ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 5, с. 603–610

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2002 г. А. С. Макин

В настоящей работе изучается многоточечная задача на собственные значения для оператора Штурма–Лиувилля, заданного на интервале $(0,1)$:

$$u'' - q(x)u + \mu^2 u = 0, \tag{1}$$

$$B_1(u) = u'(0) + u'(1) + \sum_{l=1}^{m} \alpha_l u(\xi_l) + bu(1) = 0, \quad B_2(u) = u(0) - u(1) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $W_1^1[0,1]$, b, α_l $(l = \overline{1,m})$ – произвольные комплексные числа $(b \neq 0)$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m < \xi_{m+1} = 1$, m – произвольное натуральное число. Всюду запись $\|f\|$ будет означать $\|f\|_{L_2(0,1)}$.

Докажем, что

$$|\operatorname{Im}\mu_n| \leq M, \tag{3}$$

где μ_n^2 – собственные значения задачи (1), (2), $\operatorname{Re}\mu_n \geq 0$, M – некоторая постоянная. Известно [1, с. 58–65], что в угле S_0: $0 \leq \arg\mu \leq \pi/2$ существуют два линейно независимых решения уравнения (1), удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} y_1(x,\mu) = e^{i\mu x}(1 + R_1(x)), \quad y_1'(x,\mu) = i\mu e^{i\mu x}(1 + R_2(x)), \\ y_2(x,\mu) = e^{-i\mu x}(1 - R_3(x)), \quad y_2'(x,\mu) = -i\mu e^{-i\mu x}(1 - R_4(x)), \end{gathered} \tag{4}$$

где $R_j(x) = (2i\mu)^{-1}\int_0^x q(\xi)d\xi + \theta_j(x,\mu)$, а $\theta_j(x,\mu) = O(\mu^{-2})$, $j = \overline{1,4}$. Из равенств (4) вытекает, что уравнение $\Delta(\mu) = 0$, где $\Delta(\mu)$ – характеристический определитель задачи (1), (2), приводится к виду

$$\sin\mu + b^{-1}\sum_{l=1}^{m} \alpha_l(\sin\mu\xi_l + \sin\mu(1-\xi_l)) + e^{\operatorname{Im}\mu}O(\mu^{-1}) = 0,$$

откуда следует, что

$$e^{-\operatorname{Im}\mu}\sin\mu = e^{-\operatorname{Im}\mu}b^{-1}\sum_{l=1}^{m} \alpha_l(\sin\mu\xi_l + \sin\mu(1-\xi_l)) + O(\mu^{-1}). \tag{5}$$

Легко видеть, что при $\operatorname{Im}\mu \to \infty$ правая часть (5) стремится к нулю, а левая часть по абсолютной величине – к $1/2$. Отсюда находим, что все числа μ_n, лежащие в угле S_0, удовлетворяют неравенству (3). Аналогично рассматривается случай $-\pi/2 \leq \arg\mu \leq 0$.

Обозначим через $\Delta_0(\mu)$ характеристический определитель задачи (1), (2) при $q(x) \equiv 0$, $\phi_0(x,\mu) = e^{i\mu x}$, $\psi_0(x,\mu) = e^{-i\mu x}$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_0(\mu) = 2ib\sin\mu + 2i\sum_{l=1}^{m} \alpha_l(\sin\mu\xi_l + \sin\mu(1-\xi_l)). \tag{6}$$

Согласно [1, с. 47], функция Грина $G_0(x,\xi,\mu)$ краевой задачи (1), (2) при $q(x) \equiv 0$ определяется формулой

$$G_0(x,\xi,\mu) = H_0(x,\xi,\mu)/\Delta_0(\mu), \tag{7}$$

где

$$H_0(x,\xi,\mu)=\begin{vmatrix}\phi_0(x) & \psi_0(x) & g_0(x,\xi)\\ B_1(\phi_0) & B_1(\psi_0) & B_1(g_0)\\ B_2(\phi_0) & B_2(\psi_0) & B_2(g_0)\end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$g_0(x,\xi)=\pm(2W_0(\xi))^{-1}\begin{vmatrix}\phi_0(x) & \psi_0(x)\\ \phi_0(\xi) & \psi_0(\xi)\end{vmatrix},\quad W_0(\xi)=\begin{vmatrix}\phi_0'(\xi) & \psi_0'(\xi)\\ \phi_0(\xi) & \psi_0(\xi)\end{vmatrix}, \tag{9}$$

причем знак “ $+$ ” берется при $x>\xi$, а “ $-$ ” – при $x<\xi$. Легко видеть, что

$$\begin{gathered}W_0(\xi)=2i\mu,\quad g_0(x,\xi)=(2\mu)^{-1}\sin\mu|x-\xi|,\\ H_0(x,\xi,\mu)=\Phi_0(x,\xi,\mu)/(2W_0(\xi))+\Delta_0(\mu)g_0(x,\xi),\end{gathered} \tag{10}$$

где $\Phi_0(x,\xi,\mu)=\pm\{\phi_0(x)[B_1(\psi_0)(\psi_0(\xi)B_2(\phi_0(\xi)B_2(\psi_0)))-B_2(\psi_0)(\psi(\xi)B_1(\phi_0)-\phi_0(\xi)B_1(\psi_0))]-$ $-\psi_0(x)[B_1(\phi_0)(\psi_0(\xi)B_2(\phi_0)-\phi_0(\xi)B_2(\psi_0))-B_2(\phi_0)(\psi_0(\xi)B_1(\phi_0)-\phi_0(\xi)B_1(\psi_0))]\}$. Нетрудно видеть, что при условии

$$|\operatorname{Im}\mu|\le M_0, \tag{11}$$

где M_0 – некоторое произвольное число,

$$\Phi_0(x,\xi,\mu)=O(\mu). \tag{12}$$

Оценим функцию $H_0(x,\xi,\mu)$ в области $0\le\arg\mu\le\pi/2$. Следуя [1, с. 95], прибавим к последнему столбцу определителя (8) первый столбец, умноженный на функцию $e^{-i\mu\xi}/(4i\mu)$, и второй столбец, умноженный на функцию $e^{i\mu\xi}/(4i\mu)$. Раскрывая полученный определитель, находим, что

$$H_0(x,\xi,\mu)=A_1(x)V_2(\xi)-A_2(x)V_1(\xi)+\Delta_0(\mu)V_3(x,\xi), \tag{13}$$

где $A_k(x)=e^{i\mu x}B_k(e^{-i\mu x})-e^{-i\mu x}B_k(e^{i\mu x})$, $V_k(\xi)=B_k(g_0)+B_k(e^{i\mu x})e^{-i\mu\xi}+B_k(e^{-i\mu x})e^{i\mu\xi}$ $(k=1,2)$, $V_3(x,\xi)=[\operatorname{sgn}(x-\xi)(e^{i\mu(x-\xi)}-e^{-i\mu(x-\xi)})+e^{i\mu(x-\xi)}+e^{-i\mu(x-\xi)}]/(4i\mu)$. Очевидно, что

$$B_2(g_0)=(e^{i\mu\xi}-e^{-i\mu\xi}-e^{i\mu(1-\xi)}+e^{-i\mu(1-\xi)})/(4i\mu), \tag{14}$$

а при $\xi_j<\xi<\xi_{j+1}$, где $j=\overline{0,m}$,

$$\begin{aligned}B_1(g_0)=\Bigg(&e^{i\mu(1-\xi)}+e^{-i\mu(1-\xi)}-e^{i\mu\xi}-e^{-i\mu\xi}-i\Bigg[b\mu^{-1}(e^{i\mu(1-\xi)}-e^{-i\mu(1-\xi)})-\\ &-\mu^{-1}\sum_{l=1}^{j}\alpha_l(e^{i\mu(\xi_l-\xi)}-e^{-i\mu(\xi_l-\xi)})+\mu^{-1}\sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l(e^{i\mu(\xi_l-\xi)}-e^{-i\mu(\xi_l-\xi)})\Bigg]\Bigg)\Big/4.\end{aligned} \tag{15}$$

(При $j=0$ в правой части (15) в выражении в квадратных скобках отсутствует второе слагаемое, а при $j=m$ – третье слагаемое.) Легко видеть, что при $k=1,2$

$$|A_k(x)|\le c_1(e^{\operatorname{Im}\mu x}+e^{\operatorname{Im}\mu(1-x)}),\quad |V_3(x,\xi)|\le c_2/|\mu|. \tag{16}$$

Из (14) следует, что

$$V_2(\xi)=(e^{i\mu\xi}-e^{i\mu(1-\xi)})/(2i\mu), \tag{17}$$

а из (15) вытекает, что

$$V_1(\xi)=(e^{i\mu(1-\xi)}-e^{i\mu\xi})/2+b(2i\mu)^{-1}e^{i\mu(1-\xi)}+(2i\mu)^{-1}\Bigg(\sum_{l=1}^{j}\alpha_l e^{i\mu(\xi-\xi_l)}+\sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l e^{i\mu(\xi_l-\xi)}\Bigg). \tag{18}$$

Из (6) следует, что при $|\operatorname{Im}\mu| \geq M_1$, где M_1 – некоторое достаточно большое число, $|\Delta_0(\mu)| \geq \geq c_3 e^{|\operatorname{Im}\mu|}$ $(c_3 > 0)$. Из равенств (7), (13), (17), (18) и оценок (16) вытекает, что при $\operatorname{Im}\mu > M_1$

$$\int_0^1 |G_0(x,\xi,\mu)|\,dx \leq$$

$$\leq |\Delta_0(\mu)|^{-1}\Big(\int_0^1 |A_1(x)V_2(\xi)|\,dx + \int_0^1 |A_2(x)V_1(\xi)|\,dx + \int_0^1 |V_3(x,\xi)|\,dx\Big) \leq c_4/\operatorname{Im}\mu, \tag{19}$$

$$\int_0^1 |G_0(x,\xi,\mu)|\,d\xi \leq c_4/\operatorname{Im}\mu.$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что в области $-\pi/2 \leq \arg\mu \leq 0$, $|\operatorname{Im}\mu| \geq M_1$, справедливы оценки

$$\int_0^1 |G_0(x,\xi,\mu)|dx \leq c_5/|\operatorname{Im}\mu|, \quad \int_0^1 |G_0(x,\xi,\mu)|d\xi \leq c_5/|\operatorname{Im}\mu|. \tag{20}$$

Исходя из (19), (20), используя непрерывность функции $q(x)$ и повторяя рассуждения из работы [2], устанавливаем полноту системы собственных и присоединенных функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1), (2) в $L_2(0,1)$. Из [3; 4, с. 241] вытекает компактность резольвенты $R(\lambda)$ $(\lambda = \mu^2)$ оператора (1), (2), откуда следуют (см. [5]) минимальность указанной системы функций в $L_2(0,1)$ и существование биортогонально сопряженной системы функций $\{v_n(x)\}$.

Оценим функцию $H_0(x,\xi,\mu)$, если выполняется условие (11). Так как $B_1(e^{i\mu x}) = i\mu(1 + + e^{i\mu}) + O(1)$, $B_1(e^{-i\mu x}) = -i\mu(1 + e^{-i\mu}) + O(1)$, $B_1(g_0) = (\cos\mu(1-\xi) - \cos\mu\xi)/2 + O(\mu^{-1})$, то, раскрывая определитель (8), после некоторых вычислений получаем, что

$$H_0(x,\xi,\mu) = e^{i\mu x}[B_1(e^{-i\mu x})B_2(g_0) - B_2(e^{-i\mu x})B_1(g_0)] - e^{-i\mu x}[B_1(e^{i\mu x})B_2(g_0) - B_2(e^{i\mu x})B_1(g_0)] +$$
$$+ \Delta_0(\mu)g_0(x,\xi) = -i[(\sin\mu\xi - \sin\mu(1-\xi))(\cos\mu x + \cos\mu(1-x)) +$$
$$+ (\cos\mu(1-\xi) - \cos\mu\xi)(\sin\mu x - \sin\mu(1-x))] + O(\mu^{-1}) =$$
$$= 4i\sin\mu((1-2\xi)/2)\cos\mu((1-2x)/2) + O(\mu^{-1}). \tag{21}$$

Далее всюду будем предполагать, что все ξ_l – рациональные числа, т.е. $\xi_l = p_l/q_l$, где p_l, q_l – натуральные числа. Пусть k – НОК чисел q_l.

Теорема 1. *Если $q(x) \equiv 0$, то 1) система корневых функций $\{u_n(x)\}$ может быть выбрана так, что $\|u_n\|\|v_n\| \leq C(|\mu_n| + 1)$; 2) при любом выборе функций $u_n(x)$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \|u_n\|\,\|v_n\|/|\mu_n| > 0$.*

Доказательство. Заменяя в (6) $\mu = k\rho$, получаем, что $\Delta_0(\mu) = 2ib\tilde{\Delta}_0(\rho)$, где $\tilde{\Delta}_0(\rho) = = \sin k\rho + b^{-1}\sum_{l=1}^m \alpha_l(\sin k_l\rho + \sin(k-k_l)\rho)$, $1 \leq k_l \leq k$. (Если $k = 1$, то сумма в правой части последнего равенства отсутствует.) Согласно [6, с. 84],

$$\tilde{\Delta}_0(\rho) = \tilde{A}\prod_{i=1}^{2k} \sin\frac{\rho - \rho_i}{2}, \tag{22}$$

где $\tilde{A} \neq 0$ – некоторая постоянная, $0 \leq \operatorname{Re}\rho_i < 2\pi$ (числа ρ_i могут совпадать). Отсюда следует, что

$$\Delta_0(\mu) = A\prod_{i=1}^{2k} \sin\frac{\mu - \mu_i}{2k}, \tag{23}$$

где $A = 2ib\tilde{A}$, $\mu_i = k\rho_i$. Очевидно, что в правой полуплоскости уравнение $\tilde{\Delta}_0(\rho) = 0$ имеет корни $\rho_{i,n} = \rho_i + 2\pi n$, $i = \overline{1,2k}$, $n = 0,1,\ldots$ Обозначим через τ_j корни этого уравнения такие, что $0 \le \operatorname{Re}\tau_j < 2\pi$, и занумерованные без учета кратности. Пусть $\tau_{j,n} = \tau_j + 2\pi n$, $j = \overline{1,L}$, $L \le 2k$, $n = 0,1,\ldots$ Легко видеть, что

$$\min_{i\ne j,\ n,m=0,1,\ldots} |\tau_{j,n} - \tau_{i,m}| = r > 0. \tag{24}$$

Обозначим через $\Gamma_{j,n}$ окружность радиуса $r/4$ с центром в точке $\tau_{j,n}$. Из (22) вытекает, что если $\rho \in \Gamma_{j,n}$, то $|\Delta_0(k\rho)| \ge c_6 > 0$.

Пусть $S_{j,n}$ – корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_{j,n} = (k\tau_{j,n})^2$. Из (21) следует, что при всех $n \ge n_0$, n_0 – некоторое достаточно большое число, $\|H_0(x,\xi,\mu_{j,n})\|_{L_2((0,1)\times(0,1))} \ne 0$, где $\mu_{j,n} = k\tau_{j,n}$. Отсюда заключаем, что при $n \ge n_0$ собственному значению $\lambda_{j,n}$ отвечают одна собственная функция и, возможно, присоединенные функции. Пусть $\{\overset{h}{u}_{j,n}(x)\}$ $(h = \overline{0, \dim S_{j,n} - 1})$ – произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2), а $\{\overset{h}{v}_{j,n}(x)\}$ – надлежащим образом нормированная каноническая система собственных и присоединенных функций сопряженной краевой задачи [7], т.е. $\overset{0}{u}_{j,n}(x)$, $\overset{0}{v}_{j,n}(x)$ – собственные функции, а $\overset{h}{u}_{j,n}(x)$, $\overset{h}{v}_{j,n}(x)$ – присоединенные функции порядка h $(h \ge 1)$, где

$$(\overset{h}{u}_{j,n}, \overset{g}{v}_{i,m})_{L_2(0,1)} = \delta_{j,i}\delta_{n,m}\delta_{h,d_j-1-g}, \tag{25}$$

$d_j = \dim S_{j,n}$. Из (21), (23) и представления для главной части функции Грина в окрестности собственного значения $\lambda_{j,n}$ [7] вытекает, что

$$\left|\sum_{p=0}^{d_j-1} \overset{p}{u}_{j,n}(x)\overline{\overset{d_j-1-p}{v}_{j,n}(\xi)}\right| = \frac{k^2}{\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_{j,n}} \rho G_0(x,\xi,k\rho)\,d\rho\right| \le c_7|\mu_{j,n}|, \tag{26}$$

где $0 \le x \le 1$, $0 \le \xi \le 1$.

В каждом из подпространств $S_{j,n}$ произвольным образом выберем ортогональный базис $\tilde{u}^{[p]}_{j,n}$ $(p = \overline{0, d_j - 1})$. Обозначим

$$\tilde{u}_{j,n} = (\tilde{u}^{[0]}_{j,n}, \ldots, \tilde{u}^{[d_j-1]}_{j,n}), \quad u_{j,n} = (\overset{0}{u}_{j,n}, \ldots, \overset{d_j-1}{u}_{j,n}), \quad v_{j,n} = (\overline{\overset{d_j-1}{v}_{j,n}}, \ldots, \overline{\overset{0}{v}_{j,n}}).$$

Так как функции $\overset{p}{u}_{j,n}(x)$ канонической системы линейно независимы, то $\tilde{u}_{j,n} = A_{j,n}u_{j,n}$, где $A_{j,n}$ – невырожденные матрицы размера $d_j \times d_j$. Пусть вектор $\tilde{v}_{j,n} = B_{j,n}v_{j,n}$ $(\tilde{v}_{j,n} = \tilde{v}^{[d_j-1]}_{j,n}, \ldots, \tilde{v}^{[0]}_{j,n})$, где $B_{j,n} = (A^{-1}_{j,n})^{\mathrm{T}}$. Из леммы 3 работы [8] (см. также [9]) и (25) следует, что $(\tilde{u}^{[h]}_{j,n}, \tilde{v}^{[g]}_{i,m})_{L_2(0,1)} = \delta_{j,i}\delta_{n,m}\delta_{h,d_j-1-g}$ $(h = \overline{0, d_j - 1},\ g = \overline{0, d_j - 1})$ и

$$\sum_{p=0}^{d_j-1} \overset{p}{u}_{j,n}(x)\overline{\overset{d_j-1}{v}_{j,n}(\xi)} = \sum_{p=0}^{d_j-1} \tilde{u}^{[p]}_{j,n}(x)\overline{\tilde{v}^{[d_j-1-p]}_{j,n}(\xi)}.$$

Из последнего равенства, ортогональности функций $\tilde{u}^{[p]}_{j,n}(x)$ и оценки (26) вытекает, что $\|\tilde{u}^{[p]}_{j,n}\|\,\|\tilde{v}^{[d_j-1-p]}_{j,n}\| \le c_8|\mu_{j,n}|$. Тем самым установлено первое утверждение теоремы 1.

Оценим снизу выражение в левой части (26). Обозначим $\overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi) = \sum_{p=0}^{d_j-1} \overset{p}{u}_{j,n}(x)\overline{\overset{d_j-1-p}{v}_{j,n}(\xi)}$, $\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi) = \overset{0}{u}_{j,n}(x)\overline{\overset{0}{v}_{j,n}(\xi)}$. Функции $\overset{p}{v}_{j,n}(\xi)$ $(p = \overline{0, d_j - 1})$ определены почти всюду на отрезке $[0,1]$. Пусть ξ – произвольная точка из области определения этих функций, причем

$\overset{0}{v}_{j,n}(\xi) \neq 0$. Тогда $\overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi)$ является присоединенной функцией порядка $d_j - 1$, отвечающей собственному значению $\lambda_{j,n}$ и собственной функции $\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi)$. Из работы [10] следует, что

$$\|\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi)\|^2 \leq c_9^2(|\mu_{j,n}|+1)^{2(d_j-1)}\|\overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi)\|^2, \tag{27}$$

где постоянная c_9 не зависит от ξ. Если $\overset{0}{v}_{j,n}(\xi) = 0$, то справедливость (27) очевидна. Интегрируя неравенство (27) по ξ, будем иметь

$$\|\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi)\|^2_{L_2((0,1)\times(0,1))} \leq c_{10}^2(|\mu_{j,n}|+1)^{2(d_j-1)}\|\overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi)\|^2_{L_2((0,1)\times(0,1))}. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию $\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi)$. Согласно [7],

$$\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi) = \lim_{\mu\to\mu_{j,n}} (\mu^2-\mu_{j,n}^2)^{d_j} H_0(x,\xi,\mu)/\Delta_0(\mu). \tag{29}$$

Из (23) следует, что

$$\Delta_0(\mu) = A\sin^{d_j}\frac{\mu-\mu_j}{2k}\prod_{\mu_\gamma\neq\mu_j}\sin\frac{\mu-\mu_\gamma}{2k} = (-1)^{d_jn}\sin^{d_j}\frac{\mu-\mu_{j,n}}{2k}T_j(\mu), \tag{30}$$

где $T_j(\mu) = A\prod_{\mu_\gamma\neq\mu_j}\sin((\mu-\mu_\gamma)/(2k))$. Из (24) вытекает, что при $|\mu-\mu_{j,n}| \leq kr/4$

$$0 < c_{11} < |T_j(\mu)| < c_{12}. \tag{31}$$

Из (29)–(31) следует, что

$$\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi) = (-1)^{d_jn}(2\mu_{j,n})^{d_j}H_0(x,\xi,\mu_{j,n})T_j^{-1}(\mu_{j,n})\lim_{\mu\to\mu_{j,n}}(\mu-\mu_{j,n})^{d_j}\sin^{-d_j}((\mu-\mu_{j,n})/(2k)) =$$

$$= (-1)^{d_jn}(4k\mu_{j,n})^{d_j}H_0(x,\xi,\mu_{j,n})T_j^{-1}(\mu_{j,n}).$$

Отсюда и из (21), (31) находим, что $\|\overset{0}{R}_{j,n}(x,\xi)\|^2_{L_2((0,1)\times(0,1))} \geq c_{13}|\mu_{j,n}|^{2d_j}$, $c_{13} \geq 0$. Из последнего неравенства и (28) получаем, что

$$\|\overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi)\|_{L_2((0,1)\times(0,1))} \geq c_{14}|\mu_{j,n}|, \quad c_{14} > 0. \tag{32}$$

Пусть $\hat{u}_{j,n}^{[p]}$ $(p = \overline{0, d_j-1})$ – произвольный базис в корневом подпространстве $S_{j,n}$, $\hat{v}_{j,n}^{[p]}$ – базис корневого подпространства $S_{j,n}^*$, отвечающего собственному значению $\bar{\lambda}_{j,n}$ краевой задачи, сопряженной к задаче (1), (2), выбранный таким образом, что $(\hat{u}_{j,n}^{[p]}, \hat{v}_{j,n}^{[q]})_{L_2(0,1)} = \delta_{p,d_j-1-q}$. Из единственности биортогонально сопряженной системы и леммы 3 работы [8] вытекает, что $\sum_{p=0}^{d_j-1}\hat{u}_{j,n}^{[p]}(x)\overline{\hat{v}_{j,n}^{[d_j-1-p]}(\xi)} = \overset{d_j-1}{R}_{j,n}(x,\xi)$. Тогда из (32) получаем, что для любых j,n существует такое p, что $\|\hat{u}_{j,n}^{[p]}\|\,\|\hat{v}_{j,n}^{[d_j-1-p]}\| \geq c_{15}|\mu_{j,n}|/|d_j|$ $(c_{15} > 0)$, откуда вытекает справедливость второго утверждения теоремы 1.

Изучим задачу (1), (2) при $q(x) \not\equiv 0$. Обозначим через $\phi(x,\mu)$, $\psi(x,\mu)$ фундаментальную систему решений уравнения (1), определенную начальными условиями $\phi(0,\mu) = \psi(0,\mu) = 1$, $\phi'_x(0,\mu) = i\mu$, $\psi'_x(0,\mu) = -i\mu$. Всюду в дальнейшем будем считать, что выполняется условие $\int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} q(x)dx = 0$ $(l = \overline{0,m})$. Из (11), последнего условия и работы [11] вытекает, что

$$\begin{gathered}\phi(\xi_l,\mu) = e^{i\xi_l\mu}(1+P(\xi_l,\mu)), \quad \phi'(\xi_l,\mu) = e^{i\xi_l\mu}(i\mu+\hat{P}(\xi_l,\mu)),\\ \psi(\xi_l,\mu) = e^{-i\xi_l\mu}(1+Q(\xi_l,\mu)), \quad \psi'(\xi_l,\mu) = e^{-i\xi_l\mu}(-i\mu+\hat{Q}(\xi_l,\mu)),\end{gathered} \tag{33}$$

где $P(\xi_l,\mu) = (q(\xi_l)-q(0)e^{-2i\mu\xi_l})/(4\mu^2)+\theta_1(\xi_l,\mu)$, $\hat{P}(\xi_l,\mu) = (q(\xi_l)-q(0)e^{-2i\mu\xi_l})/(4i\mu)+\theta_2(\xi_l,\mu)$, $Q(\xi_l,\mu) = (q(\xi_l)-q(0)e^{2i\mu\xi_l})/(4\mu^2)+\theta_3(\xi_l,\mu)$, $\hat{Q}(\xi_l,\mu) = (q(0)e^{2i\mu\xi_l}-q(\xi_l))/(4i\mu)+\theta_4(\xi_l,\mu)$; здесь $\theta_j(\xi_l,\mu) = o(\mu^{-2})$, $\partial\theta_j(\xi_l,\mu)/\partial\mu = o(\mu^{-2})$ $(j = 1,3)$, $\theta_j(\xi_l,\mu) = o(\mu^{-1})$, $\partial\theta_j(\xi_l,\mu)/\partial\mu = o(\mu^{-1})$ $(j = 2,4)$. Исходя из равенств (33), с учетом определения входящих в них функций, с помощью несколько громоздких, но элементарных вычислений находим, что

$$\Delta(\mu) = B_1(\phi)B_2(\psi) - B_1(\psi)B_2(\phi) = \Delta_0(\mu) + (i\mu)^{-1}(q(1) - q(0))\cos\mu + \theta(\mu), \tag{34}$$

где $\theta(\mu) = o(\mu^{-1})$, $\theta'(\mu) = o(\mu^{-1})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия: 1) $q(1) \neq q(0)$; 2) числа $\pi/2 + \pi n$, $n = 0,1,\ldots$, не являются корнями уравнения $\Delta_0(\mu) = 0$. Тогда все собственные значения λ_n, за исключением, может быть, конечного числа, простые (иначе говоря, асимптотически простые), а также справедливо неравенство $C_1(|\mu_n| + 1) \leq \|u_n\|\|v_n\| \leq C_2(|\mu_n| + 1)^2$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$.*

Доказательство. Из (34) следует, что заменой переменной $\mu = k\rho$ уравнение $\Delta(\mu) = 0$ приводится к виду

$$\tilde{\Delta}(\rho) = \tilde{\Delta}_0(\rho) + a\rho^{-1}\cos k\rho + \tilde{\theta}(\rho) = 0, \tag{35}$$

где $a \neq 0$, $\tilde{\theta}(\rho) = o(\rho^{-1})$, $\tilde{\theta}'(\rho) = o(\rho^{-1})$. Пусть ρ_i – корень кратности p $(1 \leq p \leq 2k)$ уравнения $\tilde{\Delta}_0(\rho) = 0$. Рассуждая аналогично [12], находим, что все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения (35) имеют вид $\tilde{\rho}_{i,n} = \rho_{i,n} + \delta_{i,n}$, где $|\delta_{i,n}| \leq c_1 n^{-1/p}$, $n = n_0, n_0+1,\ldots$, а уравнение (35) заменой переменной $\rho = \rho_i+2\pi n+z$, $|z| \leq r/4$, приводится к виду

$$\sin^p\frac{z}{2} + \frac{(-1)^{np}a(\cos k\rho_i\cos kz - \sin k\rho_i\sin kz)}{(\rho_i + 2\pi n + z)T_i(\rho_i + 2\pi n + z)} + \tilde{\theta}(\rho_i + 2\pi n + z) = 0, \tag{36}$$

где $T_i(\rho) = A\prod_{\rho_j\neq\rho_i}\sin((\rho - \rho_j)/2)$. Из условия 2) теоремы вытекает, что $\cos k\rho_i \neq 0$. Как и в [12], выделяя в (36) по формуле Маклорена главную часть при $z \to 0$, находим, что уравнение (36) может быть записано в виде $z^p - \beta_{i,n}/n = R_{i,n}(z)$, где $0 < c_2 < |\beta_{i,n}| < c_3$, $R_{i,n}(z) = o(n^{-1})$, $R'_{i,n}(z) = O(n^{-1})$. Обозначим выражение в левой его части через $f_{i,n}(z)$. Очевидно, что $f_{i,n}(z) = \prod_{j=1}^p(z - z_{i,n,j})$, где $z_{i,n,j}$ – корни уравнения $f_{i,n}(z) = 0$. Легко видеть, что

$$c_4 n^{-1/p} \leq |z_{i,n,j}| \leq c_5 n^{-1/p}, \quad |z_{i,n,j} - z_{i,n,l}| \geq c_6 n^{-1/p} \tag{37}$$

$(c_4 > 0,\ c_6 > 0)$ при $l \neq j$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (37) следует, что если $|z - z_{i,n,j}| = \varepsilon c_6 n^{-1/p}/2$, то $|f_{i,n}(z)| \geq \varepsilon c_6^p/(2^p n)$. Так как при всех $n > n_0$, где n_0 – достаточно большое число, $|R_{i,n}(z)| < \varepsilon c_6^p/(2^{p+1}n)$, то из теоремы Руше вытекает, что при всех $n > n_0$ внутри окружности $|z - z_{i,n,j}| = \varepsilon c_6 n^{-1/p}/2$ уравнения $f_{i,n}(z) = 0$ и $z^p - \beta_{i,n}/n = R_{i,n}(z)$ имеют равное число корней, значит, внутри указанной окружности последнее уравнение имеет ровно один корень $\tilde{z}_{i,n,j}$, причем $\tilde{z}_{i,n,j} = z_{i,n,j}+o(n^{-1/p})$. Рассуждая далее аналогично [12], находим, что собственные значения задачи (1), (2) асимптотически простые и, кроме того, для любого собственного значения $\mu_{i,n,j} = k(\rho_i + 2\pi n + \tilde{z}_{i,n,j})$, где $n > n_0$, справедливо неравенство

$$c_7|\mu_{i,n,j}|^{(1-p)/p} \leq |\Delta'(\mu_{i,n,j})| \leq c_8|\mu_{i,n,j}|^{(1-p)/p}, \quad c_7 > 0. \tag{38}$$

Оценим произведение $u_n(x)\overline{v_n(\xi)}$, где $u_n(x)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_n = \mu_n^2$, а $v_n(x)$ – функция из биортогонально сопряженной системы, стоящая в паре с $u_n(x)$. Пусть функции $G(x,\xi,\mu)$, $H(x,\xi,\mu)$, $g(x,\xi)$, $W(\xi)$ определяются равенствами (7)–(9), где всюду вместо функций $\phi_0(x,\mu)$, $\psi_0(x,\mu)$, $\Delta_0(\mu)$ подставлены функции $\phi(x,\mu)$, $\psi(x,\mu)$, $\Delta(\mu)$. Легко видеть, что $H(x,\xi,\mu) = \Phi(x,\xi,\mu)/(2W(\xi)) + \Delta(\mu)g(x,\xi)$. Из равенств (33) с учетом определения входящих в них функций вытекает, что при условии (11) $B_i(\phi(x,\mu)) = B_i(\phi_0(x,\mu)) + O(\mu^{1-i})$, $B_i(\psi(x,\mu)) = B_i(\psi_0(x,\mu)) + O(\mu^{1-i})$ $(i = 1,2)$, откуда следует, что

$$\Phi(x,\xi,\mu) - \Phi_0(x,\xi,\mu) = O(1). \tag{39}$$

Из легко проверяемого равенства

$$W(\xi,\mu) = W_0(\xi,\mu) + O(1) \tag{40}$$

и (10) вытекает, что

$$g(x,\xi) = g_0(x,\xi) + O(\mu^{-2}). \tag{41}$$

Из (6) и (34) следует, что

$$\Delta_0(\mu) = O(1), \quad \Delta(\mu) = \Delta_0(\mu) + O(\mu^{-1}). \tag{42}$$

Из (10), (12), (39)–(42) следует, что $H(x,\xi,\mu) - H(x,\xi,\mu) = O(\mu^{-1})$. Из последнего равенства и (21) вытекает, что $H(x,\xi,\mu) = 4i\sin\mu((1-2\xi)/2)\cos\mu((1-2x)/2) + O(\mu^{-1})$ и, стало быть, при всех достаточно больших n

$$0 < c_9 \le \|H(x,\xi,\mu_n)\|_{L_2((0,1)\times(0,1))} \le c_{10}. \tag{43}$$

Если μ_n – простой нуль функции $\Delta(\mu)$, то, согласно [1, с. 48],

$$u_n(x)\overline{v_n(\xi)} = -2\mu_n H(x,\xi,\mu_n)/\Delta'(\mu_n). \tag{44}$$

Из последнего равенства, (38) и (43) вытекает утверждение теоремы 2.

Замечание. Условие 2) теоремы 2 выполняется для многих задач типа (1), (2). Так как в силу (6) $\Delta_0(\mu) = 2ib(\sin\mu + 2b^{-1}\sin(\mu/2)\sum_{l=1}^m \alpha_l\cos(\mu(1-2\xi_l)/2))$, то, например, при условии $b^{-1}\sum_{l=1}^m |\alpha_l| < \sqrt{2}/2$ равенства $\Delta_0(\mu) = 0$ и $\cos\mu = 0$ несовместны.

В ряде случаев удается более точно оценить произведение норм $\|u_n\|\,\|v_n\|$. Пусть $q(0) \ne q(1)$, m нечетно, $m = 2p-1$, $\xi_l = l/(m+1)$, где $l = \overline{1,m}$. Тогда $k = 2p$ и

$$\tilde\Delta_0(\rho) = \sin 2p\rho + b^{-1}\sum_{j=1}^{2p-1}\alpha_l(\sin l\rho + \sin(2p-l)\rho) =$$

$$= 2\sin p\rho\left[\cos p\rho + b^{-1}\sum_{j=1}^{p-1}(\alpha_{p-j}+\alpha_{p+j})\cos j\rho + \alpha_p/b\right] = 2\sin p\rho\left[\cos p\rho + \sum_{j=1}^{p-1}\beta_j\cos j\rho + \beta_p\right], \tag{45}$$

где $\beta_j = b^{-1}(\alpha_{p-j}+\alpha_{p+j})$ при $j = \overline{1,p-1}$, $\beta_p = \alpha_p/b$, а при $p = 1$ сумма в квадратных скобках в правой части (45) отсутствует. Обозначим через $Q_p(\rho)$ выражение в квадратных скобках в правой части (45). Из [6, с. 84] следует, что

$$\sin p\rho = A_0\prod_{i=1}^{2p}\sin\frac{\rho-\rho_i}{2}, \tag{46}$$

где $A_0 \ne 0$, $\rho_i = \pi(i-1)/p$. Обозначим через ζ произвольное иррациональное число из интервала $(0,1)$. Из [6, с. 86] и [12] следует, что числа β_j, $j = \overline{1,p}$, могут быть подобраны таким образом, что $Q_p(\rho) = A_1(\cos\rho - \cos\pi\zeta)^p$, где $A_1 \ne 0$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$Q_p(\rho) = A_2\sin^p\frac{\rho-\pi\zeta}{2}\sin^p\frac{\rho-(2\pi-\pi\zeta)}{2}, \tag{47}$$

где $A_2 \ne 0$. Отсюда вытекает, что числа $\hat\rho_1 = \pi\zeta$, $\hat\rho_2 = 2\pi - \pi\zeta$ являются корнями кратности p уравнения $\tilde\Delta_0(\rho) = 0$, причем это уравнение и $\cos 2p\rho = 0$ несовместны, стало быть, построенная указанным образом краевая задача удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Из (45)–(47) следует, что ее собственные значения образуют следующие серии: $\mu_{i,n} = k(\rho_i + 2\pi n + \delta_{i,n} + o(n^{-1}))$ $(i = \overline{1,2p})$, $\hat\mu_{\theta,n,j} = k(\hat\rho_\theta + 2\pi n + \hat\delta_{\theta,n,j} + o(n^{-1/p}))$ $(\theta = 1,2,$

$j=\overline{1,p}$), где $c_1 n^{-1/p} \le |\hat{\delta}_{\theta,n,j}| \le c_2 n^{-1/p}$, $c_3 n^{-1} \le |\delta_{i,n}| \le c_4 n^{-1}$, $|\hat{\delta}_{\theta,n,j} - \hat{\delta}_{\theta,n,l}| \ge c_5 n^{-1/p}$, где $1 \le j,l \le p$, $j \ne l$, $c_1 > 0$, $c_3 > 0$, $c_5 > 0$. Отсюда и из (38) следует, что

$$c_6 n^{(1-p)/p} \le |\Delta'(\hat{\mu}_{\theta,n,j})| \le c_7 n^{(1-p)/p}, \tag{48}$$

где $\theta = 1,2$, $j=\overline{1,p}$, $c_6 > 0$,

$$0 < c_8 \le |\Delta'(\mu_{i,n})| \le c_9 \tag{49}$$

($i=\overline{1,2p}$). Из (43), (44), (48), (49) вытекает, что

$$\begin{gathered} c_{10}(|\hat{\mu}_{\theta,n,j}|+1)^{2-1/p} \le \|\hat{u}_{\theta,n,j}\|\|\hat{v}_{\theta,n,j}\| \le c_{11}(|\hat{\mu}_{\theta,j,n}|+1)^{2-1/p}, \\ c_{12}(|\mu_{i,n}|+1) \le \|u_{i,n}\|\|v_{i,n}\| \le c_{13}(|\mu_{i,n}|+1) \end{gathered} \tag{50}$$

($c_{10} > 0$, $c_{12} > 0$), где собственная функция $\hat{u}_{\theta,n,j}(x)$ отвечает собственному значению $\hat{\mu}^2_{\theta,n,j}$, собственная функция $u_{i,n}(x)$ отвечает собственному значению $\mu^2_{i,n}$, а $\hat{v}_{\theta,n,j}(x)$ и $v_{i,n}(x)$ – функции из биортогонально сопряженной системы, стоящие в паре соответственно с функциями $\hat{u}_{\theta,n,j}(x)$ и $u_{i,n}(x)$. Из (50) вытекает существование краевых задач типа (1), (2) таких, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|u_n\|\|v_n\|/|\mu_n|^{2-1/p} = c > 0$ при любом наперед заданном натуральном p.

Автор выражает глубокую благодарность В.А. Ильину и Е.И. Моисееву за внимание к настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Locker J.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1992. V. 121. № 3/4. P. 279–301.
3. *Агранович М.С.* Дополнение к книге Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М., 1977.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
5. *Агранович М.С.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1990. Т. 63. С. 5–129.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
7. *Келдыш М.В.* // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 4. С. 15–41.
8. *Макин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2071–2081.
9. *Ильин В.А.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
10. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 10. С. 1684–1694.
11. *Макин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1058–1066.
12. *Макин А.С.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1324–1330.

Московская государственная академия
приборостроения и информатики

Поступила в редакцию
21.02.2001 г.