Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

Ф. Л. Назаров, Н. А. Широков

ОБ УБЫВАНИИ (p,A)-ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{n_k}$ будем называть (p,A)-лакунарным (см. [1, гл. 3] и [2]), если для некоторых $p > 1$ и $A > 0$ выполнено $n_k \geqslant Ak^p$. Оказывается, что не тождественно равная нулю функция, представляемая (p,A)-лакунарным рядом в единичном круге $\mathbb{D}$, не может слишком быстро убывать при $x \to 1-0$. То, что аналитическая в $\mathbb{D}$ функция с редкими коэффициентами не может убывать с произвольной скоростью, было отмечено ранее (см. [3, 4]). Для (p,A)-лакунарных рядов выяснилось, что возможная скорость убывания при $1 < p < 2$ и $p \geqslant 2$ задается разными формулами, при $p > 2$ зазор между установленной возможной скоростью убывания и скоростью убывания построенного примера был существенно меньшим, чем при $1 < p < 2$.

Целью настоящей работы является значительное сужение упоминаемого зазора для случая $1 < p < 2$.

Результаты из [1, гл. 3] и [2] дают следующее утверждение. Пусть

$$B = B(p,A) = (p-1)\Big(\frac{\pi}{p}\Big)^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{1}{A^{1/(p-1)}} \cdot \frac{1}{|\cos\frac{\pi p}{2}|^{1/(p-1)}}, \quad 1 < p < 2.$$

Теорема 1. (a) *Пусть функция f аналитична в $\mathbb{D}$, ее ряд Тейлора (p,A)-лакунарен и при каком-то $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to 1-0} |f(x)| \exp\Big(\big(B+\varepsilon\big)\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}}\Big) = 0. \tag{1}$$

Тогда $f \equiv 0$.

(b) *Существуют аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f_0 с (p,A)-лакунарным рядом Тейлора и постоянная C_0 такие, что $f_0 \not\equiv 0$,*

$$\lim_{x\to 1-0} |f_0(x)| \exp\Big(B\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}} - C_0\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}+1}\Big) = 0. \tag{2}$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-0924.

Теорема 2. (a) *Если функция f взята из пункта* (a) *теоремы* 1, *и при каком-то $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение*

$$\lim_{x\to 1-0} |f(x)| \exp\Big(B\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}} + \\ +\varepsilon\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}}/\big(|\log(1-x)|+1\big)\Big) = 0, \tag{3}$$

то $f \equiv 0$.

(b) *Существуют аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f_1 с (p, A)-лакунарным рядом Тейлора и постоянная $c_1 = c_1(p, A) > 0$ такие, что*

$$\lim_{x\to 1-0} |f_1(x)| \exp\Big(B\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}} + \\ +c_1\big(1-x\big)^{-\frac{1}{p-1}}/\big(|\log(1-x)|^2+1\big)\Big) = 0. \tag{4}$$

Ясно, что условие (3) усиливает (1), а (4), соответственно, (2).

1. Доказательство части (a) теоремы 2

Пусть f удовлетворяет соотношению (3). Положим $g(s) = f(e^{-s})$, $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\varphi(\zeta) = \int\limits_0^\infty g(s) e^{\zeta s}\, ds, \qquad \operatorname{Re}\zeta < 0. \tag{5}$$

В [1, гл. 3] установлено, что φ – мероморфная функция на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с простыми полюсами в точках n_k, $k \geqslant 0$. Из (3) следует, что с некоторой постоянной $\widetilde{c}$ справедлива оценка

$$|g(s)| \leqslant \widetilde{c} \exp\Big(-Bs^{-1/(p-1)} - \frac{\varepsilon}{2} s^{-1/(p-1)}/(|\log s|+1)\Big), \quad 0 < s < \infty,$$

поэтому при $\zeta = -l + i\mu$ имеем

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \widetilde{c} \int\limits_0^\infty \exp\Big(-Bs^{-1/(p-1)} - \frac{\varepsilon}{2} s^{-1/(p-1)}/(|\log s|+1)\Big) e^{-ls} ds. \tag{6}$$

Пусть $\alpha = \frac{1}{p-1}$, $s_0 = s_0(l)$ – корень уравнения

$$-(Bs^{-\alpha})' - \Big(\frac{\varepsilon}{2} s^{-\alpha}\big(-\log s + 1\big)^{-1}\Big)' - l = 0, \tag{7$'$}$$

т.е.

$$\begin{gathered} B\alpha s_0^{-\alpha-1} + \frac{\varepsilon}{2}\alpha s_0^{-\alpha-1}\Big(-\log s_0 + 1\Big)^{-1} - \\ - \frac{\varepsilon}{2}s_0^{-\alpha-1}\Big(-\log s_0 + 1\Big)^{-2} - l = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

При $l \geqslant l_0(B, \alpha, \varepsilon)$ равенство (7) влечет, что $s_0 < \frac{1}{l}$ и $(-\log s_0 + 1)^{-1} < \frac{1}{\alpha}$, поэтому

$$\alpha\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{2}\alpha\Big(-\log s_0 + 1\Big)^{-1} - \frac{\varepsilon}{2}\Big(-\log s_0 + 1\Big)^{-2} > 0,$$

тогда (7) дает

$$\begin{gathered} (B+\delta)\alpha s_0^{-\alpha-1} = l, \\ s_0 = B^{\frac{1}{1+\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}l^{-\frac{1}{1+\alpha}} + B^{\frac{1}{1+\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}l^{-\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \frac{\delta\alpha}{B} + O\Big(\delta^2 l^{-\frac{1}{1+\alpha}}\Big). \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $B_1 = B + \delta$, тогда (8) влечет

$$s_0^{-\alpha} = B_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\alpha^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{9}$$

Если s_0 взято из (8), то

$$-B_1 s_0^{-\alpha} - l s_0 = -B_1^{\frac{1}{1+\alpha}}p\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{10}$$

Имеем

$$B_1^{\frac{1}{1+\alpha}} = B^{\frac{1}{1+\alpha}} + \frac{1}{1+\alpha}B^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\delta + O(\delta^2) \tag{11}$$

и

$$\frac{\varepsilon}{2}(-\log s_0 + 1)^{-1} = \delta + O(\delta^2). \tag{12}$$

Используя соотношения (9)–(12), находим, что с некоторой положительной постоянной $t = t(p, B)$ выполняется соотношение

$$\begin{gathered} -Bs_0^{-\alpha} - \frac{\varepsilon}{2}s_0^{-\alpha}(-\log s_0 + 1)^{-1} - l s_0 = \\ = -Bp\,\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}\,l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \varepsilon\,t\,l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log l)^{-1} + O\Big(l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log l)^{-2}\Big). \end{gathered} \tag{13}$$

Теперь стандартные асимптотические рассуждения, примененные к (6), (7′) и (13), при $\zeta = -l + i\mu$ влекут

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \widetilde{c}_1 \exp\Big[-B^{\frac{1}{1+\alpha}}\,p\,\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}\,l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \varepsilon\,t\,l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log l)^{-1} +$$

$$+O\Big(l^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log l)^{-2}\Big)\Big]. \tag{14}$$

Положим $\theta_0 = \frac{\pi p}{2}$. Если $\zeta = e^{\pm i\theta_0}r$, $r \geqslant 2$, то (14) дает оценку

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \widetilde{c}_1 \exp\Big(- B_2 r^{\frac{1}{p}} - B_3\varepsilon r^{\frac{1}{p}}(\log r)^{-1} + O\Big(r^{\frac{1}{p}}(\log r)^{-2}\Big), \tag{15}$$

где

$$B_2 = B^{\frac{1}{1+\alpha}} p\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}} \big|\cos\theta_0\big|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{16}$$

Положим $\prod(\zeta) = \prod\limits_{k\geqslant 0}(1 - \frac{\zeta}{n_k})$. Тогда в силу (2.05) из [1, гл. 3] при $\zeta = e^{\pm i\theta_0}r$, $r \geqslant 2$, имеем оценку

$$\Big|\prod(\zeta)\Big| \leqslant \widetilde{c}_2 \exp\Big(B_2 r^{\frac{1}{p}} + B_4 \log r\Big), \tag{17}$$

где B_2 в (16) и (17) совпадают. Функция $\psi = \varphi\prod$ – целая функция порядка $\frac{1}{p}$ нормального типа, при этом при $\zeta = re^{\pm i\theta_0}$ из (15) и (17) находим, что

$$|\psi(\zeta)| \leqslant \widetilde{c}_3 \exp\Big(- B_3\varepsilon r^{\frac{1}{p}}(\log r)^{-1} + O\Big(r^{\frac{1}{p}}(\log r)^{-2}\Big)\Big), \quad r \geqslant 2. \tag{18}$$

Если $\gamma_\pm = \{\zeta = re^{\pm i\theta_0}, r \geqslant 0\}$, $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$, то формула (18) влечет

$$\int\limits_\gamma \frac{\log|\psi(\zeta)|}{1 + |\zeta|^{1+1/p}}|d\zeta| = -\infty, \tag{19}$$

откуда в силу того, что ψ – целая функция нормального типа, и теорем единственности для угла $\{\zeta = re^{i\theta} : -\theta_0 < \theta < \theta_0, r > 0\}$, получаем $\psi \equiv 0$, откуда и $f \equiv 0$. Утверждение (a) доказано.

Прежде чем приступить к доказательству части (b), установим следующее вспомогательное утверждение.

2. Вспомогательные утверждения для части (b) в теореме 2

Лемма 1. *Пусть* $b > 1$, $0 < \rho < 1$, $0 < \Delta < 1$,

$$\mathrm{f}(\zeta) = \int\limits_b^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\,\frac{\log t}{(\log t)^2 + 4\pi^2}\,dt. \tag{20}$$

Тогда при $\zeta\to\infty$, $|\arg\zeta-\pi|<\Delta\pi$ справедливо соотношение

$$\mathrm{f}(\zeta)=-\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cdot\frac{(\zeta e^{-\pi i})^{\rho}}{\zeta\log(\zeta e^{-\pi i})}-\Big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\Big)^2\cos\pi\rho\frac{(\zeta e^{-\pi i})^{\rho}}{\zeta\big(\big|\log|\zeta|\big|^2\big)}+ \\ +O\bigg(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{\big(\big|\log|\zeta|\big|^3\big)}\bigg). \tag{21}$$

Доказательство леммы 1. Положим

$$\mathrm{f}_1(\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\,\frac{\log t}{(\log t)^2+4\pi^2}\,dt. \tag{22}$$

Ясно, что при $\zeta\to\infty$ выполнено

$$|\mathrm{f}_1(\zeta)-\mathrm{f}(\zeta)|=O\bigg(\frac{1}{|\zeta|}\bigg),$$

поэтому достаточно проверить (21) для функции f_1. Пусть далее

$$\mathrm{f}_{1\pm}(\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\,\frac{1}{\log t\pm 2\pi i}\,dt. \tag{23}$$

Тогда $\mathrm{f}_1=\frac{1}{2}(\mathrm{f}_{1+}+\mathrm{f}_{1-})$. Далее, при $|\zeta|>2$, $0<\rho<1$, $|\arg\zeta-\pi|<\Delta\pi$ легко проверить оценку

$$\int\limits_0^\infty\frac{t^{\rho-1}}{|t-\zeta|}\,\frac{dt}{(|\log|+2\pi)^3}=O\bigg(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\bigg). \tag{24}$$

Определим функции

$$\mathrm{f}_{2\pm}(\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\,\frac{dt}{(\log t\pm 2\pi i)^2}. \tag{25}$$

Для $\varepsilon>0$ и $R>0$ определим контур:

$$[\varepsilon,R]\cup\Big\{Re^{i\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\Big\}\cup[R,\varepsilon]\cup\Big\{\varepsilon e^{i\theta}:2\pi\geqslant\theta\geqslant 0\Big\}. \tag{26}$$

Фиксируем ζ в обсуждаемой области. Рассматривая интеграл (25) для f_{2+} по контуру (26) и устремляя ε к нулю, а R к ∞, полагая $0 < \arg t < 2\pi$, найдем, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t+2\pi i)^2} - e^{2\pi i\rho}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t+4\pi i)^2} =$$
$$= 2\pi i\frac{\zeta^{\rho-1}}{(\log\zeta+2\pi i)^2}. \quad (27)$$

В (27) имеем $0 < \arg\zeta < 2\pi$. Учитывая, что

$$\frac{1}{(\log\zeta+2\pi i)^2} = \frac{1}{(\log|\zeta|)^2} + O\biggl(\frac{1}{(\log|\zeta|)^3}\biggr) \quad (28)$$

при $|\zeta|\to\infty$, и применяя (24), находим:

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t+4\pi i)^2} - \int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t+2\pi i)^2} = O\biggl(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\biggr). \quad (29)$$

Теперь (27), (28) влекут

$$\mathrm{f}_{2+}(\zeta) - e^{2\pi i\rho}\mathrm{f}_{2+}(\zeta) = 2\pi i\frac{\zeta^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^2} + O\biggl(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\biggr),$$
$$\mathrm{f}_{2+}(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\biggl(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\biggr). \quad (30)$$

Для f_{2-} нужно рассматривать $-2\pi < \arg t < 0$ и контур

$$[\varepsilon, R]\cup\Bigl\{Re^{i\theta} : 0\geqslant\theta\geqslant-2\pi\Bigr\}\cup[R,\varepsilon]\cup\Bigl\{\varepsilon e^{i\theta} : -2\pi\leqslant\theta\leqslant 0\Bigr\}. \quad (31)$$

Тогда выполнено соотношение

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t-2\pi i)^2} - e^{-2\pi i\rho}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{(\log t-4\pi i)^2} =$$
$$= -2\pi i\frac{\zeta^{\rho-1}}{(\log\zeta-2\pi i)^2}, \quad (32)$$

где в (32) выбрано $-2\pi < \arg\zeta < 0$. Тогда, как и в (29)–(31), имеем

$$\mathrm{f}_{2-}(\zeta) = -\frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\rho}}\ \frac{\zeta^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^2} + O\biggl(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|^3)}\biggr) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \frac{(\zeta e^{i\pi})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{33}$$

Теперь $\zeta e^{\pi i} = (\zeta e^{2\pi i})e^{-\pi i}$, поэтому (36) влечет

$$\mathrm{f}_{2-}(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right), \tag{34}$$

где, как и в (30), $0 < \arg\zeta < 2\pi$.

Рассматривая интеграл для f_{1+} по контуру (26), получим

$$\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{\log t + 2\pi i} - e^{2\pi i\rho} \int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{\log t + 4\pi i} =$$

$$= 2\pi i \frac{\zeta^{\rho-1}}{\log\zeta + 2\pi i}, \tag{35}$$

где в правой части (35) $0 < \arg\zeta < 2\pi$. Затем

$$\frac{1}{\log t + 4\pi i} - \frac{1}{\log t + 2\pi i} = -2\pi i \frac{1}{(\log t + 2\pi i)^2} + O\left(\frac{1}{(|\log t| + 2\pi)^3}\right),$$

поэтому из (24) и (35) получаем

$$\mathrm{f}_{1+}(\zeta) - e^{2\pi i\rho}\mathrm{f}_{1+}(\zeta) + 2\pi i e^{2\pi i\rho}\mathrm{f}_{2+}(\zeta) =$$

$$= 2\pi i \frac{\zeta^{\rho-1}}{\log\zeta + 2\pi i} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{36}$$

Теперь (24), (30) и (36) влекут

$$\mathrm{f}_{1+}(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log(\zeta e^{-\pi i}) + 3\pi i)} + \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{\pi i\rho} \left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho}\ \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2}\right] + \right.$$

$$+ O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right) = -\frac{\pi}{\sin \pi\rho}\ \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log(\zeta e^{-\pi i}) + 3\pi i)} -$$

$$- \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho}\right)^2 e^{\pi i\rho} \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{37}$$

Для вычисления f_{1-} используем контур (31), тогда при $-2\pi < \arg t < 0$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{\log t - 2\pi i} - e^{-2\pi i\rho} \int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{\log t - 4\pi i} =$$

$$= -2\pi i \frac{\zeta^{\rho-1}}{\log\zeta - 2\pi i}, \tag{38}$$

где в (38) $-2\pi < \arg\zeta < 0$. Так как

$$\frac{1}{\log t - 4\pi i} - \frac{1}{\log t - 2\pi i} = 2\pi i \frac{1}{(\log t - 2\pi i)^2} + O\left(\frac{1}{(|\log t| + 2\pi)^3}\right),$$

то (24), (33) и (38) дают

$$\mathrm{f}_{1-}(\zeta) - e^{-2\pi i\rho}\mathrm{f}_{1-}(\zeta) - e^{-2\pi i\rho}2\pi i\mathrm{f}_{2-}(\zeta) =$$

$$= -2\pi i \frac{\zeta^{\rho-1}}{\log\zeta - 2\pi i} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right),$$

$$\mathrm{f}_{1-}(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{(\zeta e^{\pi i})^\rho}{\zeta(\log(\zeta e^{\pi i}) - 3\pi i)} -$$

$$-\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\right)^2 e^{-\pi i\rho}\frac{(\zeta e^{\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{39}$$

Если в (39) вместо области значений $\arg\zeta \in (-2\pi, 0)$ рассмотреть, как в (34), промежуток $(0, 2\pi)$, то

$$\mathrm{f}_{1-}(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log(\zeta e^{-\pi i}) - 3\pi i)} -$$

$$-\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\right)^2 e^{-\pi i\rho}\frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{40}$$

Теперь (37) и (40) дают

$$\frac{1}{2}\Big(\mathrm{f}_{1+}(\zeta) + \mathrm{f}_{1-}(\zeta)\Big) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta}\frac{\log(\zeta e^{-\pi i})}{(\log(\zeta e^{-\pi i}))^2 + 9\pi^2)} -$$

$$-\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\right)^2 \cos\pi\rho\frac{(\zeta e^{-\pi i})^\rho}{\zeta(\log|\zeta|)^2} + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\right). \tag{41}$$

Так как

$$\frac{v}{v^2 + 9\pi^2} = \frac{1}{v} + O\Big(\frac{1}{v^3}\Big),$$

при $v \to \infty$, то, с учетом соотношения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v + 2\pi i} + \frac{1}{v - 2\pi i}\right) = \frac{v}{v^2 + 4\pi^2}$$

и формул (23) и (41), получаем утверждение леммы.

Утверждение. *Положим*

$$\mathrm{f}_0(\zeta) = \int\limits_b^\infty \frac{t^{\rho-1}}{t-\zeta}\ \frac{dt}{\log t} \tag{42}$$

при $b > 2$. *Тогда для* ζ, *удовлетворяющих условиям леммы, справедливо*

$$\mathrm{f}_0(\zeta) = \mathrm{f}(\zeta) + O\Big(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{(\log|\zeta|)^3}\Big). \tag{43}$$

Доказательство следует из (27) и того, что при $v \to \infty$

$$\frac{v}{v^2 + 4\pi^2} = \frac{1}{v} + O\Big(\frac{1}{v^3}\Big).$$

Следствие. *Пусть* $\frac{1}{2} < \rho < 1$, $|\zeta_0| > 1$, $\arg\zeta_0 - \pi = \pm\frac{\pi}{2\rho}$, *функция* f_0 *определена в* (42). *Тогда с учетом формул* (21) *и* (43) *имеем*

$$\zeta_0\mathrm{f}_0(\zeta_0) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{e^{\pm\frac{\pi}{2}i}|\zeta_0|^\rho}{\log|\zeta_0| \pm \frac{\pi}{2\rho}i} - \Big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\Big)^2\cos\pi\rho\frac{|\zeta_0|^\rho e^{\pm\frac{\pi}{2}i}}{(\log|\zeta_0|)^2} +$$

$$+O\Big(\frac{|\zeta_0|^\rho}{(\log|\zeta_0|)^3}\Big) = -\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{|\zeta_0|^\rho}{(\log|\zeta_0|)^2} \mp$$

$$\mp i\Big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\ \frac{|\zeta_0|^\rho}{\log|\zeta_0|} + \Big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\Big)^2\cos\pi\rho\frac{|\zeta_0|^\rho}{(\log|\zeta_0|)^2} + O\Big(\frac{|\zeta_0|^{\rho-1}}{(\log|\zeta_0|)^3}\Big). \tag{44}$$

Обозначим для дальнейших целей

$$\varkappa_1 = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}, \quad \varkappa_2 = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}, \quad \varkappa_3 = \Big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\Big)\cos\pi\rho. \tag{45}$$

3. Построение функции f_1 для части (b) теоремы 2

Число λ в дальнейшем будет определено в соотношении (67), из которого следует, что оно зависит лишь от p и A. Пусть $\rho = \frac{1}{p}$, число A_1 определено следующим образом [2]. Пусть $\theta_0 = \pi\frac{2-p}{2}$, $\lambda_0 = (1-\rho)\theta_0$,

$$x = \frac{\sin\lambda_0}{\cos\theta_0}, \quad \Big(\frac{A}{A_1}\Big)^\rho = x. \tag{46}$$

Положим $y = \nu(t) = \frac{\lambda t^\rho}{\log t}$, $t \geqslant 2$, $\nu_*(t) = [\nu(t)]$, t_k – точки скачков функции ν_*, именно, $\nu(t_k) = k$. Тогда

$$\rho\log t_k - \log\log t_k + \log\lambda = \log k,$$

$$\log t_k \sim p\log k, \quad t_k = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^p k^p(\log t_k)^p \sim \left(\frac{p}{\lambda}\right)^p k^p(\log k)^p. \tag{47}$$

Выберем $b = b(p, A)$ так, чтобы

$$\left(\frac{p}{\lambda}\right)^p (\log b)^p > 2A_1 + 2. \tag{48}$$

Пусть t_k^0 – ближайшее из чисел $[A_1k^p]$ к числу t_k, $\nu_0(t) = k$, если $t_k^0 \leqslant t < t_{k+1}$. Отметим, что в силу (47) и (48) имеем

$$|\nu(t) - \nu_*(t)| \leqslant 1, \qquad |\nu_*(t) - \nu_0(t)| \leqslant 1 \tag{49}$$

при $t \geqslant t_{k_0}$, $k_0 = k_0(p, A)$. Пусть $b_1 = \max(k_0(p, A), b(p, A))$,

$$g(\zeta) \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_{b_1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) d\nu(t), \quad g_*(\zeta) \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_{b_1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) d\nu_*(t),$$

$$g_0(\zeta) \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_{b_1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) d\nu_0(t). \tag{50}$$

Пусть $\psi_0 = e^{g_0}$. Тогда ψ_0 – мероморфная функция с простыми полюсами. Если положить

$$\mathfrak{f}_{A_1}(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{[A_1k^p]}\right),$$

то полюсы ψ_0 лежат среди нулей функции $\mathfrak{f}_1$, поэтому функция $\mathfrak{f}_{A_1}\psi_0$ – целая. Далее,

$$g(\zeta) = \int\limits_{b_1}^{\infty} \nu(t)\left(\log\left(1 - \frac{\zeta}{t}\right)\right)_t' dt + O(\log|\zeta|),$$

$$g_0(\zeta) = \int\limits_{b_1}^{\infty} \nu_0(t)\left(\log\left(1 - \frac{\zeta}{t}\right)\right)_t' dt + O(\log|\zeta|),$$

т.е.

$$g(\zeta) = \zeta\int\limits_{b_1}^{\infty} \frac{\nu(t)}{t(t-\zeta)}\, dt + O(\log|\zeta|), \tag{51}$$

$$g_0(\zeta) = \zeta \int\limits_{b_1}^{\infty} \frac{\nu_0(t)}{t(t-\zeta)}\, dt + O(\log|\zeta|). \tag{52}$$

Из (49) следует, что

$$g(\zeta) - g_0(\zeta) = O(\log|\zeta|). \tag{53}$$

Теперь (44) и (53) влекут соотношение

$$g_0\Big(re^{\pm i\theta_0}\Big) =$$
$$= -\varkappa_1\lambda\frac{r^\rho}{(\log r)^2} \mp i\bigg(\varkappa_2\lambda\frac{r^\rho}{\log r} + \lambda\varkappa_3\frac{r^\rho}{(\log r)^2}\bigg) + O\bigg(\frac{r^\rho}{(\log r)^3}\bigg); \tag{54}$$

постоянные $\varkappa_j$ взяты из (45), причем $\varkappa_1 > 0$. Соотношение (54) дает

$$\Big|\psi_0\Big(re^{\pm i\theta_0}\Big)\Big| = \exp\bigg(-\lambda\varkappa_1\frac{r^\rho}{(\log r)^2} + O\bigg(\frac{\lambda r^\rho}{(\log r)^3}\bigg)\bigg). \tag{55}$$

Окончательно положим

$$\mathfrak{f}(\zeta) = (\mathfrak{f}_{A_1}(-\zeta)\psi_0(-\zeta))/\mathfrak{f}_A(\zeta), \tag{56}$$

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i+l}^{\infty i+l} \mathfrak{f}(\zeta)e^{-s\zeta}\, ds. \tag{57}$$

4. Выбор величины λ

Воспользуемся формулами (21), (56), а также соотношением (33) из [2]; заменим для удобства θ на $\pi-\theta$ и обозначим $l = r\cos\theta$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$; тогда при x, определенном в (47) при $\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta}) = \mathfrak{f}(re^{i(\pi-\theta)})$, имеем

$$-\log|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})| = c(\rho)\frac{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)}{\cos^\rho\theta}\cdot l^\rho + \varkappa_1\lambda\,\mathrm{Re}\,\frac{r^\rho e^{i(\pi-\theta)\rho}}{\log r + i(\pi-\theta)} +$$
$$+\varkappa_4\lambda\,\mathrm{Re}\,\frac{r^\rho e^{i(\pi-\theta)\rho}}{(\log r)^2} + O\bigg(\frac{\lambda r^\rho}{(\log r)^3}\bigg). \tag{59}$$

Известно [2, лемма 1], что функция $h(\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)}{\cos^\rho\theta}$ положительна на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и при $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ имеет единственный положительный минимум при $\theta = \theta_0$.

Лемма 2. *Выполнено соотношение* $h''(\theta_0) \overset{\text{def}}{=} \varkappa_0 > 0$.

Это утверждение мы докажем в самом конце работы. Предполагая лемму 2 справедливой, отметим, что для любого фиксированного $\delta_0 > 0$ в силу единственности корня $\theta = \theta_0$ уравнения $h'(\theta) = 0$ на $[0, \frac{\pi}{2})$ имеется число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0) > 0$ такое, что $h'(\theta) \leqslant -\varepsilon_0$, если $\theta \leqslant \theta_0 - \delta_0$, и $h'(\theta) \geqslant \varepsilon_0$, если $\frac{\pi}{2} > \theta \geqslant \theta_0 + \delta_0$. Пусть, далее,

$$\begin{aligned} l^\rho h_0(\theta) &\overset{\text{def}}{=} \varkappa_1 \operatorname{Re} \frac{r^\rho e^{i(\pi-\theta)\rho}}{\log r + i(\pi - \theta)} + \varkappa_4 \operatorname{Re} \frac{r^\rho e^{i(\pi-\theta)\rho}}{(\log r)^2} = \\ &= l^\rho \Bigg(\varkappa_1 \operatorname{Re} \frac{e^{i(\pi-\theta)\rho}}{\cos^\rho \theta(\log l - \log\cos\theta + i(\pi-\theta)} + \\ &\qquad + \varkappa_4 \operatorname{Re} \frac{e^{i(\pi-\theta)\rho}}{\cos^\rho\theta(\log l - \log\cos\theta)^2} \Bigg). \end{aligned} \tag{60}$$

Определим, как в [2], значение l следующим образом.

Пусть $N = \frac{\pi}{(\cos\theta_0)^\rho} \cdot \frac{1}{A^\rho}$, $l = \left(\frac{\rho N}{s}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$, где в дальнейшем значение s мы будем использовать при оценке через обратное преобразование Лапласа функции $\mathfrak{f}_{p,A}(e^{-s})$. Из (60) находим, что

$$h_0'(\theta_0) = \frac{\varkappa_5}{\log l} + O\Big(\frac{1}{(\log l)^2}\Big), \quad h_0''(\theta_0) = O\Big(\frac{1}{\log l}\Big). \tag{61}$$

Соединяя оценки (59)–(61), при $re^{i\theta} = l + i\mu$ получаем

$$\frac{d}{d\theta}\Big(-\log \big|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})\big|_{\theta=\theta_0, r(\theta)e^{i\theta}=l+i\mu} = \lambda \left(\frac{\varkappa_5}{\log l} + O\Big(\frac{1}{(\log l)^2}\Big)\right) l^\rho, \tag{62}$$

т.е. с учетом (59)–(61) и того, что $h'(\theta_0) = 0$, имеем при $re^{i\theta} = l + i\mu$:

$$\begin{aligned} -\log|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})| &= \left[c(\rho)\frac{\cos\rho\theta_0}{\cos^\rho\theta_0} + \left(\frac{\lambda\cdot\varkappa_5}{\log l} + O\Big(\frac{1}{(\log l)^2}\Big)\right)(\theta-\theta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\varkappa_0 + O\Big(\frac{1}{\log l}\Big)\right)(\theta-\theta_0)^2 + O(\theta-\theta_0)^3 \right] l^\rho + \\ &\quad + \lambda\varkappa_1 \frac{1}{\cos^2\theta_0}\left(\frac{1}{(\log l)^2} + O\Big(\frac{1}{(\log l)^3}\Big)\right) l^\rho, \end{aligned} \tag{63}$$

т.е. при $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta_0$ имеем

$$-\log|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})|l^{-\rho}\geqslant c(p)\frac{\cos\rho\theta_0}{\cos^\rho\theta_0}+ \\ +\frac{\lambda\cdot\varkappa_5}{\log l}(\theta-\theta_0)+\frac{1}{4}\varkappa_0(\theta-\theta_0)^2+\frac{1}{2}\lambda\varkappa_1\frac{1}{\cos^\rho\theta_0}\cdot\frac{1}{(\log l)^2}. \quad (64)$$

Но

$$\frac{\lambda\varkappa_5}{\log l}t+\frac{1}{4}\varkappa_0t^2\geqslant-\frac{\varkappa_5^2}{\varkappa_0(\log l)^2}\lambda^2 \quad (65)$$

при $t\in R$, т.е.

$$-\log|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})|\geqslant\left[h(\theta_0)-\frac{\varkappa_5^2}{\varkappa_0(\log l)^2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda\varkappa_1\frac{1}{\cos^\rho\theta_0}\cdot\frac{1}{(\log l)^2}\right]l^\rho \quad (66)$$

при $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta_0$. Выбирая

$$\lambda=\lambda_0=\frac{1}{4}\ \frac{\varkappa_5^2\cos^\rho\theta_0}{\varkappa_0\,\varkappa_1}, \quad (67)$$

получим, что при $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta_0$ выполнено

$$-\log|\widetilde{\mathfrak{f}}(re^{i\theta})|\geqslant\left(h(\theta_0)+\varkappa_6\cdot\frac{1}{(\log l)^2}\right)l^\rho, \quad (68)$$

где $\varkappa_6>0$.

Аналогичное неравенство выполнено и при $|\theta-\theta_0|\geqslant\delta_0$. Теперь в силу определения (58) и оценки (68) аналогично оценкам (33)–(37) в [2] завершаем доказательство части (b) теоремы 2 $\mathfrak{f}_{p,A}(e^{-s})=\mathfrak{f}_1(e^{-s})=F(s)$ и получаем соотношение (4).

5. Доказательство леммы 2

Итак, пусть $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$, $\rho=\frac{1}{p}$, $\lambda_0=(1-\rho)\theta_0$,

$$x=\frac{\sin\lambda_0}{\sin(\lambda_0+\pi\rho)},\qquad h(\theta)=\frac{\cos\rho\theta-x\cos\rho(\pi-\theta)}{(\cos\theta)^\rho}. \quad (69)$$

Заметим, что при выборе $\theta_0=\pi\frac{2-\rho}{2}$ значение x в (47) совпадает с определенным выше в (69).

В силу леммы 1 из [2], имеем $h(\theta_0)>0$, $h'(\theta_0)=0$. Так как

$$(\log h)''\Big|_{\theta=\theta_0}=\frac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)}-\frac{(h'(\theta_0))^2}{(h(\theta_0))^2}=\frac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)},$$

то достаточно проверить, что $(\log h)''\big|_{\theta=\theta_0} > 0$. Полагая $\lambda = (1-\rho)\theta$, из соотношений (8) и (9) из [2] находим, что

$$(\log h)'(\theta) = \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} = \\ = \rho\frac{\sin \pi\rho}{\sin(\lambda_0 + \pi\rho)} \cdot \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos\theta(\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi - \theta))}. \quad (70)$$

Теперь $\lambda(\theta_0) = \lambda_0$, $\lambda'(\theta) = 1 - \rho$, поэтому (70) влечет

$$(\log h)''\Big|_{\theta=\theta_0} = \rho\frac{\sin \pi\rho}{\sin(\lambda_0 + \pi\rho)}\cdot(1-\rho)\cdot\frac{1}{\cos\theta_0(\cos\theta_0 - x\cos\rho(\pi - \theta_0))} > 0,$$

что и требовалось проверить.

Второй автор искренне признателен Michigan State University за гостеприимство, проявленное по отношению к нему осенью 2004 года. Во время этого визита и была выполнена данная работа.

Литература

1. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* Lect. Notes Math., 1312 (1988).
2. Н. А. Широков, *Пример быстро убывающей (p, A)-лакунарной функции.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **270** (2000), 350–363.
3. L. I. Hirschman, J. A. Jenkins, *On lacunary Dirichlet series.* — Proc. Amer. Math. Soc **1**, No. 4 (1950), 512–517.
4. J. M. Anderson, *Bounded analytic functions with Hadamard gaps.* Mathematica **23**, No. 2 (1976), 142–147.

Nazarov F. L., Shirokov N. A. On the decay rate of (p, A)-lacunary series.

A power series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{n_k}$ with radius of convergence equal to 1 is said to be (p, A)-lacunary if $n_k \geqslant Ak^p$, $A > 0$, $1 < p < \infty$. It is proved that if a (p, A)-lacunary series f satisfies the condition

$$|f(x)|\exp\left(B(1-x)^{-\frac{1}{p-1}} + \varepsilon(1-x)^{-\frac{1}{p-1}}\Big/(|\log(1-x)|+1)\right) \underset{x\to 1-0}{\longrightarrow} 0$$

for $1 < p < 2$, where

$$B = (p-1)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{1}{A^{1/(p-1)}} \cdot \frac{1}{|\cos\frac{\pi\rho}{2}|^{1/(p-1)}}$$

and $\varepsilon > 0$, then $f \equiv 0$.

We also construct a (p, A)-lacunary series f_0 such that

$$|f_0(x)| \exp\left(B(1-x)^{-\frac{1}{p-1}} + C_0(1-x)^{-\frac{1}{p-1}} \Big/ (|\log(1-x)|^2 + 1)\right) \underset{x \to 1-0}{\longrightarrow} 0$$

for a constant $C_0 = C_0(p, A) > 0$.

Michigan State University

Поступило 25 сентября 2005 г.

С.-Петербургский
государственный университет