

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. Ya. Panovko, Numerical modeling of 3-dimensional flows of a viscous incompressible fluid in a channel with a step, *TVT*, 1989, Volume 27, Issue 6, 1126–1131

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 26, 2025, 09:51:26



УДК 532.542.2 © 1989

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С УСТУПОМ

Пановко М. Я.

Приводится алгоритм численного моделирования пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости в канале с уступом, основанный на методе расщепления по физическим факторам. Математическая модель течения базируется на нестационарных трехмерных уравнениях Навье – Стокса относительно переменных скорость – давление. Приведены расчетные данные о структуре пространственных течений в канале при числе Рейнольдса $Re=100$. Существенной особенностью потока является образование вторичных течений в плоскости поперечного сечения за уступом.

1. Течение газообразных или жидких сред в элементах большинства современных машин, гидравлических и трубопроводных системах осуществляется, как правило, в каналах, состоящих из участков, проходные сечения которых могут значительно отличаться друг от друга. Причем в силу ряда технологических причин эти участки необходимо сопрягать ступенчатым образом, что, в свою очередь, может привести к отрыву потока и образованию зон возвратно-циркуляционного течения весьма сложной структуры. Этот эффект является существенным при определении рабочих характеристик соответствующих устройств. Потребности техники требуют наряду с экспериментальными исследованиями проведения расчетного анализа отрывных течений как на основе приближенных методов [1, 2], так и путем численного решения полных уравнений Навье – Стокса [3]. Среди работ последнего направления следует отметить [4], а также цикл статей, опубликованных в [5], в которых приводятся результаты численного моделирования плоских отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости для умеренных чисел Рейнольдса ($Re < 500$) в каналах с уступом.

Решение уравнений Навье – Стокса в трехмерной постановке позволяет выявить дополнительные особенности течений в каналах сложной формы, в частности, наличие вторичных течений в плоскости поперечного сечения. Применительно к искривленным каналам это показано, например, в [6]. Численные результаты, приведенные в [7], свидетельствуют о трехмерном характере отрывных течений в прямоугольном канале с уступом.

В данной работе на основе метода расщепления по физическим факторам [8] проведено численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости в канале с уступом при $Re=100$. В отличие от [7], где задача сформулирована в переменных скорость – завихренность, математическая модель течения базируется на нестационарных трехмерных уравнениях Навье – Стокса в переменных скорость – давление.

2. Рассматривается задача о пространственных течениях в канале с внезапным расширением проходного сечения. Схема канала и его расположение относительно декартовой системы координат x, y, z показаны на рис. 1. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается нестационарными трехмерными уравнениями Навье – Стокса относительно вектора скорости $\mathbf{V} = \{u, v, w; t\}$, где $u = u(x, y, z; t)$, $v = v(x, y, z; t)$, $w = w(x, y, z; t)$, и давления $p = p(x, y, z; t)$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

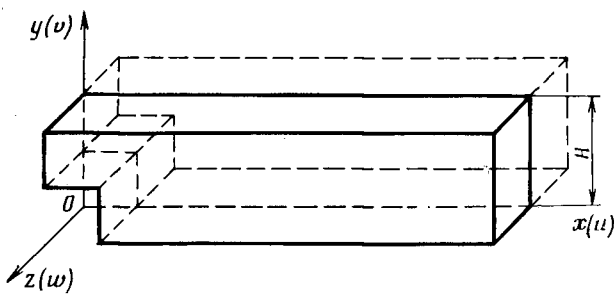


Рис. 1. Схема канала

Здесь ∇ и Δ — соответственно операторы Гамильтона и Лапласа; $\mathbf{V}\mathbf{V}$ — тензор второго ранга (диада). В декартовой системе координат вектор $\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V})$, представляющий собой конвективный член в дивергентной форме, имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = \mathbf{i}\nabla \cdot (u\mathbf{V}) + \mathbf{j}\nabla \cdot (v\mathbf{V}) + \mathbf{k}\nabla \cdot (w\mathbf{V}),$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w$ (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы в направлении координатных осей).

Система (1), (2) записана в безразмерных переменных (штрихом обозначены ниже размерные переменные)

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}'/V_0, \quad p = p/\rho V_0^2, \quad t = t'/T, \quad T = H/V_0, \\ x &= x'/H, \quad y = y'/H, \quad z = z'/H, \quad \text{Re} = V_0 H/\nu, \end{aligned}$$

где V_0 , H — соответственно характерная скорость потока и высота канала; ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность.

Численное моделирование проводилось методом расщепления по физическим факторам [8, 9]. Согласно этому методу, процесс вычислений подразделялся на три этапа. На первом этапе определялась предварительная скорость \mathbf{V}^* по явной схеме (k — номер временного шага, Δt — шаг по времени)

$$\frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}^k}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V})^k + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V}^k. \quad (3)$$

На втором этапе вычислялось давление в потоке из уравнения Пуассона

$$\Delta p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^*, \quad (4)$$

которое получено подстановкой в уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1} = 0$ соотношения для расчета значений скорости на $(k+1)$ -м временном шаге

$$(\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^*)/\Delta t = -\nabla p^{k+1}. \quad (5)$$

В расчете скорости на основе (5) заключался третий этап вычислительного процесса.

Для системы (1), (2) ставилась начально-краевая задача. На стенках канала для скорости задавались условия прилипания и непротекания

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно единичные векторы нормали и касательной на границе области.

На входе в канал продольная скорость задавалась в форме профиля, соответствующего пуазейлевому течению в канале прямоугольного сечения. Этот профиль находился из решения уравнения для стабилизированного течения при дополнительном условии $u_{\max} = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \text{Re} \frac{dp}{dx}. \quad (7)$$

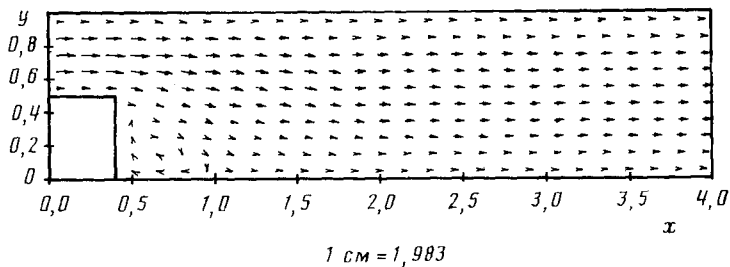


Рис. 2. Течение в плоскости симметрии ($z=0$)

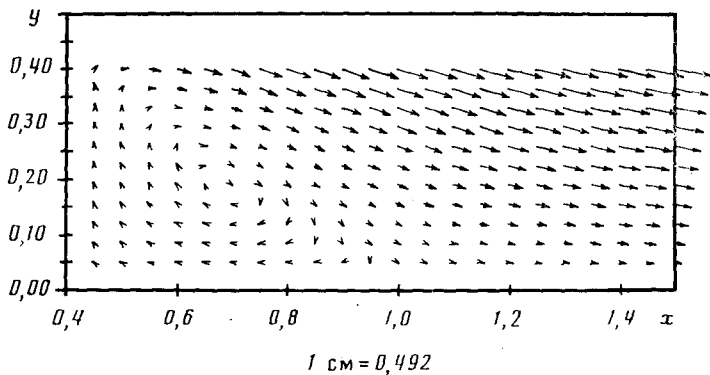


Рис. 3. Фрагмент течения за уступом ($z=0$)

Для поперечных компонент вектора скорости на входе ставились «мягкие» граничные условия

$$\partial v / \partial x = \partial w / \partial x = 0. \quad (8)$$

При задании граничных условий на выходе использовался подход, примененный ранее к задачам внешнего обтекания [10, 11]. Следуя этому подходу, для продольной скорости на выходе канала ставилось «открытое» граничное условие

$$\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0, \quad (9)$$

где c — характерная скорость распространения возмущений на сетке. Методика определения скорости c подробно описана в [10]. Как отмечалось в [10, 11], эти условия эффективно препятствуют возможному отражению волн возмущения от границы. Условие (9) использовалось перед вторым этапом расчета. Поперечные компоненты вектора скорости на выходе определялись экстраполяцией из условия

$$\partial^2 v / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial x^2 = 0. \quad (10)$$

Условия (8) и (10) использовались по завершении третьего этапа.

Для уравнения (5) ставилась задача Неймана, согласно которой на внешней границе S задавалось условие

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_s^{k+1} = - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}_s^{k+1} - \mathbf{V}_s^*) \cdot \mathbf{n}. \quad (11)$$

Условие существования решения задачи Неймана имеет вид (Ω — область течения)

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V}^* d\Omega = - \frac{1}{\Delta t} \int_S (\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^*) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (12)$$

которое выполняется тождественно вследствие равенства нулю суммарного потока жидкости через внешние границы

$$\int_S \mathbf{V}^{k+1} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (13)$$

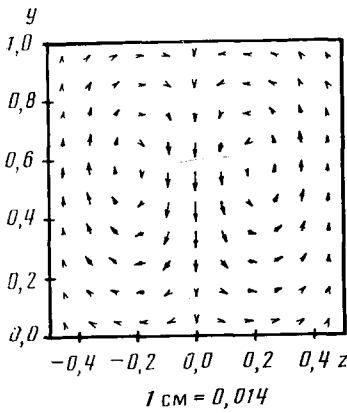


Рис. 4. Течение в плоскости поперечного сечения ($x=3$)

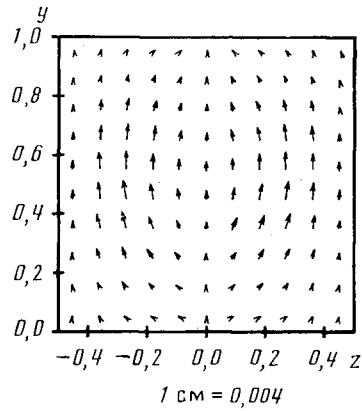


Рис. 5. Течение в плоскости поперечного сечения ($x=4$)

Процедура, реализующая точное выполнение условия (13) в процессе вычислений, заключалась в корректировании значений продольной скорости на выходе $u_i = (1 + \lambda_i) u_i$ путем введения поправочных множителей λ_i [11]

$$\lambda_i = - \left[\left(Q + \sum_{i=1}^N G_i \right) / \sum_{i=1}^N G_i^2 \right] G_i, \quad (14)$$

где Q — суммарный расход жидкости на входе; G_i — поток жидкости через i -ю грань на выходе ($G_i > 0$, если жидкость втекает в область, $G_i < 0$, если вытекает).

Поскольку нормальные к границе компоненты скорости определяются сразу на $(k+1)$ -м временном шаге, при расчете поля давления граничные условия (11) сводятся, как показано в [8, 9], к однородным.

В предположении, что течение симметрично относительно плоскости XOY , расчет проводился для половины канала (в данном случае для правой). При этом условия симметрии для искомых величин имеют вид

$$\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial p / \partial z = 0, \quad w = 0. \quad (15)$$

Реализация граничных условий осуществлялась с помощью фиктивных узлов сетки.

В качестве начального условия использовалось пуазейлево течение, которому соответствует профиль скорости на входе, с постоянным по длине градиентом давления. Жидкость за уступом в начальный момент времени полагалась неподвижной.

Аппроксимация пространственных производных проводилась на равномерной по пространственным шагам разнесенной сетке. На этой сетке давление p определялось в центрах расчетных ячеек с номерами (i, j, k) , а компоненты вектора скорости u, v, w — в центрах соответствующих граничной ячейки, т. е. в узлах $(i + 1/2, j, k)$, $(i, j + 1/2, k)$ и $(i, j, k + 1/2)$. Здесь i, j, k — соответственно номера ячеек в направлении осей x, y, z . Подобное расположение искомых функций в узлах сетки применяется в методе типа маркеров и ячеек [12]. Конвективные члены аппроксимировались разностями против потока (метод донорных ячеек) [12], вторые производные — их центрально-разностными аналогами. Задача Неймана для давления решалась методом верхней релаксации. Оптимальный параметр релаксации определялся экспериментально и был равен 1,75.

3. Расчетная сетка для половины канала состояла из $7 \times 12 \times 42$ узлов (соответственно в направлении осей z, y и x) с шагами $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$. В процессе численного моделирования было получено стационарное решение для вектора скорости и давления. В графическом виде численные результаты представлены на рис. 2–6. Картина течения представлена в виде проекций вектора скорости на плоскость симметрии (рис. 2, 3) и на

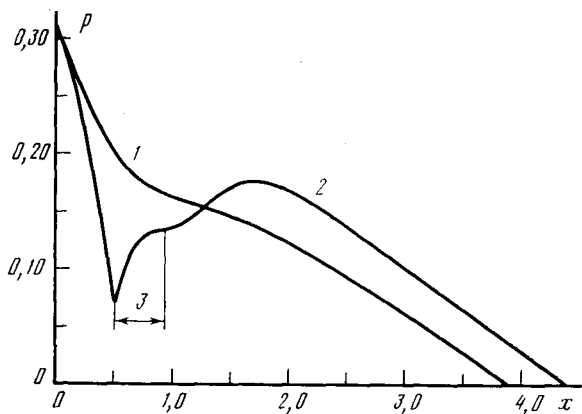


Рис. 6. Распределение давления вдоль стенок канала в плоскости симметрии ($z=0$): 1 – верхняя стенка, 2 – нижняя стенка, 3 – вдоль уступа

плоскость сечений $x=3$ и 4 (соответственно рис. 4, 5). Для наглядности на рис. 4, 5 воспроизведено путем отображения поле течения в левой (симметричной) части канала. Под рис. 2–5 указан масштаб модуля проекции вектора скорости. Распределение давления в плоскости симметрии ($z=0$) вдоль верхней (кривая 1) и нижней (кривая 2) стенок канала показано на рис. 6.

Результаты вычислений, как показано на рис. 2–6, свидетельствуют о сложном пространственном течении жидкости в канале. Непосредственно за уступом образуется зона возвратно-циркуляционного течения. Картина этого течения в плоскости $z=0$ показана для всего канала на рис. 2 и более детально для области вблизи уступа – на рис. 3. Отрыв потока возникает около верхней кромки уступа. В окрестности отрыва имеет место острый минимум в распределении давления (рис. 6, кривая 2). Вдоль уступа давление резко возрастает. Возрастание давления наблюдается и вдоль нижней стенки на участке канала, соответствующем зоне возвратно-циркуляционного движения. Область течения после присоединения потока на нижней стенке характеризуется монотонным падением давления в продольном направлении. На верхней стенке давление монотонно падает на всей длине канала. Однако при этом наблюдается значительное отличие продольных градиентов давления на участках до уступа и после него. Вблизи выхода из канала распределения давления на верхней и нижней стенках практически совпадают и приближаются к линейному. Это свидетельствует об установлении на больших расстояниях от входа стабилизированного (пуазейлевого) течения.

Существенной особенностью потока является образование замкнутых циркуляционных течений в плоскости $x=\text{const}$ (см. рис. 4). Анализ течения показал, что циркуляционные течения возникают на некотором расстоянии от рассмотренной выше зоны вихревого течения за уступом. По мере приближения к выходу канала интенсивность циркуляционного течения падает. В окрестности выхода из канала это течение не наблюдается, хотя и имеет место незначительное отклонение потока в направлении оси y (рис. 5), что в целом указывает на затухание вторичных течений и переход к течению Пуазейля.

Автор выражает благодарность Г. Ю. Степанову за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжен П. Отрывные течения. Т. 1–3. М.: Мир, 1972–1973.
2. Гогош Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
3. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
4. Тэйлор Т. Д., Нидефо Э // В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973.

5. Analysis of laminar flow over a backward facing step. GAMM – Workshop. Notes on numerical fluid mechanics. 1984. V. 9.
6. Patankar S. V., Prata P. S., Spalding D. B. // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. P. 539.
7. Ta Phuoc Loc, Abderrazak Tuomi // C. R. Acad. Sc. Paris. 1987. T. 304. Ser. 2. N 1. P. 1.
8. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. // ЖВММФ. 1975. Т. 15. № 1. С. 197.
9. Гуцин В. А. // ЖВММФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 529.
10. Рыков В. В. Численное моделирование пространственных течений несжимаемой вязкой жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1983.
11. Рыков В. В. // ЖВММФ. 1985. Т. 25. № 5. С. 789.
12. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

Институт машиноведения
АН СССР

Поступила в редакцию
25.03.88