В. С. Ильмкив, Нелокальная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 2, 250–257

https://www.mathnet.ru/de11231

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 250–257

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

© 2005 г. В. С. Илькив

В области $\Omega_T = (0,T)\times\Omega$, где Ω – p-мерный тор, рассматривается задача

$$Lu \equiv L(\partial_t, D)u \equiv \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty} A_{\widehat{s}}\partial_t^{s_0}D^s u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

$$\partial_t^{\alpha}u|_{t=0} - \mu\partial_t^{\alpha}u|_{t=T} = 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots, \qquad (2)$$

где $x = (x_1,\ldots,x_p)\in\Omega$, $t\in(0,T)$, $\widehat{s} = (s_0,s)$, $|\widehat{s}| = s_0+|s| = s_0+s_1+\ldots+s_p$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $D^s = D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p} = (-i)^{|s|}\partial^{|s|}/\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}$; $A_{\widehat{s}}$ – квадратные размера m матрицы с комплексными элементами, μ – ненулевое комплексное число. Искомое решение $u = u(t,x)$ и заданная функция $f = f(t,x)$ являются m-вектор-функциями.

Скалярная $(m=1)$ задача (1), (2) изучалась в работе [1] в случае уравнения конечного порядка и в [2] для уравнения бесконечного порядка. Существенная часть исследования задачи для дифференциального уравнения в частных производных бесконечного порядка состоит в построении соответствующих пространств функций – пространств бесконечного порядка. Пространства Соболева бесконечного порядка введены Ю.А. Дубинским [3–5] при исследовании задачи Дирихле и задачи о периодических решениях для уравнений бесконечного порядка эллиптического и гиперболического типа. Для бестипных уравнений бесконечного порядка такие пространства введены и изучены в работе [2]. В скалярном случае пространством Соболева бесконечного порядка, отвечающим нелокальной задаче (1), (2), называем пространство [2]

$$W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\} \equiv \Big\{u(t,x) = \sum u_{kr}v_{kr}(t,x) : \|u\|_{\infty}^2 = \sum \lambda_{kr}|u_{kr}|^2 < \infty\Big\}, \qquad (3)$$

где $\lambda_{kr} = |L(\tau(r),k)|$ при $|L(\tau(r),k)|\neq 0$ и $\lambda_{kr} = 1$ в противном случае; $v_{kr}(t,x) = e^{\tau(r)t+i(k,x)}$, $\tau(r) = (-\ln\mu)/T + i\cdot 2\pi r/T$, $(k,x) = k_1x_1+\ldots+k_px_p$, а $\ln\mu$ понимается в смысле главного значения. Если ряд $L(\tau(r),k)$ расходится, то по определению $\lambda_{kr} = \infty$, а u_{kr} полагаем равным нулю и считаем, что соответствующее слагаемое в (3) отсутствует. Считаем также, что суммирование в формуле (3) и всюду ниже (если не оговорены пределы суммирования) распространяется на все целочисленные векторы $(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}$.

Функции $v_{kr} = v_{kr}(t,x)$ удовлетворяют нелокальным условиям (2) и образуют базис Рисса в пространстве $L_2(\Omega_T)$ [1, 6]. Поэтому в случае уравнения или системы уравнений конечного порядка рассматриваются пространства Соболева конечного порядка $W^q(\Omega_T)$, $q\in\mathbb{R}$, которые образуются путем пополнения конечных вектор-сумм $\sum u_{kr}v_{kr}(t,x)$ по норме $\|u\|_q^2 = \sum(\widetilde{k}^2+r^2)^q u_{kr}^* u_{kr}$, где $\widetilde{k}^2 = 1+k_1^2+\ldots+k_p^2$, а звездочка обозначает операцию эрмитова сопряжения матриц. Построим теперь для задачи (1), (2) пространства Соболева бесконечного порядка вектор-функций, используя в качестве базиса те же функции $v_{kr}(t,x)$.

Рассмотрим для каждого вектора $(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}$ матрицы

$$L_{kr} = L(\tau(r),k) = \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty} A_{\widehat{s}}(\tau(r))^{s_0}k^s \quad \text{и} \quad (L_{kr}^*L_{kr})^{1/2},$$

где последняя матрица означает квадратный корень из эрмитовой неотрицательно-определенной матрицы $L_{kr}^*L_{kr}$. Обозначим через $\lambda_j(k,r)$ собственные значения матрицы $(L_{kr}^*L_{kr})^{1/2}$, расположенные в порядке невозрастания: $\lambda_1(k,r) \geq \ldots \geq \lambda_m(k,r)$, и пусть $\lambda_{m'_1}(k,r) = \infty > > \lambda_{m'_1+1}(k,r) \geq \ldots \geq \lambda_{m_1}(k,r) > \lambda_{m_1+1}(k,r) = 0$, где первые $m_1 = m_1(k,r)$ собственных значений – положительные числа, из которых первые $m'_1 = m'_1(k,r)$ бесконечные и $0 \leq m'_1 \leq \leq m_1 \leq m$. При этом считаем, что $\lambda_j(k,r) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{jn}(k,r)$ и $\lambda_j(k,r) = \infty$, если предел не существует, где $\lambda_{jn}(k,r)$ – собственные значения матрицы

$$\left(\sum_{|\widehat{s}|=0}^{n} A^*_{\widehat{s}}(\tau^*(r))^{s_0}k^s \sum_{|\widehat{s}|=0}^{n} A_{\widehat{s}}(\tau(r))^{s_0}k^s\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $m_1 = 0$ соответствует нулевой матрице L_{kr}, $m'_1 = m_1$ – случаю, когда матрица L_{kr} не имеет конечных положительных собственных значений, и т.п.

Обозначим через ω_{ikr} нормированные $(\omega^*_{ikr}\omega_{ikr} = 1)$ собственные векторы матрицы $(L^*_{kr}L_{kr})^{1/2}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_i(k,r)$, $i = m'_1+1,\ldots,m$. Известно, что эти собственные векторы являются ортогональными, т.е. $\omega^*_{ikr}\omega_{jkr} = 0$ при $i \neq j$.

Определим теперь соболевское пространство бесконечного порядка вектор-функций $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ как пополнение множества конечных вектор-сумм вида $\sum_{m'_1<m} u_{kr}v_{kr}(t,x)$, где

$$u_{kr} = \sum_{\alpha=m'_1+1}^{m} \omega_{\alpha kr}\omega^*_{\alpha kr}u_{kr},$$

по норме

$$\|u\|^2_\infty = \sum_{m'_1<m}\left(\sum_{\alpha=m'_1+1}^{m_1} \lambda_\alpha(k,r)|\omega^*_{\alpha kr}u_{kr}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m} |\omega^*_{\alpha kr}u_{kr}|^2\right). \quad (4)$$

Если $m'_1 = m_1$ или $m_1 = m$ для некоторого вектора $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, то в соответствующем слагаемом в формуле (4) отсутствует первая или вторая сумма соответственно.

Из определения пространства $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ непосредственно вытекает условие нетривиальности, т.е. бесконечномерности [3] этого пространства.

Теорема 1. *Пространство $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ нетривиально тогда и только тогда, когда для бесконечного набора векторов $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ выполняется условие $m'_1 < m$.*

Бесконечномерность пространства может быть и в случаях, когда число компонент меньше m или число аргументов вектор-функции $u(t,x)$ меньше $p+1$. Чтобы избежать этих вырождений, рассматриваем в дальнейшем лишь те пространства $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$, которые плотны в пространстве $W^0(\Omega_T)$.

Теорема 2. *Пространство $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ плотно в пространстве $W^0(\Omega_T)$ тогда и только тогда, когда $m'_1 = 0$ для всех векторов $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы вытекает из его эквивалентности неравенству $\lambda_1(k,r) < \infty$ для всех $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Следовательно, каждая функция $v_{krj} = e_jv_{kr}$, где e_j – столбец с номером j единичной матрицы размера m, принадлежит пространству $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$, так как

$$\|v_{krj}\|^2_\infty = \sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda_\alpha(k,r)|\omega^*_{\alpha kr}e_j|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m} |\omega^*_{\alpha kr}e_j|^2 \leq \max(\lambda_1(k,r),1),$$

т.е. $\|v_{krj}\|^2_\infty < \infty$. Очевидно, что множество функций v_{krj} плотно в пространстве $W^0(\Omega_T)$.

Для доказательства необходимости предположим, что пространство $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ плотно в пространстве $W^0(\Omega_T)$, а условие теоремы не выполняется, т.е. существует вектор $(l,q) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, для которого $m'_1 > 0$. Рассмотрим функцию $v = \omega v_{lq}$ из пространства $W^0(\Omega_T)$, где единичный вектор ω ортогонален всем векторам $\omega_{\alpha lq}$ при $\alpha = m'_1+1,\ldots,m$, и произвольную функцию $u \in W^\infty\{A_{\widehat{s}}\} \cap W^0(\Omega_T)$.

Оценим норму разности $v-u$ в пространстве $W^0(\Omega_T)$. Поскольку

$$u=\sum_{m_1'<m}u_{kr}v_{kr}(t,x)=\sum_{m_1'<m}\sum_{\alpha=m_1'+1}^{m}\omega_{\alpha kr}\omega^*_{\alpha kr}u_{kr}v_{kr}(t,x),$$

то

$$v-u=\left(\omega-\sum_{\alpha=m_1'+1}^{m}\omega_{\alpha lq}\omega^*_{\alpha lq}u_{lq}\right)v_{lq}(t,x)+\sum{}'u_{kr}v_{kr}(t,x),$$

где штрих обозначает, что опущено суммирование по вектору (l,q). Следовательно, получаем неравенство

$$\|v-u\|_0^2=\left(1+\sum_{\alpha=m_1'+1}^{m}u^*_{lq}\omega_{\alpha lq}\,\omega^*_{\alpha lq}u_{lq}\right)+\sum{}'u^*_{kr}u_{kr}\geq 1,$$

т.е. пространство $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ не плотно в пространстве $W^0(\Omega_T)$.

Теорема 3. *Пространство $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ плотно в пространстве $W^0(\Omega_T)$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы L_{kr} конечны для каждого вектора $(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}$.*

Доказательство. Пусть для некоторого вектора $(l,q)\in\mathbb{Z}^{p+1}$ элемент $(L_{lq})_{ij}$ матрицы L_{lq} представляется расходящимся степенным рядом, т.е. $|(L_{lq})_{ij}|=\infty$. Тогда выполняются неравенства

$$\lambda_1^2(l,q)=\max_{\omega\in\mathbb{C}^m,\ \omega\neq 0}\frac{\omega^*L^*_{lq}L_{lq}\omega}{\omega^*\omega}\geq e_j^*L^*_{lq}L_{lq}e_j=\sum_{\alpha=1}^{m}|(L_{lq})_{\alpha j}|^2\geq|(L_{lq})_{ij}|^2=\infty.$$

Это означает, что $m_1'>0$. Необходимость доказана. Достаточность условий теоремы очевидна.

Из теоремы 3 следует, что пространства Соболева бесконечного порядка существуют. Например, когда элементы матрицы $\sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty}A_{\widehat{s}}z_0^{s_0}z^s$ являются целыми функциями своих аргументов z_0, $z=(z_1,\ldots,z_p)$.

Норму (4) в плотном в $W^0(\Omega_T)$ пространстве $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$ можно представить в виде

$$\|u\|_\infty^2=\sum u^*_{kr}((L^*_{kr}L_{kr})^{1/2}+P^+_{2kr})u_{kr},\tag{5}$$

где проектор $P^+_{2kr}=\sum_{\alpha=m_1+1}^{m}\omega_{\alpha kr}\omega^*_{\alpha kr}$ при $m_1<m$ и $P^+_{2kr}=0$ при $m_1=m$.

Рассмотрим пространство $W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$, сопряженное к пространству $W^\infty\{A_{\widehat{s}}\}$, а именно

$$W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}=\left\{f=\sum f_{kr}v_{kr}(t,x):\|f\|_{-\infty}^2=\sum\left(\sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha^{-1}|\gamma^*_{\alpha kr}f_{k,r}|^2+\sum_{\alpha=m_1+1}^{m}|\gamma^*_{\alpha kr}f_{k,r}|^2\right)<\infty\right\},\tag{6}$$

где $\gamma_{\alpha kr}$ – нормированный $(\gamma^*_{\alpha kr}\gamma_{\alpha kr}=1)$ собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_\alpha(k,r)$ эрмитовой матрицы $(L_{kr}L^*_{kr})^{1/2}$.

Из теории матриц известно [7], что в этом случае матрица L_{kr} имеет сингулярное разложение $L_{kr}=\Gamma_{kr}\Lambda_{kr}\Omega^*_{kr}$, где при $m_1<m$ $\Lambda_{kr}=\operatorname{diag}(\Lambda_{1kr},\Lambda_{2kr})$ – диагональная матрица, $\Gamma_{kr}=(\Gamma_{1kr},\Gamma_{2kr})$, $\Omega_{kr}=(\Omega_{1kr},\Omega_{2kr})$. Здесь

$$\Lambda_{1kr}=\operatorname{diag}(\lambda_1(k,r),\ldots,\lambda_{m_1}(k,r)),\quad \Lambda_{2kr}=0,\quad \Gamma_{1kr}=(\gamma_{1kr},\ldots,\gamma_{m_1kr}),$$

$$\Gamma_{2kr}=(\gamma_{m_1+1,kr},\ldots,\gamma_{mkr}),\quad \Omega_{1kr}=(\omega_{1kr},\ldots,\omega_{m_1kr}),\quad \Omega_{2kr}=(\omega_{m_1+1,kr},\ldots,\omega_{mkr}).$$

В случае $m_1=m$ матрица L_{kr} невырожденная и в ее сингулярном разложении отсутствуют матрицы Γ_{2kr}, Λ_{2kr}, Ω_{2kr}, т.е. $\Gamma_{kr}=\Gamma_{1kr}$, $\Lambda_{kr}=\Lambda_{1kr}$, $\Omega_{kr}=\Omega_{1kr}$. Выполняются также следующие равенства:

$$L^*_{kr}=\Omega_{kr}\Lambda_{kr}\Gamma^*_{kr}=\Omega_{1kr}\Lambda_{1kr}\Gamma^*_{1kr},\quad (L^*_{kr}L_{kr})^{1/2}=\Omega_{kr}\Lambda_{kr}\Omega^*_{kr}=\Omega_{1kr}\Lambda_{1kr}\Omega^*_{1kr},$$

$$(L_{kr}L_{kr}^*)^{1/2} = \Gamma_{kr}\Lambda_{kr}\Gamma_{kr}^* = \Gamma_{1kr}\Lambda_{1kr}\Gamma_{1kr}^*.$$

Пусть A^- обозначает псевдообратную матрицу [7] матрице A, тогда $L_{kr}^- = \Omega_{kr}\Lambda_{kr}^-\Gamma_{kr}^* = \Omega_{1kr}\Lambda_{1kr}^{-1}\Gamma_{1kr}^*$ и

$$(L_{kr}^{*-}L_{kr}^-)^{1/2} = \Gamma_{kr}\Lambda_{kr}^-\Gamma_{kr}^* = \Gamma_{1kr}\Lambda_{1kr}^{-1}\Gamma_{1kr}^* = \sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha^{-1}(k,r)\gamma_{\alpha kr}\gamma_{\alpha kr}^*.$$

Следовательно, норму (6) в пространстве $W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ можно задать с помощью матриц L_{kr} таким образом:

$$\|f\|_{-\infty}^2 = \sum f_{kr}^*((L_{kr}^{*-}L_{kr}^-)^{1/2} + P_{2kr}^-)f_{kr}, \tag{7}$$

где $P_{2kr}^- = \sum_{\alpha=m_1+1}^{m}\gamma_{\alpha kr}\gamma_{\alpha kr}^*$ при $m_1 < m$ и $P_{2kr}^- = 0$ при $m_1 = m$.

Проекторы P_{2kr}^+ и P_{2kr}^- из формул (5) и (7) могут быть записаны в виде

$$P_{2kr}^+ = I - P_{1kr}^+ = \Omega_{2kr}\Omega_{2kr}^*, \quad P_{2kr}^- = I - P_{1kr}^- = \Gamma_{2kr}\Gamma_{2kr}^*,$$

где проекторы

$$P_{1kr}^+ = \Omega_{1kr}\Omega_{1kr}^*, \quad P_{1kr}^- = \Gamma_{1kr}\Gamma_{1kr}^*.$$

Элементы $f = \sum f_{kr}v_{kr}(t,x)$ пространства $W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ будем считать линейными непрерывными функционалами, действующими на функции $u = \sum u_{kr}v_{kr}(t,x)$ из пространства $W^{\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ по формуле $(f,u) = \sum u_{kr}^*\Omega_{kr}\Gamma_{kr}^*f_{kr}$, так как для произвольных $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ и $u \in W^{\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ имеем

$$|(f,u)| \le \sum |u_{kr}^*\Omega_{kr}\Gamma_{kr}^*f_{kr}| =$$

$$= \sum\left|\sum_{\alpha=1}^{m_1}(\lambda_\alpha^{1/2}(k,r)\omega_{\alpha kr}^*u_{kr})^*(\lambda_\alpha^{-1/2}(k,r)\gamma_{\alpha kr}^*f_{kr}) + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m}(\omega_{\alpha kr}^*u_{kr})^*(\gamma_{\alpha kr}^*f_{kr})\right| \le$$

$$\le \sum\left(\sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha(k,r)|\omega_{\alpha kr}^*u_{kr}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m}|\omega_{\alpha kr}^*u_{kr}|^2\right)\times$$

$$\times\sum\left(\sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha^{-1}(k,r)|\gamma_{\alpha kr}^*f_{kr}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m}|\gamma_{\alpha kr}^*f_{kr}|^2\right) = \|u\|_\infty^2\|f\|_{-\infty}^2.$$

Если все матрицы L_{kr} невырождены и эрмитовы, то норма в пространстве $W^{\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ является энергетической, а именно

$$\|u\|_\infty^2 = (L(\partial_t, D)u, u)_0 = \sum u_{kr}^*L_{kr}u_{kr},$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ – скалярное произведение в пространстве $W^0(\Omega_T)$.

Очевидно, что $L(\partial_t, D)u \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, если $u \in W^{\infty}\{A_{\hat{s}}\}$. Действительно, пусть $u \in W^{\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, тогда

$$\|Lu\|_{-\infty}^2 = \sum\left(\sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha^{-1}(k,r)|\gamma_{\alpha kr}^*L_{kr}u_{kr}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m}|\gamma_{\alpha kr}^*L_{kr}u_{kr}|^2\right) =$$

$$= \sum\sum_{\alpha=1}^{m_1}\lambda_\alpha^{-1}(k,r)|\lambda_\alpha(k,r)\omega_{\alpha kr}^*u_{kr}|^2 = \|u\|_\infty^2 - \sum\sum_{\alpha=m_1+1}^{m}|\omega_{\alpha kr}^*u_{kr}|^2. \tag{8}$$

Пусть $P_1^\pm$ и $P_2^\pm$ обозначают операторы проектирования в пространстве $W^{\pm\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, которые действуют согласно формулам

$$P_i^+u = \sum P_{ikr}^+u_{kr}v_{kr}(t,x), \quad P_i^-f = \sum P_{ikr}^-f_{kr}v_{kr}(t,x), \quad i = 1,2.$$

Если $u = P_1^+ u$, то из формулы (8) следует равенство $\|Lu\|_{-\infty}^2 = \|u\|_{\infty}^2$.

Определим теперь решение задачи (1), (2) как функцию $u \in W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ такую, что для каждой функции $v \in W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ выполняется равенство $(L(\partial_t, D)u, v)_0 = (f, v)_0$.

Теорема 4. *Решение задачи (1), (2) из* $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ *существует тогда и только тогда, когда* $f \in W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ *и* $P_2^- f = 0$, *причем* $\|P_1^+ u\|_{\infty} = \|f\|_{-\infty} = \|P_1^- f\|_{-\infty}$. *Если* $P_2^+ = 0$, *то решение единственно.*

Доказательство. Разрешимость задачи (1), (2) эквивалентна разрешимости множества уравнений $L_{kr} u_{kr} = f_{kr}$, $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Пусть u – решение задачи (1), (2). Тогда $f = Lu \in W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ и для каждой функции $v \in W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ получаем, что

$$(P_2^- f, v) = (P_2^- L(\partial_t, D)u, v) = \sum v_{kr}^* \Omega_{kr} \Gamma_{kr}^* P_{2kr}^- L_{kr} u_{kr} = 0 = (0, v),$$

поскольку $P_{2kr}^- L_{kr} = \Gamma_{2kr} \Gamma_{2kr}^* \Gamma_{1kr} \Lambda_{1kr} \Omega_{1kr}^* = 0$ для всех $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Равенство $\|P_1^+ u\|_{\infty} = \|f\|_{-\infty}$ следует из формулы (8). Обратно, если $f \in W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ и $P_2^- f = 0$, то $u_{kr} = L_{kr}^- f_{kr} + (I - L_{kr}^- L_{kr}) C_{kr} = \Omega_{1kr} \Lambda_{1kr}^{-1} \Gamma_{1kr}^* f_{kr} + P_{2kr}^+ C_{kr}$, где C_{kr} – произвольный вектор из $\mathbb{C}^m$, и

$$P_1^+ u = \sum P_{1kr}^+ u_{kr} v_{kr}(t, x) = \sum L_{kr}^- f_{kr} v_{kr}(t, x),$$

причем

$$\|P_1^+ u\|_{\infty}^2 = \sum \sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda_{\alpha}(k, r) |\omega_{\alpha kr}^* \Omega_{1kr} \Lambda_{1kr}^{-1} \Gamma_{1kr}^* f_{kr}|^2 =$$

$$= \sum \sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda_{\alpha}^{-1}(k, r) |\gamma_{\alpha kr}^* f_{kr}|^2 = \|P_1^- f\|_{-\infty}^2 = \|f\|_{-\infty}^2.$$

Если $P_2^+ = 0$, то $P_2^- = 0$, матрицы L_{kr} невырождены для всех векторов $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ и, следовательно, $u_{kr} = L_{kr}^{-1} f_{kr}$ – единственное решение уравнения $L_{kr} u_{kr} = f_{kr}$. В этом случае оператор задачи (1), (2) осуществляет биективное изометрическое отображение между пространствами $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ и $W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$. Теорема доказана.

Найдем соответствие между соболевскими пространствами бесконечного порядка $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$, $W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ и пространствами конечного порядка $W^q(\Omega_T)$ и используем его для установления разрешимости задачи (1), (2) в шкале пространств $W^q(\Omega_T)$.

Пусть $a_n(l) = (a_{nij}(l))_{i,j=\overline{1,m}}$, $l = \overline{0,p}$, – матричные коэффициенты уравнения (1) такие, что $L(\partial_t, D) \equiv a_n(0)\partial_t^n + \sum_{l=1}^{p} a_n(l) D_l^n + \ldots$, где тремя точками обозначены слагаемые, которые не содержат чистых производных n-го порядка, $n > 0$. Составим из элементов этих матриц вектор a_n размера $(p+1)m^2$ и будем рассматривать пространства $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ и $W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ в зависимости от вектора a_n, считая неизменными все остальные матрицы $A_{\widehat{s}}$. Достаточно считать, что $a_n \in B^{(p+1)m^2}$, где $B \subset \mathbb{C}$ – единичный круг с центром в начале координат. При $n = 0$ получаем, что вектор a_0 образуют элементы матрицы A_0 и $a_0 \in B^{m^2}$.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$, $n \geq 0$, $q < n/2 - (p+1)/4$ *– фиксированные числа. Тогда для всех векторов* $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$, *где* $B_{n\varepsilon}$ *– некоторое подмножество множества* $B^{(p+1)m^2}$, *мера которого не превосходит* ε (*при* $n = 0$ $B_{0\varepsilon} \subset B^{m^2}$), *имеют место вложения* $W^{-q}(\Omega_T) \subset W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$, $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\} \subset W^q(\Omega_T)$ *и оценки*

$$\|f\|_{-\infty} \leq C\|f\|_{-q}, \quad \|u\|_q \leq C\|u\|_{\infty}, \tag{9}$$

где $C = C(n, q, p, m, \mu, T) > 0$ *– некоторая константа.*

Доказательство. Для $n > 0$ рассмотрим два случая: $\mu \neq 1$ и $\mu = 1$. В первом случае $\tau(r) \neq 0$ для всех $r \in \mathbb{Z}$ и $|\tau(r)| \geq |r||2\pi - \arg\mu|/T$ при $r \neq 0$, $|\tau(0)| = |\ln\mu|/T$. Во втором случае $|\tau(r)| = |r| \cdot 2\pi/T$.

Пусть при $\mu \neq 1$ $B_{n\varepsilon}$ обозначает множество векторов $a_n \in B^{(p+1)m^2}$, из которых хотя бы для одного вектора $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ выполняется неравенство

$$\|L_{kr}^{-1}\| > mC_q(\widetilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

где C_q – некоторая константа, или матрица L_{kr}^{-1} не существует. Поскольку матрица L_{kr} линейно зависит от компонент вектора a_n, то мера множества B'_n векторов a_n, из которых хотя бы для одного вектора $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ не существует матрица L_{kr}^{-1}, т.е. $\det L_{kr} = 0$, равняется нулю.

Зафиксируем вектор $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ и числа i, j, $1 \le i,j \le m$. Пусть $B_{n\varepsilon krij}$ – множество векторов $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B'_n$ таких, что для элемента L_{krij}^{-1} обратной матрицы L_{kr}^{-1} выполняется неравенство

$$\|L_{krij}^{-1}\| > C_q(\widetilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}. \tag{11}$$

Если L_{kr}^{ij} – алгебраическое дополнение элемента L_{krij} матрицы L_{kr}, то $L_{krij}^{-1} = L_{kr}^{ji}/\det L_{kr}$ и $\det L_{kr} = \sum_{\alpha=1}^{m} L_{kr\alpha i}L_{kr}^{\alpha i}$. Пусть $|k_l| = \max\limits_{1\le i\le p} |k_i|$, тогда под множеством $B'_{n\varepsilon krij}$ понимаем множество чисел $a_{nji}(0) \in B$ при $|r| \ge |k_l|$ или множество чисел $a_{nji}(l) \in B$ при $|r| < |k_l|$, для которых выполняется неравенство (11) при остальных фиксированных компонентах вектора a_n.

Оценим меру множества $B'_{n\varepsilon krij}$. Если $L_{kr}^{ji} = 0$, то это множество пустое и $\operatorname{mes} B'_{n\varepsilon krij} = 0$, иначе $L_{krij}^{-1} = (L_{krji} + \sum_{j\ne\alpha=1}^{m} L_{kr\alpha i}L_{kr}^{\alpha i}/L_{kr}^{ji})^{-1}$ и неравенство (11) эквивалентно неравенству

$$|(\tau(r))^n a_{nji}(0) + \Delta_{krji}| < \sqrt{\varepsilon}(\widetilde{k}^2 + r^2)^q/C_q$$

при $|r| \ge |k_l|$ или неравенству

$$|k_l^n a_{nji}(l) + \Delta_{krji}| < \sqrt{\varepsilon}(\widetilde{k}^2 + r^2)^q/C_q$$

при $|r| < |k_l|$, где числа Δ_{krji} не зависят от $a_{nji}(0)$ и $a_{nji}(l)$ соответственно. Поэтому множество $B'_{n\varepsilon krij}$ – это пересечение круга B и круга с центром в точке $\Delta_{krji}/(\tau(r))^n$ радиуса $\sqrt{\varepsilon}(\widetilde{k}^2 + r^2)^q|\tau(r)|^{-n}/C_q$ или с центром в точке Δ_{krji}/k_l^n радиуса $\sqrt{\varepsilon}(\widetilde{k}^2 + r^2)^q|k_l|^{-n}/C_q$ и его мера не превосходит числа $\pi\varepsilon(\widetilde{k}^2 + r^2)^{2q}|\tau(r)|^{-2n}/C_q^2$ или числа $\pi\varepsilon(\widetilde{k}^2 + r^2)^{2q}|k_l|^{-2n}/C_q^2$. Следовательно, во всех случаях

$$\operatorname{mes} B'_{n\varepsilon krij} \le \pi\varepsilon(p+2)^n(\max(|2\pi - \arg\mu|, |\ln\mu|)/T)^{-2n}(\widetilde{k}^2 + r^2)^{2q-n}/C_q^2.$$

Интегрируя эту оценку по области всех фиксированных компонент вектора a_n, получаем такую же оценку для меры множества $B_{n\varepsilon krij}$.

Замечая, что $B_{n\varepsilon} \subset \bigcup\bigcup_{i,j=1}^{m} B_{n\varepsilon krij} \cup B'_n$, имеем при

$$C_q^2 = \pi(p+2)^n(\max(|2\pi - \arg\mu|, |\ln\mu|)/T)^{-2n}m^2\sum(\widetilde{k}^2 + r^2)^{2q-n}$$

оценку

$$\operatorname{mes} B_{n\varepsilon} \le \sum\sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{mes} B_{n\varepsilon krij} = \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ и всех $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ при $\mu \ne 1$ справедливо противоположное (10) неравенство

$$\|L_{kr}^{-1}\| \le mC_q(\widetilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}. \tag{12}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для случая $\mu = 1$ при $(k,r) \ne (0,0)$. При $(k,r) = (0,0)$ матрица L_{kr} не зависит от компонент вектора a_n и обратная матрица L_{kr}^{-1}, вообще говоря, не существует.

Оценка (12) выполняется также и при $n = 0$. Доказательство этой оценки отличается от приведенного выше доказательства только выбором множеств $B'_{n\varepsilon krij}$. Кроме того, при $n = 0$ неравенство (11) справедливо для всех $\mu \in \mathbb{C}$ и всех $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.

Перейдем к доказательству вложений пространств конечного и бесконечного порядка. Пусть $f = \sum f_{kr} v_{kr}(t,x)$ – произвольная функция из $W^{-q}(\Omega_T)$. Покажем, что она принадлежит пространству $W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$ для всех векторов $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ при $n \neq 0$ или для всех векторов $a_0 \in B^{m^2} \setminus B_{0\varepsilon}$ при $n = 0$.

Сначала рассмотрим случаи $\mu \neq 1$ или $\mu = 1$ и $n = 0$. Если $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$, то

$$\|f\|^2_{-\infty} = \sum f^*_{kr}(L_{kr}L^*_{kr})^{-1/2} f_{kr} = \sum f^*_{kr}(L_{kr}L^*_{kr})^{1/2} L^{*-1}_{kr} L^{-1}_{kr} f_{kr},$$

причем матрица $(L_{kr}L^*_{kr})^{1/2} L^{*-1}_{kr} = \Gamma_{kr}\Omega^*_{kr}$ является унитарной. Используя оценку (12), имеем

$$\|f\|^2_{-\infty} \leq \frac{mC_q}{\sqrt{\varepsilon}} \sum (\widetilde{k}^2 + r^2)^{-q} f^*_{kr} f_{kr} = \frac{mC_q}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\|^2_{-q},$$

откуда следует первая из оценок (9) при $C^2 = mC_q/\sqrt{\varepsilon}$.

Если $u = \sum u_{kr} v_{kr}(t,x)$ принадлежит пространству $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$, то

$$\|u\|^2_q = \sum (\widetilde{k}^2 + r^2)^q u^*_{kr} u_{kr} = \sum (\widetilde{k}^2 + r^2)^q y^*_{kr} L^{-1}_{kr} \Gamma_{kr} \Omega^*_{kr} y_{kr},$$

где $y_{kr} = (L^*_{kr} L_{kr})^{1/4} u_{kr}$. Снова, используя неравенство (12) и унитарность матрицы $\Gamma_{kr}\Omega^*_{kr}$, имеем оценку

$$\|u\|^2_q \leq \sum u^*_{kr} (L^*_{kr} L_{kr})^{1/2} u_{kr} = C^2 \|u\|^2_{\infty}.$$

Пусть теперь $\mu = 1$ и $n > 0$. Слагаемые, соответствующие вектору $(k,r) = (0,0)$, оцениваем следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda^{-1}_{\alpha}(0,0) |\gamma^*_{\alpha 00} f_{00}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m} |\gamma^*_{\alpha 00} f_{00}|^2 \leq \max(1, \lambda^{-1}_{m_1}(0,0)) f^*_{00} f_{00},$$

$$u^*_{00} u_{00} \leq (1, \min(\lambda_{m_1}(0,0)))^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda_{\alpha}(0,0) |\omega^*_{\alpha 00} u_{00}|^2 + \sum_{\alpha=m_1+1}^{m} |\omega^*_{\alpha 00} u_{00}|^2 \right).$$

Поэтому (учитывая оценку (12)) константу C в неравенствах (9) можно выбрать из условия $C^2 = \max(1, \lambda^{-1}_{m_1}(0,0), mC_q/\sqrt{\varepsilon})$. Теорема доказана.

Из теоремы 5 вытекают два следствия, которые касаются разрешимости задачи (1), (2) в случае конечной гладкости правой части f уравнений (1) бесконечного и конечного порядка соответственно.

Следствие 1. *Пусть* $2n - 4q - p > 1$, $f \in W^{-q}(\Omega_T)$, $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ *при* $n > 0$ *или* $a_0 \in B^{m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ *при* $n = 0$ *(остальные элементы матриц* $A_{\widehat{s}}$ *фиксированы),* $\det A_0 \neq 0$ *при* $\mu = 1$ *и* $n > 0$. *Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) из пространства* $W^q(\Omega_T)$.

Доказательство. Если $f \in W^{-q}(\Omega_T)$, то по теореме 5 $f \in W^{-\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$. На основании теоремы 4 существует единственное решение задачи (1), (2) из пространства $W^{\infty}\{A_{\widehat{s}}\}$, которое, согласно теореме 5, принадлежит пространству $W^q(\Omega_T)$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть* $A_{\widehat{s}} = 0$ *при* $|\widehat{s}| > n$, *т.е. система (1) имеет порядок* n *и* $f \in W^l(\Omega_T)$ *при* $l > (p+1)/2$. *Тогда при тех же условиях на коэффициенты* $A_{\widehat{s}}$, *что и в следствии 1, существует единственное решение задачи (1), (2) из пространства* $W^n(\Omega_T)$.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{f}(t,x) = \sum \widetilde{f}_{kr} v_{kr}(t,x)$, где $\widetilde{f}_{kr} = (\widetilde{k}^2 + r^2)^{n/4 + l/4} f_{kr}$, тогда, очевидно, $\widetilde{f} \in W^{l/2 - n/2}(\Omega_T)$. В силу следствия 1 существует единственное решение

$$\widetilde{u}(t,x) = \sum \widetilde{u}_{kr} v_{kr}(t,x)$$

задачи (1), (2) с правой частью $\widetilde{f}$, которое принадлежит пространству $W^{n/2-l/2}(\Omega_T)$. Учитывая равенство $u_{kr} = (\widetilde{k}^2 + r^2)^{l/4-n/4}\widetilde{u}_{kr}$, на основании неравенства (9) получаем

$$\|u\|_n^2 = \|\widetilde{u}\|_{n/2-l/2}^2 \leq C^2\|\widetilde{f}\|_{l/2-n/2}^2 = C^2\|f\|_l^2,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Илькив В.С.* // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 5. С. 15–19.
2. *Илькив В.С.* // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 4. С. 498–502.
3. *Дубинский Ю.А.* // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 2. С. 269–272.
4. *Дубинский Ю.А.* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. 1976. Т. 9. С. 5–130.
5. *Дубинский Ю.А.* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 780–784.
6. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
7. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М., 1984.

Национальный университет “Львовская политехника”,
г. Львов

Поступила в редакцию
19.12.2002 г.