), получим

$$F(z)-[Q(z, q)+T(z, q)]=\theta_n(z, q)+R_n(z, q), \tag{16}$$

где

$$\theta_n(z, q)=\sum_{\lambda=1}^{n}A_\lambda D^{\lambda-1}W \tag{17}$$

и $R_n(z, q)=R_n$. Таким образом, установлена

Теорема 1. *Пусть на некотором множестве G функции $F(z)$ и $W(z)$ принадлежат классу A, и пусть на G реализуется условие* (6).

Если $F(z)$ есть решение уравнения (1) *для $z\in G$ и функция $\mathcal{L}(z, u)$, заданная равенством* (7), *целая, то на множестве G для $F(z)$ справедливо представление* (16), *в котором n — любое целое положительное число.*

Замечание. Теорема верна и тогда, когда функции $\varphi(u)$ и $A(z, u)$ не целые, а, скажем, регулярные в некотором круге $|u|<r$.

Так, например, если в качестве основной системы $\{P_n(z)\}$ взять систему $\left\{\frac{1}{n!}B_n(z)\right\}$, где $B_n(z)$ — полином Бернулли степени n, то функция

$$A(z, u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(z)}{k!}\,u^k=\frac{ue^{uz}}{e^u-1}$$

будет регулярна в круге $|u|<2\pi$. Пусть $F(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}d_m\frac{B_m(z)}{m!}$. Тогда

$$D^nF=\sum_{m=n}^{\infty}d_m\,\frac{B_{m-n}(z)}{(m-n)!}=\sum_{m=n}^{\infty}d_m\,\frac{B_m^{(n)}(z)}{m!}=F^{(n)}(z),$$

поскольку $B_m^{(n)}(z)=m(m-1)\ldots(m-n+1)B_{m-n}(z)$. Следовательно, если характеристическая функция $\varphi(u)$ регулярна для $|u|<2\pi$, то уравнение (1) примет вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z)=W(z)$, и для его решения будет справедлива формула (16).

Отметим, что в формуле (16) правая часть не зависит от n. Поэтому натуральное число n следует выбирать так, чтобы оценка суммы $\theta_n(z, q)+R_n(z, q)$ была наилучшей. В следующем параграфе будет показано, как можно осуществить этот выбор числа n.

§ 2. Применение основной формулы

Результат предыдущего параграфа можно усилить, накладывая дополнительные ограничения на множество D и функции $P_n(z)$. Будем говорить, что множество D обладает свойством $\mathfrak{R}$, если множество $\mathrm{D}(a, b)=\{R_1=\inf_{z\in \mathrm{D}}|z|<a<|z|<b<\sup_{z\in \mathrm{D}}|z|=R_2\}\cap \mathrm{D}$ непусто. Пусть функции $P_n(z)$, $n=0, 1, \ldots$, определены на D и удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\rho}|P_n(z)|^{1/n}=(\sigma e\rho)^{1/\rho}|z|;\quad z\in \mathrm{D}, \tag{18}$$

причем сходимость на всяком множестве $\mathrm{D}(r, \delta)$ равномерная. Предположим также, что система $\{P_n(z)\}$ на любом множестве $\mathrm{D}(r, \delta)$ обладает свойством единственности. Как и ранее, считаем функцию $F(z)$ принадлежащей классу A, если представление (3) имеет место на некотором множестве $\mathrm{D}(r, \delta)$.

Будем считать, что характеристическая функция $\varphi(u)$ — целая, порядка $\rho>0$ и типа σ_1.

Пусть $W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k P_k(z)$, $z\in \mathrm{D}(r, \delta)$, причем $\left(r^\rho-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}=r_2\leqslant r_0<R_2$, и функция $F(z)$ на множестве $\mathrm{D}(r_2, \delta)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда, в соответствии с теоремой 1 (см. также [1]), для $z\in \mathrm{D}(r_2, \delta)$ будет справедлива формула (16).

Получим теперь интегральное представление для функции $H(z, u)$, определенной рядом (14). С этой целью составим функцию

$$\psi=\frac{A\left(z, \frac{x}{t}\right)-A(z, u)}{\frac{x}{t}-u}=\sum_{s=1}^{\infty}P_s(z)\left[\left(\frac{x}{t}\right)^{s-1}+u\left(\frac{x}{t}\right)^{s-2}+\ldots+u^{s-1}\right] \tag{19}$$

и заметим, что эта функция будет целой относительно переменных x и u и аналитической по t $(t\neq 0)$ при фиксированном z из множества D. Когда $|t|=r_1<r$, u фиксировано, а переменное x таково, что $x\geqslant r_1$, $x\geqslant r_1|u|$, имеем

$$\left|\sum_{s=1}^{N}P_s(z)\left[\left(\frac{x}{t}\right)^{s-1}+u\left(\frac{x}{t}\right)^{s-2}+\ldots+u^{s-1}\right]\right|<\sum_{s=0}^{\infty}|P_s(z)|\left(\frac{x}{r_1}\right)^{s-1}=$$

$$=\left.\frac{\partial A_1(z, \zeta)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\frac{x}{r_1}},$$

где $A_1(z, \zeta)=\sum_{s=0}^{\infty}|P_s(z)|\zeta^s$, а N — произвольное натуральное число.

В силу условия (18) функция $A_1(z, \zeta)$ при любых ζ подчиняется требованию

$$|A_1(z, \zeta)| < c(\varepsilon)\exp[(\sigma+\varepsilon)|z\zeta|^{\rho}]; \quad z \in D(r, \delta), \quad \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial A_1(z, \zeta)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\frac{x}{r_1}} < c_1(\varepsilon)\exp\left[(\sigma+\varepsilon)\left(\frac{|z|x}{r_1}\right)^{\rho}\right].$$

Последние оценки обеспечивают возможность почленного интегрирования ряда (19). Полагая $\tau(x) = -\exp(-\sigma x^{\rho})$ и интегрируя, будем иметь

$$\int_0^{\infty} \psi d\tau(x) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z)\left[\frac{1}{a_{s-1}t^{s-1}} + \frac{u}{a_{s-2}t^{s-2}} + \ldots + \frac{u^{s-1}}{a_0}\right], \quad z \in D(r_1, \delta).$$

При этом учитывается, что

$$\frac{1}{a_k} = \sigma^{-k/\rho}\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right) = \int_0^{\infty} x^k d\tau(x).$$

Так как имеет место условие (18), то функция

$$W_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k z^k, \quad a_k = \sigma^{k/\rho}\left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)\right]^{-1},$$

регулярна в круге $|z| < r_0$, $r_2 \leqslant r_0 < R_2$. Пусть $r_1 < r_0$, тогда, учитывая результат интегрирования функции ψ, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_1} W_1(t)\frac{dt}{t}\int_0^{\infty}\psi d\tau(x) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z)(\alpha_{s-1} + u\alpha_{s-2} + \ldots + u^{s-1}\alpha_0).$$

Согласно определению (14) правая часть последнего соотношения равна $H(z, u)$. Таким образом, установлена справедливость представления

$$H(z, u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_1} W_1(t)\frac{dt}{t}\int_0^{\infty}\left[A\left(z, \frac{x}{t}\right) - A(z, u)\right]\frac{d\tau(x)}{\frac{x}{t}-u}, \quad z \in D(r, \delta). \tag{21}$$

В рассматриваемом случае при некоторых предположениях относительно характеристической функции $\varphi(u)$ можно установить в формуле (16) скорость сходимости выражения $Q(z, q) + T(z, q)$ при $q \to \infty$ к решению $F(z)$. А именно: пусть имеется последовательность окружностей $|u| = q_m$, $q_m \uparrow \infty$, таких, что

$$\vartheta_m = \max_{|u|=q_m}\left|\frac{1}{\varphi(u)}\right| \to 0, \quad m \to \infty. \tag{22}$$

Рассмотрим величину $R_n(z, q)$ из [1]:

$$R_n(z, q) = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|u|=q}\frac{du}{u^n\varphi(u)}\int_{|t|=r_1}\tilde{F}(t)\frac{dt}{t}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^n\left[\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi(u)\right]A\left(z, \frac{x}{t}\right)\frac{d\tau(x)}{\frac{x}{t}-u} \tag{23}$$

где

$$\tilde{F}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k t^k, \quad a_k=\sigma^{k/\rho}\left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)\right]^{-1}; \; z\in D, \; |z|<\left(r_1^\rho-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}, \; r_1<r. \tag{24}$$

Принимая во внимание оценку [3]

$$\left|\frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\varphi(u)}{\frac{x}{t}-u}\right|<|\varphi(u)|+c(\varepsilon)\exp\left[(\sigma_1+\varepsilon)\left|\frac{x}{t}\right|^\rho\right], \tag{25}$$

а также соотношения (20) и (22), будем иметь

$$I=\left|\frac{1}{\varphi(u)}\int_0^\infty x^n\left[\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\varphi(u)\right]\frac{A\left(z, \frac{x}{t}\right)d\tau(x)}{\frac{x}{t}-u}\right|<$$

$$<c_0(\varepsilon)\left[\int_0^\infty x^{n+\rho-1}e^{-\omega x^\rho}\,dx+\int_0^\infty x^{n+\rho-1}e^{-\beta x^\rho}\,dx\right].$$

Здесь

$$\omega=\sigma-\frac{\sigma_1+(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho+\varepsilon}{r_1^\rho}, \quad \beta=\sigma-\frac{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}{r_1^\rho}, \tag{26}$$

$$z\in D, \quad |z|<\left(r_1^\rho-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad |u|=q_m, \quad |t|=r_1<r, \quad \varepsilon>0.$$

Поскольку $\omega>0$, то, вычисляя интегралы, стоящие в правой части последнего неравенства, и замечая, что $\omega<\beta$, найдем

$$I<\hat{c}(\varepsilon)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}{\omega^{n/\rho+1}}.$$

Пусть $\tilde{M}=\max\limits_{|t|=r_1}|\tilde{F}(t)|$. Тогда полученная оценка позволяет записать для выражения $R_n(z, q)$, представленного в виде (23), следующее:

$$|R_n(z, q)|<\hat{c}(\varepsilon)\tilde{M}\frac{q\,\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}{\omega(r_1 q\omega^{1/\rho})^n}, \quad q=q_m.$$

Отсюда, применив формулу Стирлинга, получим $|R_n(z, q_m)|<$ $<c^*(\varepsilon)\tilde{M}q_m\frac{\sqrt{n}}{\omega}\left(\frac{n}{ae\rho}\right)^{n/\rho}$, $a=(r_1q_m)^\rho\omega$. Подчиним теперь выбор числа n условию: $n=n_1$, где $n_1=[a\rho]$. Тогда предыдущее неравенство примет вид

$$|R_{n_1}(z, q_m)|<\exp\left[(\sigma_1+\sigma|z|^\rho-\sigma r_1^\rho+\varepsilon)q_m^\rho\right]; \tag{27}$$

$$z\in D, \; |z|<\left(r_1^\rho-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}, \quad m>m_0(\varepsilon).$$

Обратимся к выражению (17). В силу условия (22) получаем

$$|A_\lambda(q_m)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=q_m}\frac{du}{u^\lambda\varphi(u)}\right|<\vartheta_m q_m^{1-\lambda}; \quad \lambda=1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Для оценки оператора [1]

$$D^k W = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r_1} W_1(t) \frac{dt}{t} \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^k A\left(z, \frac{x}{t}\right) d\tau(x); \quad z \in \mathrm{D},\ |z| < r_1 < r_0,$$

используем неравенство (20). Тогда

$$|D^k W| < c(\varepsilon) M_1 r_1^{-k} \int\limits_0^\infty x^k \exp\left[(\sigma + \varepsilon)\left(\frac{|z|\, x}{r_1}\right)^\rho\right] d\tau(x) = \frac{l}{\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)}{(r_1 \beta^{1/\rho})^k}, \tag{29}$$

где $M_1 = \max\limits_{|t|=r_1} |W_1(t)|$, величина l не зависит от k, а β взято из (26).

В силу оценок (28) и (29) на окружности $|u| = q_m$ имеем

$$|\theta_n(z, q)| < \vartheta_m \frac{l}{\beta} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{\rho}+1\right)}{(q r_1 \beta^{1/\rho})^{\lambda-1}}, \quad q = q_m.$$

Откуда, учитывая неравенство

$$\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right) < \tilde{c}(\varepsilon_1)\left[\frac{k}{(1-\varepsilon_1) e\rho}\right]^{k/\rho}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

справедливое при любом k, получим

$$|\theta_n(z, q_m)| < \vartheta_m Б\left[1 + \sum_{\lambda=2}^{n}\left(\frac{\lambda-1}{b\rho e}\right)^{\frac{\lambda-1}{\rho}}\right]; \quad z \in \mathrm{D}, \quad |z| < r_1 < r_0,$$

где величина $Б$ не зависит от n и q_m, а $b = (1-\varepsilon_1)\beta (r_1 q_m)^\rho$.

Заметим, что функция $\eta(x) = \left(\frac{x}{be}\right)^x$ монотонно убывает для $0 < x < b$. Поэтому, положив в предыдущем соотношении $n = n_2 = [b\rho]$, будем иметь

$$|\theta_{n_2}(z, q_m)| < \vartheta_m Б \left[2 + O\left(\frac{1}{b}\right)\right]; \quad z \in \mathrm{D},\ |z| < r_1 < r_0. \tag{30}$$

Поскольку $\omega < \beta$, то при достаточно малом ε_1 можно записать $b > a = (r_1 q_m)^\rho \omega$, и, следовательно, $n_2 > n_1 = [a\rho]$. В таком случае оценка (30) будет верна и при замене числа n_2 числом n_1. Учитывая сделанное замечание, а также соотношение (27), получим

$$|R_n(z, q_m) + \theta_n(z, q_m)| < \exp\left[(\sigma_1 + \sigma |z|^\rho - \sigma r_1^\rho + \varepsilon) q_m\right] + \vartheta_m Б_1, \quad n = n_1,$$

где $m > m_0(\varepsilon)$ и величина $Б_1$ не зависит от q_m. Таким образом, если $z \in \mathrm{D}$, $|z| < \left(r_1^\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$ и $n = [a\rho]$, то в силу условия (22) из формулы (16) находим

$$F(z) = \lim_{m \to \infty} [Q(z, q_m) + T(z, q_m)]. \tag{31}$$

Итак, установлена

Теорема 2. *Пусть D — плоское множество, обладающее свойством $\mathfrak{R}$, а система $\{P_n(z)\}$ на D подчинена условию (18) и на любом множестве $\mathrm{D}(r, \delta)$ обладает свойством единственности. Пусть, далее, функции $W(z)$ и $F(z)$ принадлежат классу A, а характеристическая функция $\varphi(u)$ — целая, порядка $\rho > 0$ и типа σ_1.*

Если $M(F)=W(z)$, $z\in D(r,\ \delta)$, $|z|<\left(r^{\rho}-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$, *и выполнено требование* (22), *то для* $z\in D(r,\ \delta)$, $|z|<\left(r_1^{\rho}-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$, $r_1<r_0$, *справедливо представление* (31).

Замечание. Из существования предела (31) не следует существование пределов каждой из функций $Q(z,\ q_m)$ и $T(z,\ q_m)$ при $m\to\infty$ для всех $z\in D$, $|z|<\left(r_1^{\rho}-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$.

В подтверждение сказанного приведем пример. Положим $P_n(z)=\frac{z^n}{n!}$ и $W(z)=e^z$. Тогда $D^nF=F^{(n)}(z)$ и

$$H(z,\ u)=\sum_{k=1}^{\infty}(1+u+\ldots+u^{k-1})\frac{z^k}{k!}=\frac{1}{u-1}(e^{uz}-e^z).$$

Класс A в этом случае будет состоять из функций, регулярных в некотором круге $|z|<R$. Возьмем в качестве характеристической функции $\varphi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nu^n$ функцию $u\sin\pi u$. При таком выборе можно считать $q_m=m+\frac{1}{2}$, поскольку $\vartheta_m=\max\limits_{|u|=m+\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{u\sin\pi u}\right|\to 0$, $m\to\infty$, и, следовательно, условие (22) выполняется. Поэтому, если уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nF^{(n)}(z)=e^z \tag{32}$$

имеет решение $F(z)$ из класса A, то для $F(z)$ будет верна формула (31), в которой функция

$$T(z,\ q_m)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=m+\frac{1}{2}}\frac{e^{uz}-e^z}{(u-1)\,u\sin\pi u}\,du.$$

Вычисляя последний интеграл, найдем

$$T(z,\ q_m)=\frac{1}{\pi}\left\{(e^z-z-1)-(ze^z+e^{-z}-e^z)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k}{k}\left[\frac{e^{kz}-e^z}{k-1}+\frac{e^{-kz}-e^z}{k+1}\right]\right\}.$$

Отсюда следует, что для функции $T(z,\ q_m)$ не существует предела при $m\to\infty$, если $\operatorname{Re}z\neq 0$.

Покажем теперь, что рассматриваемое уравнение имеет решение из класса A. Так как $\varphi(u)=u\sin\pi u=\frac{u}{2i}(e^{i\pi u}-e^{-i\pi u})$, то уравнение (32) можно переписать в виде $[F(z+i\pi)-F(z-i\pi)]'=2ie^z$, и легко проверить, что функция $F^*(z)=-\frac{z}{\pi}e^z$ удовлетворяет этому уравнению. Принадлежность $F^*(z)$ к классу A очевидна.

§ 3. Некоторые оценки

Считая выполненными условия предыдущего параграфа, найдем оценки для функций $B_{0,0}(u)$ и $A(z, u)$. На основании представления [1]

$$B_{0,0}(u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_1}\tilde{F}(t)\frac{dt}{t}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\varphi(u)}{\frac{x}{t}-u}d\tau(x),\qquad\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}<r_1<r,$$

найдем

$$|B_{0,0}(u)<\frac{1}{2\pi r_1}\int\limits_{|t|=r_1}|\tilde{F}(t)\,dt|\int\limits_0^\infty\left\{\left|\varphi(u)\right|+c(\varepsilon)\exp\left[(\sigma_1+\varepsilon)\left(\frac{x}{r_1}\right)^\rho\right]\right\}d\tau(x)<$$

$$<\tilde{M}[|\varphi(u)|+c^0(\varepsilon)],\tag{33}$$

где $\tilde{M}=\max\limits_{|t|=r_1}|\tilde{F}(t)|$.

Обратимся теперь к функции $H(z, u)$ с представлением (21). Прежде всего оценим функцию ψ, определенную равенством (19). Для этого воспользуемся приемом, указанным в работе [3]. Заметим, что из условия (18) следует оценка

$$|A(z, u)|\leqslant\sum_{n=0}^\infty|P_n(z)||u|^n<c_4(\varepsilon)\exp[(\sigma+\varepsilon)|zu|^\rho],\tag{34}$$

в которой $z\in D(r, \delta)$, $R_1<\delta<r<R_2$, $\varepsilon>0$, а u — любое. Неравенство вида (34) будет, очевидно, верно и для производной $A'_u(z, u)$, $z\in D(r, \delta)$. Пусть $\left|\frac{x}{t}-u\right|\geqslant 1$. Тогда согласно (34) имеем

$$|\psi|<|A(z, u)|+c_4(\varepsilon)\exp\left[(\sigma+\varepsilon)\left|\frac{zx}{t}\right|^\rho\right].\tag{35}$$

Если же $\left|\frac{x}{t}-u\right|<1$, то на основании соотношения

$$\psi=\frac{1}{\frac{x}{t}-u}\int\limits_u^{\frac{x}{t}}A'_y(z, y)\,dy$$

получим

$$|\psi|\leqslant\frac{1}{\left|\frac{x}{t}-u\right|}\int\limits_u^{\frac{x}{t}}|A'_y(z, y)\,dy|=|A'_y(z, y)|_{y=\eta},$$

где η — некоторая точка прямолинейного отрезка, соединяющего точки u и $\frac{x}{t}$ и служащего здесь линией интегрирования. Поскольку $\left|\frac{x}{t}-\eta\right|<1$, то на основании (34) можно записать

$$|\psi|<c_4(\varepsilon)\exp\left\{(\sigma+\varepsilon)\left[|z|\left(\left|\frac{x}{t}\right|+1\right)\right]^\rho\right\},$$

или

$$|\psi|<c_4(\varepsilon)\exp(a|z|^\rho)\exp\left[(\sigma+2\varepsilon)\left|\frac{zx}{t}\right|^\rho\right],$$

так как всегда $(\sigma+\varepsilon)\left[\left|\frac{x}{t}\right|+1\right]^\rho<a+(\sigma+2\varepsilon)\left|\frac{x}{t}\right|^\rho$, где $a=a(\varepsilon)$ —

некоторая постоянная. Сопоставляя последний результат с оценкой (35), найдем

$$|\psi| < |A(z, u)| + c_4(\varepsilon)\exp(a|z|^\rho)\exp\left[(\sigma + 2\varepsilon)\left|\frac{zx}{t}\right|^\rho\right]. \tag{36}$$

Пусть $M_1 = \max\limits_{|t|=r_1} |W_1(t)|$. Тогда соотношения (21) и (36) дают

$$|H(z, u)| < M_1\left\{|A(z, u)| + c_4(\varepsilon)\exp(a|z|^\rho)\int\limits_0^\infty \exp\left[(\sigma + 2\varepsilon)\left(\frac{|z|}{r_1}x\right)^\rho\right]\times\right.$$

$$\left.\times\, d\tau(x)\right\} = M_1\left\{|A(z, u)| + c_4(\varepsilon)\sigma\rho\exp(a|z|^\rho)\int\limits_0^\infty x^{\rho-1}\exp(-hx^\rho)\,dx\right\},$$

где $h = \sigma - (\sigma + 2\varepsilon)\left(\frac{|z|}{r_1}\right)^\rho > 0$, если $z \in D(r_1, \delta)$. Отсюда получаем требуемую оценку

$$|H(z, u)| < M_1\left\{|A(z, u)| + \frac{c_5(\varepsilon)}{h}\exp(a|z|^\rho)\right\}, \tag{37}$$

причем $z \in D(r_1, \delta)$, а u — любое.

§ 4. Частный случай

С помощью результатов, установленных выше, можно получить в одном частном случае иное интегральное представление для функций $Q(z, q_m)$ и $T(z, q_m)$ из (31).

Допустим, что характеристическая функция $\varphi(u)$ имеет порядок $\rho < 1$ и все ее нули расположены на положительной части действительной оси. Допустим также, что пересечение множества $D(r, \delta)$, $R_1 < \delta < r < R_2$, с полуплоскостью $\operatorname{Re} z < 0$ не пусто. Выберем исходную систему $\{P_n(z)\}$ таким образом, чтобы функция $A(z, u)$, определенная равенством (2), имела вид

$$A(z, u) = e^{zu}a(z, u). \tag{38}$$

Относительно функций $a(z, u)$ и $\varphi(u)$ будем предполагать следующее:

f) отношение $|b(z, u)| = \left|\frac{a(z, u)}{\varphi(u)}\right|$ ограничено на лучах $\arg u = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и $z \in D(r, \delta)$;

g) существует последовательность $\{S_k\}$ дуг $|u| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow \infty$, $|\arg u| \leqslant \varepsilon$, на которой модуль функции $b(z, u)$ для $z \in D(r, \delta)$ тоже ограничен;

h) $|\varphi(u)| > |u|^{1+\gamma}$, $u \in S_k$, $\gamma > 0$.

Обозначим через C_k замкнутый контур, состоящий из отрезков ломаной $|\arg u| = \varepsilon$, $|u| \leqslant \rho_k$ и дуги S_k. Тогда, в силу сделанных предположений, из формул (11) и (15) соответственно получаем:

$$Q(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} B_{0,0}(u)\,b(z, u)\,e^{zu}du \tag{11*}$$

и

$$T(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} H(z, u)\frac{du}{\varphi(u)}. \tag{15*}$$

Поскольку порядок характеристической функции $\varphi(u)$ меньше единицы, то на основании оценки (33) и условия g) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_k} B_{0,0}(u)\,b(z, u)\,e^{zu}du \to 0, \quad k \to \infty,$$

для $z \in D(r, \delta)$, $\operatorname{Re} z < 0$. Поэтому, переходя в равенстве (11*) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$Q(z) = \lim_{k \to \infty} Q(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L B_{0,0}(u)\, b(z, u)\, e^{zu}\, du. \tag{39}$$

Контур L состоит здесь из двух лучей $\arg u = \varepsilon$ и $\arg u = -\varepsilon$. Интеграл (39) сходится для $z \in D(r, \delta)$, $\operatorname{Re} z < 0$ в силу неравенства (33) и условия f).

Преобразуем теперь интеграл (15*). Опираясь на оценку (37) и учитывая представление (38), можем записать

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_k} H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)} \right| < \frac{M_1}{2\pi} \int_{S_k} | b(z, u) e^{zu} du | + k(z) \int_{S_k} \left| \frac{du}{\varphi(u)} \right|,$$

где $k(z) = \frac{M_1}{2\pi h} c_5(\varepsilon) \exp(a |z|^{\rho})$. Согласно условию g) первый интеграл из правой части последнего соотношения стремится к нулю, если $k \to \infty$ и $z \in D(r_1\ \delta)$, $\operatorname{Re} z < 0$, а второй интеграл будет стремиться к нулю на основании предложения h). Поэтому предельный переход при $k \to \infty$ в равенстве (15*) нам дает

$$T(z) = \lim_{k \to \infty} T(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}, \tag{40}$$

причем контур L был определен выше. Сходимость полученного интеграла для $z \in D(r_1, \delta)$, $\operatorname{Re} z < 0$ гарантируется оценкой (37) и условиями f) и h).

Пусть при указанных ограничениях уравнение (1) имеет решение $F(z)$ из класса A. Тогда, на основании равенств (39) и (40), из формулы (31) получаем искомое представление $F(z) = Q(z) + T(z)$. Здесь $z \in D(r_1, \delta)$, $|z| < \left(r_1^{\rho} - \frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^{1/\rho}$, $\operatorname{Re} z < 0$.

В заключение отметим, что если в выражении (38) считать $a(z, u) \equiv 1$, то уравнение (1) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = W(z). \tag{1*}$$

Класс A будет состоять из функций, регулярных в некотором круге с центром в начале. Пусть уравнение (1*) имеет решение $F(z)$ из класса A, тогда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L B_{0,0}(u)\, e^{zu} \frac{du}{\varphi(u)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}.$$

Переменное z принадлежит здесь некоторому полукругу $|z| < r$, $\operatorname{Re} z < 0$. Выбор характеристической функции $\varphi(u)$ в данном случае возможен на основании результата п. 8.74 из книги [4].

г. Горький

Поступило
31 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. Ф. Об одном функциональном уравнении. ИАН СССР. Сер. матем., т. 29, № 4, 1965, с. 725—756.

2. Verblunsky S. On a class of differential-difference equations. Proc. London Math. Soc., Third ser., v. 6, № 23, 1956, p. 355—365.

3. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье. Матем. сб., т. 29 (71) : 3, 1951, с. 477—500.

4. Титчмарш Е. Теория функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.