УДК 514.74+512.815.7

П. И. Кацыло, Д. А. Тимашёв

Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход

Рассматриваются естественные алгебраические дифференциальные операции, действующие на геометрические величины на гладких многообразиях. Описан метод изучения и классификации таких операций – метод IT-редукции. Согласно этому методу изучение естественных операций сводится к изучению эквивариантных (относительно некоторых алгебраических групп) рациональных отображений между пространствами k-струй. На основе метода IT-редукции доказана теорема о конечной порожденности: для тензорных расслоений $\mathscr{V},\mathscr{W} \to M$ все естественные дифференциальные операции $D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$ степени не выше d можно получить алгебраически из некоторого конечного числа таких операций. Приведены концептуальные доказательства известных теорем о классификации линейных естественных операций на произвольных и на симплектических многообразиях. Доказана теорема о несуществовании на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях естественных деформационных квантований.

Библиография: 21 название.

Введение

В дифференциальной геометрии имеется много нетривиальных формул и теорем, основанных на локальных вычислениях. Таковы, например, тождества Бьянки, теорема Гилки [1], формула Вейтценбока [2; гл. 1, раздел I]. Такие локальные по своей сути теоремы и формулы образуют фундамент дифференциальной геометрии. Более того, нередки случаи, когда открытие локальных формул позволяло решать многие важные задачи. Например, теорема Гилки позволила получить новое доказательство теоремы об индексе [3], [4]. В связи с этим представляется естественным разработать универсальный подход к локальным задачам дифференциальной геометрии.

Один из таких подходов, называемый *формальной геометрией*, был предложен И. М. Гельфандом и Д. А. Кажданом в 1971 г. (см. [5]). Приблизительно в это же время Э. Б. Винберг заметил, что использование методов теории инвариантов делает локальные вычисления проще и понятнее. Это было одним из побудительных мотивов к созданию им московской школы теории инвариантов. Более того, локальные задачи дифференциальной геометрии можно свести к задачам теории инвариантов о действиях конечномерных линейных алгебраических групп. Назовем такое сведение *теоретико-инвариантной редукцией* (*IT-редукцией*).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05–01–00988).

Упрощенная версия метода IT-редукции изложена в [6]. В настоящей статье мы изложим этот метод в максимально общем виде, необходимом для приложений. Подчеркнем, что IT-редукция ориентирована на решение конкретных локальных задач дифференциальной геометрии. Например, в [7] дается весьма общее определение естественных операций и затем доказываются теоремы типа теоремы Петре о конечности порядка некоторых таких операций. В методе IT-редукции с самого начала рассматриваются только операции конечного порядка, так как только такие операции встречаются в приложениях.

Статья имеет следующую структуру. В § 1 приведены определения геометрических величин, естественных расслоений и естественных дифференциальных операций. Существенным обстоятельством является то, что геометрические величины (например, тензорные поля) являются сечениями расслоений, ассоциированных с расслоениями реперов, а естественные дифференциальные операции действуют на геометрические величины по формулам, которые инвариантны относительно преобразований координат. В частности, имеющие "физический смысл" дифференциальные операции должны быть естественными дифференциальными операциями, так как они не зависят от системы координат. Кроме того, в этом параграфе объяснен метод IT-редукции. Также изложены факты из теории представлений классических групп, которые будут использованы в последующих вычислениях.

В § 2 и далее рассматриваются алгебраические естественные дифференциальные операции, действующие на тензорные поля. В § 2 доказаны теорема о конечности и теорема о конечной порожденности. В § 3 и § 4 методом IT-редукции получено описание естественных линейных дифференциальных операций на произвольных (теорема Схоутена) и на симплектических многообразиях (ср. с [8]). При этом использовано понятие естественной дифференциальной операции на многообразии с дополнительной структурой (см. п. 4.1). Наконец, в § 5 доказано, что на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях не существует естественных деформационных квантований.

Примем следующее соглашение. В формулах тензорного исчисления по умолчанию подразумевается суммирование по каждой паре повторяющихся верхних и нижних индексов, которые пробегают натуральные числа от одного до размерности многообразия.

§ 1. Предварительные замечания

Мы рассматриваем гладкие $\mathbb{K}$-многообразия, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (соответствует вещественным многообразиям) или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (соответствует комплексным многообразиям). Описываемые ниже конструкции по своей сути алгебраичны и не зависят от поля $\mathbb{K}$.

1.1. Геометрические величины. Понятие геометрической величины восходит к Риману (см. [9; гл. 6, § 1]). Например, тензорные поля и связности являются геометрическими величинами. В классической дифференциальной геометрии геометрические величины определяются следующим образом. Пусть M есть n-мерное многообразие. По классическому определению *геометрическая величина* – это правило, сопоставляющее каждой локальной системе координат $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, $U_\alpha \subset M$ отображение $f_\alpha\colon U_\alpha \to F$, где F – фиксированное векторное пространство (или, в более общем случае, $\mathbb{K}$-многообразие).

При этом для отображений $\{f_\alpha\}$ должно быть выполнено следующее правило преобразования:

$$f_\beta = \Phi\biggl(\biggl\{\frac{\partial^l x^i_\beta}{\partial(x^1_\alpha)^{l_1}\cdots\partial(x^n_\alpha)^{l_n}}\biggr\}_{\substack{1\leqslant l\leqslant k,\,1\leqslant i\leqslant n\\ l_1+\dots+l_n=l}}, f_\alpha\biggr), \tag{1}$$

где $k\in\mathbb{N}$, а Φ есть некоторое фиксированное (не зависящее от локальных систем координат) дифференцируемое отображение.

Приведем современное (формально более точное) определение геометрических величин.

Рассмотрим группу $\mathrm{GL}^{(k)}_n$, состоящую из k-струй локальных диффеоморфизмов $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ в точке нуль. Элементы группы $\mathrm{GL}^{(k)}_n$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ вида

$$\begin{gathered} x\mapsto g(x)=g_1(x)+g_2(x,x)+\dots+g_k(x,\dots,x),\\ x=(x^1,\dots,x^n),\qquad g_l\in \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*}\otimes\mathbb{K}^n,\quad l=1,\dots,k,\qquad \det g_1\neq 0. \end{gathered}$$

Группа $\mathrm{GL}^{(k)}_n$ является линейной алгебраической группой, изоморфной группе автоморфизмов усеченной алгебры полиномов

$$J^{(k)}_n=\mathbb{K}[x^1,\dots,x^n]/(x^1,\dots,x^n)^{k+1}.$$

Унипотентный радикал $\mathrm{NGL}^{(k)}_n$ группы $\mathrm{GL}^{(k)}_n$ определяется при помощи уравнения $g_1(x)=x$, а подгруппой Леви является подгруппа GL_n линейных преобразований.

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{gl}^{(k)}_n$ группы $\mathrm{GL}^{(k)}_n$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ вида

$$\begin{gathered} x\mapsto \xi(x)=\xi_1(x)+\xi_2(x,x)+\dots+\xi_k(x,\dots,x),\\ x=(x^1,\dots,x^n),\qquad \xi_l\in \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*}\otimes\mathbb{K}^n,\quad l=1,\dots,k. \end{gathered}$$

Подалгебра Ли $\mathfrak{ngl}^{(k)}_n$ подгруппы $\mathrm{NGL}^{(k)}_n$ выделяется условием $\xi_1=0$.

Через $\mathrm{Fr}^k M$ будем обозначать расслоение кореперов порядка k над M [9; гл. 6, п. 1.2]. Слой проекции $\mathrm{Fr}^k M\to M$ над $z\in M$ состоит из кореперов порядка k в z (k-струй координатных функций $x=(x^1,\dots,x^n)$ в окрестности точки z таких, что $x(z)=0$). Имеем естественное действие группы $\mathrm{GL}^{(k)}_n$ на тотальном пространстве расслоения $\mathrm{Fr}^k M$. Относительно этого действия $\mathrm{Fr}^k M$ является главным $\mathrm{GL}^{(k)}_n$-расслоением.

Замечание 1.1. Вместо кореперов можно рассматривать реперы порядка k, т.е. k-струи обратных координатных отображений, отправляющих окрестность $0\in\mathbb{K}^n$ в окрестность $z\in M$. Репер порядка один задается фиксированием базиса в T_zM (являющегося образом стандартного базиса в $T_0\mathbb{K}^n=\mathbb{K}^n$), т.е. обычным репером на M. Расслоения реперов и кореперов канонически изоморфны.

Напомним, что для любого главного расслоения $E\to B=E/H$ со структурной группой H с каждым H-многообразием F связано ассоциированное расслоение с типичным слоем F:

$$E\times^H F=(E\times F)/H\to B, \tag{2}$$

где H действует на $E\times F$ диагональным образом.

Определение 1.2. *Естественным расслоением* над $\mathbb{K}$-многообразием M называется расслоение вида

$$\mathscr{F} := \mathrm{Fr}^k M \times^{\mathrm{GL}_n^{(k)}} F \to \mathrm{Fr}^k M/\mathrm{GL}_n^{(k)} = M, \tag{3}$$

где F есть $\mathbb{K}$-многообразие с дифференцируемым действием группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$. Тотальное пространство естественного расслоения (3) называется *пространством геометрических объектов типа F над M*. Сечение естественного расслоения (3) называется *геометрической величиной типа F*. Множество геометрических величин типа F обозначается $\Gamma(\mathscr{F}) = \Gamma(M, \mathscr{F})$. Если действие $\mathrm{GL}_n^{(k)} : F$ не сводится к действию $\mathrm{GL}_n^{(k-1)} : F$, то говорят, что естественное расслоение (3) имеет порядок k.

Замечание 1.3. Нетрудно заметить, что отображение $\Phi\colon \mathrm{GL}_n^{(k)} \times F \to F$ в (1) определяет действие группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ на F. Тем самым геометрические величины в классическом понимании суть координатные представления сечений естественного расслоения $\mathscr{F}$. В большинстве приложений F является открытым $\mathrm{GL}_n^{(k)}$-инвариантным подмножеством векторного (соответственно аффинного) пространства, на котором группа $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ действует линейными (соответственно аффинными) преобразованиями.

Пример 1.4. Рассмотрим пространство $F = (\mathbb{K}^n)^{\otimes p} \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes q}$ с естественным действием группы $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n^{(1)}$. Тогда $\mathscr{F} = \mathscr{T}^{p,q}$ есть расслоение тензоров типа (p, q). Всякое естественное расслоение $\mathscr{F}$ порядка один такое, что F есть линейное пространство, а действие $\mathrm{GL}_n : F$ является рациональным линейным представлением, вкладывается в сумму расслоений вида $\mathscr{T}^{p,q}$ для некоторых p, q. По этой причине такие расслоения называют *тензорными расслоениями*.

Пример 1.5 (см. [9; гл. 6, § 4]). Для естественного расслоения $\mathscr{F} \to M$ порядка k l-струи его локальных сечений образуют расслоение l-струй $\mathscr{F}^{(l)}$. Расслоение $\mathscr{F}^{(l)}$ является естественным расслоением порядка $k+l$. Всякое сечение $f\colon M \to \mathscr{F}$ расслоения $\mathscr{F}$ определяет сечение $J^l f\colon M \to \mathscr{F}^{(l)}$ расслоения $\mathscr{F}^{(l)}$. А именно, значение сечения $J^l f$ в точке $z \in M$ есть l-струя $J^l_z f$ сечения f в z. Формулы перехода для локальных представлений сечений расслоения $\mathscr{F}$ определяют действие группы $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$ на типичном слое $F^{(l)}$ расслоения $\mathscr{F}^{(l)}$. А именно, для ростка диффеоморфизма g в $0 \in \mathbb{K}^n$ и ростка сечения $f\colon \mathbb{K}^n \to F$ в $0 \in \mathbb{K}^n$ имеем

$$J_0^{k+l} g \cdot J_0^l f = J_0^l\bigl(J^k_{g^{-1}(x)} g \cdot f(g^{-1}(x))\bigr). \tag{4}$$

Рассмотрим важный частный случай, когда типичный слой F является векторным пространством. В этом случае $F^{(l)} = J_n^{(l)} \otimes F$. Отметим, что представление $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : F^{(l)}$ не является тензорным произведением представлений $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : J_n^{(l)}$ и $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : F$. Элементы пространства $F^{(l)}$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n \to F$ вида

$$x \mapsto f(x) = f_1(x) + f_2(x, x) + \dots + f_l(x, \dots, x),$$
$$x = (x^1, \dots, x^n), \qquad f_p \in \mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*} \otimes F, \quad p = 1, \dots, l.$$

Заметим, что пространство геометрических объектов фиксированного типа определено над любым n-мерным многообразием. Это позволяет определить геометрические объекты, используя язык теории категорий [10]. А именно, рассмотрим категорию $\mathscr{M}an_n$ n-мерных многообразий и категорию $\mathscr{F}ib_n$ расслоений над n-мерными многообразиями. Морфизмами в категории $\mathscr{M}an_n$ являются открытые вложения, а морфизмами в категории $\mathscr{F}ib_n$ являются дифференцируемые отображения расслоений, для которых соответствующие отображения баз являются открытыми вложениями (т.е. морфизмами в категории $\mathscr{M}an_n$).

Определение 1.6. *Тип геометрических объектов* – это функтор

$$\mathfrak{F}\colon \mathscr{M}an_n \rightsquigarrow \mathscr{F}ib_n$$

такой, что

1) для любого многообразия M расслоение $\mathfrak{F}(M)$ является расслоением над M;
2) для любого открытого подмногообразия M' многообразия M расслоение $\mathfrak{F}(M')$ является ограничением на M' расслоения $\mathfrak{F}(M)$;
3) если $M' \to M$ есть открытое вложение, то соответствующий морфизм расслоений $\mathfrak{F}(M') \to \mathfrak{F}(M)$ есть индуцированное вложение.

Пусть $\mathfrak{F}$ – такой функтор. Тогда $\mathfrak{F}(M) \to M$ является естественным расслоением для любого многообразия M. Действительно, из определения типа геометрических объектов вытекает, что существует многообразие F (типичный слой) такое, что для всякого многообразия M все слои расслоения $\mathfrak{F}(M) \to M$ изоморфны F. Рассмотрим произвольный росток диффеоморфизма g окрестности $0 \in \mathbb{K}^n$ на окрестность $0 \in \mathbb{K}^n$. Для достаточно малой окрестности $0 \in U \subset \mathbb{K}^n$ росток g определяет диффеоморфизм

$$\mathfrak{F}(g|_U)\colon \mathfrak{F}(U) \simeq U \times F \to \mathfrak{F}(g(U)) \simeq g(U) \times F.$$

Согласованное семейство диффеоморфизмов $\{\mathfrak{F}(g|_U)\}$ определяет диффеоморфизм $\mathfrak{F}(g)\colon F \simeq \{0\} \times F \to F$. Пале и Чу-Лян Тэн в [10] доказали, что диффеоморфизм $\mathfrak{F}(g)$ полностью определяется k-струей $J_0^k g$ для некоторого k, зависящего только от $\mathfrak{F}$. Используя это, мы можем определить действие $\mathrm{GL}_n^{(k)} : F$ и изоморфизм $\mathfrak{F}(M) \simeq (\mathrm{Fr}^k(M) \times F)/\mathrm{GL}_n^{(k)}$.

Лемма 1.7. *Рассмотрим представление $R\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}(F)$ и пусть $\rho\colon \mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}(F)$ – соответствующее представление алгебры Ли. Тогда действия $\mathrm{GL}_n^{(k+1)} : F^{(k)}$ и $\mathfrak{gl}_n^{(k+1)} : F^{(k)}$ задаются следующими формулами:*

$$(g \cdot f)(x) = J_0^k\biggl(R\biggl(\sum_{l=1}^{k+1} l \cdot g_l\bigl(g^{-1}(x), \dots, g^{-1}(x), \cdot\bigr)\biggr) f(g^{-1}(x))\biggr),$$

$$(\xi \cdot f)(x) = J_0^k\biggl(\sum_{l=1}^{k+1} l \cdot \rho(\xi_l(x, \dots, x, \cdot)) f(x) - \sum_{l=1}^{k} l \cdot f_l(x, \dots, x, \xi(x))\biggr),$$

где $g \in \mathrm{GL}_n^{(k+1)}$, $\xi \in \mathfrak{gl}_n^{(k+1)}$, $f \in F^{(k)}$, а $g_l, \xi_l \in \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$ и $f_l \in \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes F$ являются однородными компонентами тензоров g, ξ и f.

Лемма получается из (4) непосредственными вычислениями. Прямым вычислением получаем

Следствие 1.8. *Имеет место формула*

$$(\xi \cdot f)_k = \sum_{l=1}^{k+1} l\gamma(\xi_l \otimes f_{k+1-l}) - (k+1-l)\sigma(\xi_l \otimes f_{k+1-l}), \tag{5}$$

где линейные отображения

$$\gamma, \sigma\colon \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \otimes \mathrm{S}^{k+1-l}\mathbb{K}^{n*} \otimes F \to \mathrm{S}^k\mathbb{K}^{n*} \otimes F$$

определяются следующим образом. Для вычисления γ рассмотрим $\mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$ как подпространство пространства $\mathrm{S}^{l-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathfrak{gl}_n$, применим тензорный множитель из $\mathfrak{gl}_n$ к тензорному множителю из F посредством ρ и перемножим тензорные множители из $\mathrm{S}^{l-1}\mathbb{K}^{n*}$ и $\mathrm{S}^{k+1-l}\mathbb{K}^{n*}$ в симметрической алгебре. Отображение σ есть свертка тензорных множителей из $\mathbb{K}^n$ и $\mathrm{S}^{k+1-l}\mathbb{K}^{n*}$ с последующим перемножением тензорных множителей из $\mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*}$ и $\mathrm{S}^{k-l}\mathbb{K}^{n*}$ в симметрической алгебре.

1.2. Дифференциальные операции.

Определение 1.9. Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W} \to M$ – естественные расслоения. Отображение

$$D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(W)$$

называется дифференциальной операцией порядка не выше k, если в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$, определенных в окрестности $U \subset M$, над которой расслоения $\mathscr{V}$, $\mathscr{W} \to M$ тривиальны, имеем

$$D(s)_U(x) = \delta_U(x, J_x^k s_U),$$

где $s_U : U \to V$ – локальный представитель в U сечения $s \in \Gamma(\mathscr{V})$, $D(s)_U : U \to W$ – локальный представитель в U сечения $D(s) \in \Gamma(\mathscr{W})$, а $\delta_U : U \times V^{(k)} \to W$ – дифференцируемое отображение.

Таким образом, дифференциальная операция порядка не выше k – это отображение $D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$, соответствующее морфизму $D\colon \mathscr{V}^{(k)} \to \mathscr{W}$ (который обозначают той же буквой). А именно, $(Ds)(z) = D(J_z^k s)$ для любого $s \in \Gamma(\mathscr{V})$, $z \in M$ [9; гл. 6, п. 4.6]. Порядок операции D равен k, если D не пропускается через каноническую проекцию $\mathscr{V}^{(k)} \to \mathscr{V}^{(k-1)}$. Операция D естественным образом определяет серию дифференциальных операций $D\colon \mathscr{V}^{(k+l)} \to \mathscr{W}^{(l)}$ (которые обозначают той же буквой).

Определение 1.10. Рассмотрим случай, когда V, W являются открытыми (в топологии Зариского) $\mathrm{GL}_n^{(l)}$-инвариантными подмножествами аффинных $\mathrm{GL}_n^{(l)}$-инвариантных подмногообразий $V' \subseteq V''$, $W' \subseteq W''$, где V'', W'' являются векторными или аффинными пространствами, в которых определены линейные или аффинные представления $\mathrm{GL}_n^{(l)} : V'', W''$. В этом случае дифференциальная операция $D\colon \mathscr{V}^{(k)} \to \mathscr{W}$ называется *алгебраической*, если в определении 1.9 при фиксированном $x \in X$ отображение $\delta_X(x, \cdot\,)\colon V^{(k)} \to W$ рационально, причем степени числителей и знаменателей ограничены на M.

Всякую алгебраическую дифференциальную операцию D можно рассматривать как геометрический объект. Объясним это в простейшем случае, когда V

и W являются векторными пространствами. В этом случае все отображения $\delta_X(x,\cdot)$ являются полиномиальными отображениями степени не выше d. Множество $\mathrm{Mor}_d(V^{(k)},W)$ полиномиальных отображений $V^{(k)}\to W$ степени не выше d является векторным пространством с естественным действием группы $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$. Таким образом, операция D естественным образом идентифицируется с сечением естественного расслоения

$$\mathrm{Fr}^{k+l}(M)\times^{\mathrm{GL}_n^{(k+l)}}\mathrm{Mor}_d(V^{(k)},W)\to M.$$

Пример 1.11. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ – векторные расслоения. Тогда множество линейных дифференциальных операций вида $D\colon\Gamma(\mathscr{V})\to\Gamma(\mathscr{W})$ и порядка не выше k идентифицируется с множеством сечений расслоения

$$\mathscr{D}^k(\mathscr{V},\mathscr{W}):=\big(\mathrm{Fr}^{k+l}(M)\times(V^{(k)*}\otimes W)\big)/\mathrm{GL}_n^{(k+l)}\to M.$$

Пример 1.12. Линейные связности на многообразии M являются геометрическими объектами порядка два. Действительно, рассмотрим касательное расслоение $\mathscr{T}=\mathscr{T}^{1,0}$ над M и пусть $\mathscr{C}$ есть подрасслоение расслоения $\mathscr{D}^1(\mathscr{T},\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}^*)$, состоящее из гомоморфизмов ∇, расщепляющих следующую точную последовательность

$$0\longrightarrow\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}^*\underset{\underset{\nabla}{\dashleftarrow}}{\longrightarrow}\mathscr{T}^{(1)}\longrightarrow\mathscr{T}\longrightarrow 0.$$

Тогда сечение $\nabla\in\Gamma(\mathscr{C})$ действует на векторных полях как ковариантное дифференцирование, т.е. определяет связность. А именно,

$$\nabla\xi(z)=\nabla(\xi_0^i\partial_i)+\nabla(\xi_j^i x^j\partial_i)=\Gamma_{ij}^k\xi_0^i\partial_k\otimes dx^j+\xi_j^i\partial_i\otimes dx^j,\tag{6}$$

где $\xi(x)=\xi_0+\xi_j x^j+\cdots$. И наоборот, связность ∇ определяет сечение расслоения $\Gamma(\mathscr{C})$ по формуле (6).

1.3. Естественные дифференциальные операции. Грубо говоря, естественная дифференциальная операция – это операция, которая задается одной (универсальной) формулой во всех локальных системах координат.

Определение 1.13. Пусть $\mathscr{V},\mathscr{W}\to M$ – естественные расслоения. Дифференциальная операция $D\colon\Gamma(\mathscr{V})\to\Gamma(W)$ порядка не выше k называется *естественной*, если в локальных координатах $x=(x^1,\dots,x^n)$, определенных в окрестности $U\subset M$, над которой расслоения $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}\to M$ тривиальны, имеем

$$D(s)_U(x)=\delta(J_x^k s_U),$$

где s_U – локальный представитель сечения $s\in\Gamma(\mathscr{V})$ в X, $D(s)_U$ – локальный представитель сечения $D(s)\in\Gamma(\mathscr{W})$ в U, а $\delta\colon V^{(k)}\to W$ – дифференцируемое отображение, не зависящее от x.

Из определения вытекает, что отображение δ $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$-эквивариантно в предположении, что расслоения $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ имеют порядок не выше l.

Рассмотрим, например, случай, когда V,W – линейные пространства, $\mathrm{GL}_n : V,W$ – линейные представления. В этом случае отображение $\delta\colon V^{(k)}\to W$

определяет естественную дифференциальную операцию тогда и только тогда, когда оно $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-эквивариантно.

Из определения следует, что всякая естественная дифференциальная операция D определена на геометрических величинах данного типа на всех n-мерных многообразиях. Это обстоятельство позволяет дать функториальное определение естественных дифференциальных операций. А именно, пусть $\mathfrak{F}$ – тип геометрических объектов. Для всякого многообразия M рассмотрим пространство сечений $\Gamma(\mathfrak{F}(M))$ как топологическое пространство (топология задается локально равномерной сходимостью сечений со всеми их частными производными). Тип $\mathfrak{F}$ определяет контравариантный функтор

$$\Gamma_F\colon \mathscr{M}an_n \rightsquigarrow \mathscr{T}op, \qquad M \mapsto \Gamma(\mathfrak{F}(M)),$$

где $\mathscr{T}op$ – категория топологических пространств. Тогда естественная дифференциальная операция $D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$ определяет естественное преобразование функторов: для любого открытого вложения $M' \hookrightarrow M$ имеем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M,\mathscr{V}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(M,\mathscr{W}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(M',\mathscr{V}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(M',\mathscr{W}). \end{array}$$

И наоборот, при некоторых условиях естественное преобразование функторов геометрических величин задается естественной дифференциальной операцией (теорема Петре, см. [7; гл. 5]).

Рассмотрим естественные алгебраические дифференциальные операции порядка не выше k (см. определение 1.10). Они задаются всюду определенными $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$-эквивариантными рациональными отображениями $\delta\colon V^{(k)} \to W$. Изучение таких операций является чисто алгебраической задачей, которую можно решать методами теории инвариантов. Такой подход к изучению алгебраических дифференциальных операций мы называем *методом IT-редукции*. В настоящей работе мы рассматриваем естественные алгебраические дифференциальные операции, действующие на сечения тензорных расслоений. Они задаются рациональными отображениями $\delta\colon J_n^{(k)} \otimes V \to W$, которые GL_n-эквивариантны и $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$-инвариантны. Здесь V, W — рациональные представления GL_n, а $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ действует на $J_n^{(k)} \otimes V = V^{(k)}$ естественным образом (см. лемму 4).

Пример 1.14. Классическим примером естественной алгебраической дифференциальной операции является внешний дифференциал $d\colon \Gamma(\Omega^m) \to \Gamma(\Omega^{m+1})$, где $\Omega^m = \bigwedge^m \mathscr{T}^*$ есть расслоение внешних m-форм. Соответствующее отображение

$$\delta\colon J_n^{(1)} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} = \left(\mathbb{K} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}\right) \oplus \left(\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}\right) \to \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \to \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть композиция проекции и альтернирования.

Пример 1.15. Пусть $\mathscr{T}$ – касательное расслоение, $\mathscr{V}$ – произвольное тензорное расслоение, соответствующее линейному представлению $\mathrm{GL}_n : V$. Производная Ли есть естественная билинейная дифференциальная операция вида

$D\colon \Gamma(\mathscr{T}\times\mathscr{V})\to\Gamma(\mathscr{V})$ порядка один. Она соответствует отображению

$$\delta\colon \bigl(\mathbb{K}^n\oplus(\mathbb{K}^{n*}\otimes\mathbb{K}^n)\bigr)\times\bigl(V\oplus(\mathbb{K}^{n*}\otimes V)\bigr)\to V,$$
$$(\xi_0+\xi_1,v_0+v_1)\mapsto\rho(\xi_1)v_0-\sigma(\xi_0\otimes v_1),$$

где ρ есть представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n\simeq\mathbb{K}^{n*}\otimes\mathbb{K}^n$ в V, а σ есть свертка $\mathbb{K}^n$ с $\mathbb{K}^{n*}$.

1.4. Представления и инварианты классических групп. Напомним некоторые факты теории представлений классических групп (см. [11], [12]).

Разбиением называется нестрого убывающая последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_1\geqslant\dots\geqslant\lambda_n\geqslant0$. *Длина разбиения* – это количество $\lambda_i\neq0$, а $|\lambda|=\lambda_1+\dots+\lambda_n$. Фрагменты вида $d,\dots,d$ (s раз) в λ часто записываются в виде d^s. Определение *виртуального разбиения* получается, если опустить условие $\lambda_n\geqslant0$.

Функтор Шура, отвечающий разбиению λ, обозначается через $\mathbb{S}^\lambda$. Он сопоставляет каждому векторному пространству V подпространство $\mathbb{S}^\lambda V\subset V^{\otimes|\lambda|}$, которое строится следующим образом. Можно считать, что тензорные сомножители $V^{\otimes|\lambda|}$ нумеруются клетками диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ. Тогда $\mathbb{S}^\lambda V$ получается из $V^{\otimes|\lambda|}$ применением сначала симметризации по каждой строке диаграммы Юнга (обозначаемой через Sym_λ), а затем альтернирования по каждому столбцу диаграммы Юнга (обозначаемого через Alt_λ).

$\mathbb{S}^\lambda V$ – неприводимый полиномиальный $\mathrm{GL}(V)$-модуль, линейно порожденный тензорами вида

$$\mathrm{Alt}_\lambda(v_1^{\otimes\lambda_1}\otimes\dots\otimes v_n^{\otimes\lambda_n}),\qquad v_1,\dots,v_n\in V.$$

Всякий рациональный $GL(V)$-модуль разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей, изоморфных $\mathbb{S}^\lambda V\otimes\det^d$, $d\in\mathbb{Z}$.

В наших рассмотрениях будет удобнее реализовывать неприводимые рациональные GL_n-модули в виде $\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*}\otimes\det^d$. Такой модуль однозначно с точностью до изоморфизма определяется виртуальным разбиением $\overline{\lambda}=(\overline{\lambda}_1,\dots,\overline{\lambda}_n)$, $\overline{\lambda}_i=\lambda_i-d$. Он содержит единственные с точностью до пропорциональности собственные векторы по отношению к противоположным нижне- и верхнетреугольным борелевским подгруппам $B^-,B^+\subset\mathrm{GL}_n$, а именно,

$$v_\lambda^-=\mathrm{Alt}_\lambda\bigl((x^1)^{\otimes\lambda_1}\otimes\dots\otimes(x^n)^{\otimes\lambda_n}\bigr),$$
$$v_\lambda^+=\mathrm{Alt}_\lambda\bigl((x^n)^{\otimes\lambda_1}\otimes\dots\otimes(x^1)^{\otimes\lambda_n}\bigr).$$

Вектор v_λ^- (соответственно v_λ^+) называется младшим (соответственно старшим) весовым вектором. Заметим, что $v_\lambda^\pm$ порождает $\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*}\otimes\det^d$ как $B^\mp$-модуль.

Всякий неприводимый SL_n-модуль изоморфен $\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*}$, где $\lambda_n=0$.

Пусть $n=2m$ четно. Мы рассматриваем группу Sp_n как подгруппу в GL_n, являющуюся стабилизатором 2-формы

$$\omega_0=x^1\wedge x^n+x^2\wedge x^{n-1}+\dots+x^m\wedge x^{m+1}.\tag{7}$$

Неприводимые представления Sp_n параметризуются разбиениями λ длины $l\leqslant m$ и реализуются в подпространствах $\mathbb{S}^{\langle\lambda\rangle}\mathbb{K}^{n*}\subset\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*}$, порожденных тензорами вида

$$\mathrm{Alt}_\lambda\bigl((y_1)^{\otimes\lambda_1}\otimes\dots\otimes(y_l)^{\otimes\lambda_l}\bigr),$$

где $y_1, \dots, y_l$ порождают изотропное подпространство в $\mathbb{K}^{n*}$. Векторы $v_\lambda^\pm$ являются собственными для борелевских подгрупп $B^\pm \cap \mathrm{Sp}_n$. Вектор v_λ^- (соответственно v_λ^+) называется *младшим* (соответственно *старшим*) *весовым вектором*, причем $v_\lambda^\pm$ порождает $\mathbb{S}^{\langle\lambda\rangle}\mathbb{K}^{n*}$ как $B^\mp \cap \mathrm{Sp}_n$-модуль.

Формулы Пьери.

$$\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathrm{S}^k\mathbb{K}^{n*} \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda',\ |\lambda'|=|\lambda|+k\\ \lambda'_i\geqslant\lambda_i\geqslant\lambda'_{i+1}}} \mathbb{S}^{\lambda'}\mathbb{K}^{n*} \qquad (\text{как } \mathrm{GL}_n\text{-модули}),$$

$$\mathbb{S}^{\langle\lambda\rangle}\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathrm{S}^k\mathbb{K}^{n*} \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda',\mu,\ |\mu|=|\lambda|-p\\ |\lambda'|=|\mu|+k-p,\ p\leqslant k\\ \lambda_i,\lambda'_i\geqslant\mu_i\geqslant\lambda_{i+1},\lambda'_{i+1}}} \mathbb{S}^{\langle\lambda'\rangle}\mathbb{K}^{n*} \qquad (\text{как } \mathrm{Sp}_n\text{-модули}).$$

В более наглядных терминах диаграммы Юнга всевозможных λ' получаются из диаграммы Юнга λ вначале удалением p клеток справа из некоторых строк ($p = 0$ в случае GL_n), а затем добавлением $k - p$ клеток справа в некоторые строки так, чтобы горизонтальные положения убранных или добавленных клеток в каждой строке не перекрывались с аналогичными в других строках и с нижними строками.

Алгебраическое исследование естественных дифференциальных операций на тензорных расслоениях использует полиномиальные отображения между различными пространствами тензоров, эквивариантные по отношению к классическим группам. Эти отображения могут быть описаны с помощью классической теории инвариантов.

Теорема 1.16. *Пусть $V_1, \dots, V_s, W$ – тензорные пространства над $\mathbb{K}^n$, $G \subset \mathrm{GL}_n$ – одна из классических подгрупп (т.е. G есть GL_n, SL_n, O_n, SO_n, или Sp_n), $\Phi\colon V_1 \times \dots \times V_s \to W$ – полиномиальное G-отображение. Тогда Φ является линейной комбинацией отображений вида*

$$\varphi(v_1, \dots, v_s) = P\bigl(C(v_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes v_s^{\otimes d_s} \otimes T_1^{\otimes a_1} \otimes \dots \otimes T_l^{\otimes a_l})\bigr),$$

где $T_1, \dots, T_l$ – базисные инвариантные тензоры группы G, $d_1, \dots, d_s$, $a_1, \dots, a_l$ – целые неотрицательные числа, C – свертка по некоторым индексам, P – перестановка индексов.

Для группы GL_n базисным тензором является тензор $\delta = e_i \otimes x^i$, а для группы Sp_n базисными тензорами являются ω_0 и двойственный ему тензор

$$\omega_0^* = e_1 \wedge e_n + \dots + e_m \wedge e_{m+1}.$$

Доказательство теоремы сводится к описанию G-инвариантных полиномиальных функций на $V_1 \times \dots \times V_s \times W^*$, которые линейны по W^*. В этом случае утверждение следует из символического метода классической теории инвариантов [12; п. 9.5]: всякая инвариантная функция получается полной сверткой достаточного количества копий аргументов с базисными тензорами. Свертки по парам индексов из W^* отвечают тензорным умножениям на δ Кронекера, а свертки индексов W^* с индексами $V_1, \dots, V_s$ в различном порядке – перестановкам индексов.

Мы будем использовать следующие линейные Sp_n-эквивариантные отображения

$$(\,\cdot\,) * \omega_0 \colon \mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \to \mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*}$$

(тензорное умножение справа на ω_0 с последующей сверткой по первому верхнему и последнему нижнему индексам) и

$$(\,\cdot\,) * \omega_0^* \colon \mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*} \to \mathrm{S}^{q-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$$

(тензорное умножение справа на ω_0^* с последующей сверткой по первому верхнему и последнему нижнему индексам). Нетрудно проверить, что

$$(\xi * \omega_0^*) * \omega_0 = \xi \tag{8}$$

для любого $\xi \in \mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*}$.

§ 2. Теоремы о конечности и конечной порожденности

Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W. В этом параграфе мы рассматриваем естественные алгебраические дифференциальные операции вида

$$D \colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W}). \tag{9}$$

Они соответствуют полиномиальным $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-отображениям $\delta \colon V^{(k)} \to W$, где $k \geqslant \mathrm{ord}(D)$. Для таких операций мы докажем теорему конечности и теорему о конечной порожденности.

Определим степень $\deg(D)$ операции (9) как степень соответствующего ей полиномиального отображения δ.

Рассмотрим подгруппу гомотетий $\mathbb{K}^\times \subset \mathrm{GL}_n$. Назовем GL_n-модуль U *однородным степени* $[U] = d$, если $t\mathbb{E} \cdot u = t^{-d}u$ для всех $t \in \mathbb{K}^*$, $u \in U$, где $\mathbb{E}$ — единичная матрица. Ясно, что $\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*} \otimes \det^p$ однороден, причем $[\mathbb{S}^\lambda\mathbb{K}^{n*} \otimes \det^p] = |\lambda| - np$.

Теорема 2.1. *Для данных тензорных расслоений $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ существуют вещественные числа A, B такие, что порядок любой естественной алгебраической дифференциальной операции (9) не превосходит $A + B\deg(D)$.*

Следствие 2.2 (см. [13; § 4]). *Для данных тензорных расслоений $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ и $d \in \mathbb{N}$ линейное пространство естественных алгебраических дифференциальных операций (9) степени не выше d конечномерно.*

Доказательство теоремы 2.1. Можно считать, что GL_n-модуль W неприводим. Разложим GL_n-модуль V в прямую сумму неприводимых подмодулей:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m.$$

Из этого разложения получаем разложение $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-модуля

$$V^{(k)} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} \biggl(\bigoplus_{0 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{S}^j\mathbb{K}^{n*} \otimes V_i\biggr). \tag{10}$$

Пусть отображение $\delta\colon V^{(k)} \to W$ имеет степень d. Из разложения (10) следует, что δ разлагается в сумму GL_n-отображений вида

$$\delta_I\colon V^{(k)} \to W,$$
$$(v_{1,0} + \dots + v_{1,k}, \dots, v_{m,0} + \dots + v_{m,k}) \mapsto \Delta_I(v_{i_1,j_1}, \dots, v_{i_p,j_p}),$$

где $1 \leqslant p \leqslant d$, $I = (i_1, j_1; \dots; i_p, j_p)$, $1 \leqslant i_l \leqslant m$, $0 \leqslant j_l \leqslant k$, $v_{i,j} \in \mathrm{S}^j\mathbb{K}^{n*} \otimes V_i$, а

$$\Delta_I\colon (\mathrm{S}^{j_1}\mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_1}) \times \dots \times (\mathrm{S}^{j_p}\mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_p}) \to W$$

есть полилинейное GL_n-отображение. Рассмотрим отображение Δ_I. Так как Δ_I является $\mathbb{K}^\times$-эквивариантным отображением, то

$$\sum_{l=1}^{p} [\mathrm{S}^{j_l}\mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_l}] = [W]$$

или

$$j_1 + \dots + j_p = [W] - \sum_{l=1}^{p} [V_{i_l}]. \tag{11}$$

Положим $A = |[W]|$, $B = \max_l |[V_l]|$. Тогда из (11) получаем, что

$$\max_{\Delta_I \neq 0} \{j_1, \dots, j_m\} \leqslant A + Bd$$

и, следовательно, $k \leqslant A + Bd$. Теорема доказана.

Для GL_n-модуля V положим

$$V_+^{(k)} := \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{S}^i\mathbb{K}^{n*} \otimes V.$$

Имеем разложение в прямую сумму $V^{(k)} = V \oplus V_+^{(k)}$. Для полиномиального отображения $\varphi\colon V^{(k)} \to W$ определим $\deg_+(\varphi)$ как степень отображения φ по координатам, соответствующим прямому слагаемому $V_+^{(k)}$. Для естественной дифференциальной операции $D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$ определим ее степень по частным производным $\deg_+(D) := \deg_+(\delta)$, где δ есть соответствующее операции D полиномиальное отображение.

Отображение $\Phi\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$ называется *тензорной операцией*, если Φ соответствует линейному GL_n-отображению $\varphi\colon V \to W$ (другими словами, Φ является естественной линейной дифференциальной операцией нулевого порядка). Всякая тензорная операция есть линейная комбинация композиций сверток, перестановок индексов и тензорного умножения на дельту Кронекера.

Назовем тензорное расслоение $\mathscr{V}$ *неразложимым*, если его слой V – неприводимый GL_n-модуль.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{V}$ – тензорное расслоение, d, k – натуральные числа. Существует конечное число неразложимых тензорных расслоений $\mathscr{W}_i$ и естественных дифференциальных операций $D_i\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W}_i)$ порядка не выше k и степени по частным производным не выше d таких, что для любого тензорного расслоения $\mathscr{W}$ всякая естественная дифференциальная операция*

$D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$ порядка не выше k и степени по частным производным не выше d может быть представлена в виде

$$D(v) = \sum_{i,p} \Phi_{ip}(v^{\otimes p} \otimes D_i(v)),$$

где каждое $\Phi_{ip}\colon \Gamma(\mathrm{S}^p\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}_i) \to \Gamma(\mathscr{W})$ есть тензорная операция.

Доказательство. Сначала, переходя к струям, мы переформулируем эту теорему следующим образом.

> Существует конечное число GL_n-модулей W_i и полиномиальных $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-отображений
>
> $$\delta_i\colon V^{(k)} \to W_i, \qquad \deg_+(\delta_i) \leqslant d,$$
>
> таких, что всякое полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-эквивариантное отображение $\delta\colon V^{(k)} \to W$, $\deg_+(\delta) \leqslant d$, может быть представлено в виде
>
> $$\delta(v) = \sum_{i,p} \varphi_{ip}(v_0^{\otimes p} \otimes \delta_i(v)), \qquad v = v_0 + v_+ \in V \oplus V_+^{(k)}, \qquad (12)$$
>
> где
>
> $$\varphi_{ip}\colon V^{\otimes p} \otimes W_i \to W$$
>
> есть линейное GL_n-отображение для всех i, p.

Докажем это утверждение.

Обозначим через $\mathbb{K}[V]$ алгебру многочленов от координат на пространстве V. Все полиномиальные функции на $V^{(k)}$ степени не выше d по координатам $V_+^{(k)}$ образуют свободный $\mathbb{K}[V]$-модуль конечного ранга $\mathbb{K}[V] \otimes \mathrm{Mor}_d(V_+^{(k)}, \mathbb{K})$. Функции, инвариантные относительно $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$, образуют GL_n-инвариантный подмодуль $\mathscr{M}$. Всякому отображению δ соответствует линейное GL_n-отображение $\delta'\colon W^* \to \mathscr{M}$.

Модуль $\mathscr{M}$ конечно порожден (как подмодуль конечно порожденного модуля). Выберем конечное число неприводимых GL_n-модулей W_i' и линейных GL_n-отображений $\delta_i'\colon W_i' \to \mathscr{M}$ таких, что $\operatorname{Im} \delta_i'$ порождают $\mathscr{M}$ как $\mathbb{K}[V]$-модуль. Таким образом, канонически определенный гомоморфизм $\mathbb{K}[V]$-модулей

$$\pi\colon \bigoplus_i (\mathbb{K}[V] \otimes W_i') = \bigoplus_{i,p} (\mathrm{S}^p V^* \otimes W_i') \to \mathscr{M}$$

эпиморфен. Каждое линейное отображение δ_i' естественным образом определяет полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-отображение

$$\delta_i\colon V^{(k)} \to (W_i')^* =: W_i,$$

причем $\deg_+(\delta_i) \leqslant d$. Убедимся, что построенные W_i и δ_i удовлетворяют условию теоремы, переформулированному выше на языке струй.

Пусть $\delta\colon V^{(k)} \to W$ – полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-отображение такое, что $\deg_+(\delta) \leqslant d$. Наша задача – найти линейные GL_n-отображения φ_{ip} так, чтобы было выполнено (12). Рассмотрим соответствующее линейное GL_n-отображение $\delta'\colon W^* \to \mathfrak{M}$. Так как группа GL_n редуктивна, то отображение δ' можно поднять до линейного GL_n-отображения

$$\varphi' = \bigoplus_{i,p} \varphi'_{ip}\colon W^* \to \bigoplus_{i,p} (\mathrm{S}^p V^* \otimes W'_i)$$

такого, что $\delta' = \pi \circ \varphi'$. Каждое отображение φ'_{ip} канонически определяет линейное GL_n-отображение $\varphi_{ip}\colon V^{\otimes p} \otimes W_i \to W$. Нетрудно заметить, что для отображений φ_{ip} выполнено (12).

§ 3. Естественные линейные операции

В этом и следующем параграфах мы приведем основанные на методе IT-редукции доказательства известных теорем о классификации естественных линейных дифференциальных операций на произвольных и на симплектических многообразиях. Оказывается, такие операции по существу сводятся к внешнему дифференцированию.

Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W,

$$D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W}) \tag{13}$$

– естественная линейная дифференциальная операция порядка k. Операция D соответствует линейному $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-отображению

$$\delta\colon V^{(k)} \to W. \tag{14}$$

В случае $k = 0$ операция D является тензорной. В случае $k > 0$ такие операции описываются следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Для всякой операции* (13) *порядка* $k > 0$ *имеется разложение*

$$D = I \circ d \circ P + T,$$

где

$$P\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Omega^*(M), \qquad I\colon \Omega^*(M) \to \Gamma(\mathscr{W})$$

и T *– тензорные операции.*

Замечание 3.2. Обычно эту теорему называют теоремой Схоутена, хотя сам Схоутен сформулировал ее в 1951 году без доказательства. В дальнейшем доказательство было получено сначала для дифференциальных форм (Пале, 1959), затем для произвольных ковариантных тензоров (Лейхер, 1973) и, наконец, в общем случае (Рудаков, 1974; Чу-Лян Тэн, 1976; Кириллов, 1977), см. [13]. Для операций порядка один основанное на IT-редукции доказательство получено Смирновым [14].

Доказательство. Рассмотрим отображение (14), соответствующее операции (13). Поскольку вложения и проекции на неразложимые слагаемые задаются тензорными операциями, то можно считать, что GL_n-модули V, W неприводимы и $V = \mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^d$ соответствует виртуальному разбиению $\overline{\lambda} = \lambda - (d^n)$.

Так как подалгебра $\mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \subset \mathfrak{gl}_n^{(k+1)}$ действует на W тривиально, то

$$\mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \cdot V^{(k)} \subset \operatorname{Ker}(\delta).$$

Кроме того, $(x^n)^k \otimes v_\lambda^-$ (что равно тензорному произведению старшего вектора GL_n-модуля $\mathrm{S}^k\mathbb{K}^{n*}$ и младшего вектора GL_n-модуля V) порождает GL_n-модуль $\mathrm{S}^k\mathbb{K}^{n*} \otimes V$. Поскольку операция имеет порядок k, то

$$(x^n)^k \otimes v_\lambda^- \notin \mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \cdot V^{(k)}. \tag{15}$$

Если $k > 1$, то, используя (5), находим

$$((x^n)^k \otimes e_n) \cdot (x^n \otimes v_\lambda^-) = -(k\overline{\lambda}_n + 1)(x^n)^k \otimes v_\lambda^-.$$

Но это противоречит (15). Следовательно, $k = 1$.

Если $k = 1$ и $\overline{\lambda}_n \neq 0$, то, используя (5), находим

$$((x^n)^2 \otimes e_n) \cdot v_\lambda^- = -2\overline{\lambda}_n x^n \otimes v_\lambda^-.$$

Но это противоречит (15). Следовательно, $\overline{\lambda}_n = 0$.

Если $k = 1$ и $\overline{\lambda}_n = 0$, то, используя (5), находим

$$\begin{gathered}(x^1x^n \otimes e_1) \cdot v_\lambda^- = -\overline{\lambda}_1 x^n \otimes v_\lambda^- - x^1 \otimes v,\\ ((x^1)^2 \otimes e_1) \cdot v = -2(\overline{\lambda}_1 - 1)x^1 \otimes v,\end{gathered}$$

где

$$v \;=\; \sum_{p=1}^{\lambda_1} \mathrm{Alt}_\lambda\big((x^1)^{\otimes(p-1)} \otimes x^n \otimes (x^1)^{\otimes(\lambda_1-p)} \otimes (x^2)^{\otimes\lambda_2} \otimes \dots \otimes (x^n)^{\otimes\lambda_n}\big).$$

При $\overline{\lambda}_1 > 1$ это противоречит (15). Следовательно, $\overline{\lambda}_1 = 0$ или $\overline{\lambda}_1 = 1$.

Остался случай $k = 1$ и $V \simeq \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}$, где $m < n$. В этом случае

$$\mathbb{K}^{n*} \otimes V = \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*}.$$

Так как

$$((x^1)^2 \otimes e_1) \cdot (x^1 \wedge \dots \wedge x^m) = 2x^1 \otimes x^1 \wedge \dots \wedge x^n \in \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*},$$

то для δ остается единственная возможность. А именно,

$$\delta\colon V^{(1)} = \bigwedge^{m}\mathbb{K}^{n*} \oplus \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*} \to \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть каноническая проекция. Такое δ соответствует операции d внешнего дифференцирования (см. пример 1.14).

§ 4. Естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях

4.1. Геометрические структуры. Многообразия часто снабжены дополнительными геометрическими структурами и важно изучать дифференциальные операции, "естественные" по отношению к этим структурам. Есть несколько возможных способов формализовать это понятие. Здесь мы будем использовать следующий способ.

Определение 4.1. *Тип геометрических структур* – это функтор на $\mathscr{M}an_n$, сопоставляющий каждому n-мерному многообразию M подпучок $\mathscr{A} = \mathscr{A}(M)$ в пучке сечений естественного расслоения $\mathscr{F} \to M$ так, что для любого открытого вложения $M' \hookrightarrow M$ пучок $\mathscr{A}(M')$ есть ограничение пучка $\mathscr{A}(M)$. *Геометрическая структура* (данного типа) – это сечение $\alpha \in \Gamma(\mathscr{A})$.

Замечание 4.2. Как правило, $\mathscr{A}$ состоит из локальных сечений, удовлетворяющих некоторой системе естественных дифференциальных уравнений. При этом l-струи локальных сечений из $\mathscr{A}$ образуют $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$-инвариантное подмногообразие $A^{(l)} \subseteq F^{(l)}$, где k – порядок расслоения $\mathscr{F}$.

Пример 4.3. Риманова структура задается сечением расслоения $(\mathrm{S}^2\mathscr{T}^*)^+$ положительно определенных квадратичных форм на касательном расслоении.

Пример 4.4. Симплектическая структура задается сечением ω расслоения $(\Omega^2(M))^{\mathrm{reg}}$ невырожденных 2-форм таким, что $d\omega = 0$. Многообразие M называется *симплектическим*, если на M задана симплектическая структура.

Пример 4.5. Пуассонова структура задается сечением β расслоения $\bigwedge^2 \mathscr{T}$ бивекторов таким, что $[\beta, \beta] = 0$, где $[\beta, \beta] = \beta^{ij}\partial_i\,\beta^{kl}\partial_j \wedge \partial_k \wedge \partial_l$ есть скобка Схоутена. Многообразие M называется *многообразием Пуассона*, если на M задана структура Пуассона.

Симплектическое многообразие является многообразием Пуассона (бивектором Пуассона является двойственный к симплектической 2-форме бивектор). Четномерное многообразие Пуассона с невырожденным в каждой точке бивектором Пуассона является симплектическим многообразием (симплектической 2-формой является двойственная к бивектору Пуассона 2-форма).

Определение 4.6. *Естественная дифференциальная операция* на многообразиях с геометрической структурой типа $\mathscr{A}$ – это операция вида

$$D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \times \Gamma(\mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{W}),$$

где $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ – естественные расслоения, задаваемая в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ формулой

$$D(s, \alpha)(x) = \delta(J_x^k s, J_x^l \alpha),$$

где $\delta\colon V^{(k)} \times A^{(l)} \to W$ – $\mathrm{GL}_n^{(r)}$-эквивариантное (при подходящем r) не зависящее от x дифференцируемое отображение.

Другими словами, Ds зависит от $s \in \Gamma(\mathscr{V})$ и от $\alpha \in \Gamma(\mathscr{A})$ (как от параметра), а также их частных производных (до некоторого порядка) одинаковым образом во всех локальных системах координат.

Мы будем рассматривать алгебраические естественные дифференциальные операции на тензорных расслоениях над многообразиями с естественной геометрической структурой. В этом случае отображение δ полиномиально по $V^{(k)}$ и рационально по $A^{(l)}$. В частном случае, когда $k = 0$ и δ линейно по первому аргументу, такая операция D называется *естественным линейным отображением*.

Пример 4.7. Ковариантное дифференцирование тензорных полей является естественной дифференциальной операцией на римановых многообразиях. Скобка Пуассона функций является естественной дифференциальной операцией на пуассоновых многообразиях.

В присутствии дополнительной геометрической структуры группа координатных преобразований, которые должны сохранять координатное выражение естественной дифференциальной операции, часто может быть уменьшена при помощи следующего стандартного теоретико-инвариантного приема.

Определение 4.8. Пусть группа Ли G действует на многообразии X, $H \subset G$ – подгруппа Ли и Y – некоторое H-инвариантное подмногообразие в X. Подмногообразие Y называется *(G, H)-сечением*, если естественное отображение $G \times^H Y \to X$ является диффеоморфизмом.

В этом случае для любого многообразия Z с действием G мы имеем взаимно однозначное соответствие между G-отображениями $\varphi\colon X \to Z$ и H-отображениями $\psi\colon Y \to Z$. А именно, при этом соответствии $\psi = \varphi\big|_Y$.

Пусть для геометрических структур типа $\mathscr{A}$ существует $(\mathrm{GL}_n^{(r)}, G^{(r)})$-сечение $A_0^{(l)}$ многообразия $A^{(l)}$. Тогда согласно вышесказанному естественные дифференциальные операции на многообразиях с геометрическими структурами типа $\mathscr{A}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $G^{(r)}$-отображениями

$$\widetilde{\delta}\colon V^{(k)} \times A_0^{(l)} \to W.$$

Пример 4.9 (см. [6; §3]). В пространстве k-струй римановых метрик

$$A^{(k)} = (\mathrm{S}^2\mathbb{R}^{n*})^+ \oplus \bigoplus_{l=1}^{k} \mathrm{S}^l\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathrm{S}^2\mathbb{R}^{n*}$$

имеется $(\mathrm{GL}_n^{(k+1)}, \mathrm{GL}_n)$-сечение

$$A_0^{(k)} = (\mathrm{S}^2\mathbb{R}^{n*})^+ \oplus \bigoplus_{l=2}^{k} \operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_{l+1},$$

где $\operatorname{Sym}_{l+1}\colon \mathrm{S}^l\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathrm{S}^2\mathbb{R}^{n*} \to \mathrm{S}^{l+1}\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}$ есть симметризация по первым $l+1$ индексам. Отметим, что $\operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_{l+1} \simeq \mathbb{S}^{(l,2)}\mathbb{R}^{n*}$, а перевод метрики в $A_0^{(k)}$ преобразованием координат есть не что иное как запись метрики в геодезических координатах с центром в данной точке.

4.2. Симплектические структуры. По теореме Дарбу струи симплектических структур образуют однородное пространство, т.е. в качестве сечения может быть взята одна точка. Поучительно дать чисто алгебраическое доказательство этого факта методом IT-редукции.

Формальная лемма Пуанкаре. *Комплекс де Рама*

$$\dots \xrightarrow{d} \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} \mathrm{S}^{l-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} \dots$$

точен.

Доказательство. По формулам Пьери имеем

$$\mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \simeq \mathbb{S}^{(l+1,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(l,1^m)}\mathbb{K}^{n*}.$$

(А именно, $\mathbb{S}^{(l+1,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*} \subset \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}$, а $\mathbb{S}^{(l,1^m)}\mathbb{K}^{n*}$ вкладывается в тензорное произведение слева как $\operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_{l+1}$.) Отображение

$$d\colon \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \to \mathrm{S}^{l-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть не что иное как альтернирование по последним $m+1$ индексам. Оно изоморфно отображает $\mathbb{S}^{(l,1^m)}\mathbb{K}^{n*}$ в $\mathrm{S}^{l-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$, в то время как его ядро $\mathbb{S}^{(l+1,1^{m-1})}\mathbb{K}^{n*}$ – это в точности образ $\mathrm{S}^{l+1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m-1} \mathbb{K}^{n*}$.

Формальная теорема Дарбу. *Всякая струя* $\omega(x) = \omega_0 + \omega_1(x) + \dots + \omega_k(x,\dots,x) \in J_n^{(k)} \otimes \bigwedge^2 \mathbb{K}^{n*}$ *такая, что форма* ω_0 *невырождена и* $d\omega = 0$, *является* $GL_n^{(k+1)}$*-эквивалентной* ω_0.

Доказательство. Применяя преобразования $x \mapsto x + g_m(x,\dots,x)$ из $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ к $\omega(x)$ последовательно при $m = 2,\dots,k+1$, добьемся исчезновения непостоянных членов $\omega_1(x),\dots,\omega_k(x)$ струи $\omega(x)$. Допустим, что $\omega_l(x) = 0$ для всех $1 \leqslant l \leqslant m-2$, где $2 \leqslant m \leqslant k$. Для $g = x + g_m(x,\dots,x)$ имеем

$$\begin{aligned}(g\cdot\omega)(x) &= \omega(x) + m\rho(g_m(x,\dots,x,\,\cdot\,))\omega_0\\ &= \omega(x) + m\gamma(g_m \otimes \omega_0) = \omega(x) + d(g_m * \omega_0)\end{aligned}$$

(мы используем лемму 1.7 и следствие из нее). Таким образом, ω_{m-1} можно преобразовать, прибавив к нему любой элемент образа сквозного отображения

$$\mathrm{S}^m\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{*\omega_0} \mathrm{S}^m\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} \mathrm{S}^{m-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^2 \mathbb{K}^{n*}. \tag{16}$$

Согласно формальной лемме Пуанкаре образ сквозного отображения (16) состоит из замкнутых форм. Следовательно, ω_{m-1} можно преобразовать в нуль.

Действуя группой GL_n, можно привести форму ω_0 к виду (7). Ее стабилизатором в группе $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ является группа $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$ k-струй симплектоморфизмов $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ в нуль. Ее разложение Леви имеет вид $\mathrm{Sp}_n^{(k)} = \mathrm{Sp}_n \leftthreetimes \mathrm{NSp}_n^{(k)}$, где Sp_n – подгруппа Леви, а $\mathrm{NSp}_n^{(k)} = \mathrm{Sp}_n^{(k)} \cap \mathrm{NGL}_n^{(k)}$ – унипотентный радикал.

Согласно формальной теореме Дарбу $\{\omega_0\}$ является $(\mathrm{GL}_n^{(k+1)}, \mathrm{Sp}_n^{(k+1)})$-сечением многообразия k-струй симплектических форм. Следовательно, естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathrm{Sp}_n^{(k+1)}$-отображениями $\delta\colon V^{(q)} \to W$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, описывающая алгебру Ли $\mathfrak{sp}_n^{(k)}$ группы $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$.

Лемма 4.10. *Элемент* $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \in \mathfrak{sp}_n^{(k)}$ *тогда и только тогда, когда* $\xi_l * \omega_0 \in \mathrm{S}^{l+1}\mathbb{K}^{n*}$ *для* $l = 1, \dots, k$ *(в частности,* $\xi_1 \in \mathfrak{sp}_n$*).*

Доказательство. Используя следствие леммы 1.7, получаем

$$\xi \cdot \omega_0 = d(\xi * \omega_0) = \sum_{l=1}^{k} d(\xi_l * \omega_0) = 0$$

тогда и только тогда, когда $d(\xi_l * \omega_0) = 0$ для $l = 1, \dots, k$. Теперь лемма следует из того, что $\xi_l * \omega_0 \in \mathrm{S}^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*} \simeq \mathrm{S}^{l+1}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(l,1)}\mathbb{K}^{n*}$, где первое прямое слагаемое есть в точности $\operatorname{Ker} d$.

Из этой леммы и (8) получаем

Следствие 4.11. *Отображение*

$$\bigoplus_{l=2}^{k} \mathrm{S}^{l+1}\mathbb{K}^{n*} \to \mathfrak{nsp}_n^k, \qquad f_3 + \dots + f_{k+1} \mapsto f_3 * \omega_0^* + \dots + f_{k+1} * \omega_0^*$$

является изоморфизмом векторных пространств.

Замечание 4.12. Имеется другой подход к изучению естественных дифференциальных операций на симплектических многообразиях. При этом подходе сначала определяются (главные) расслоения $\mathrm{SFr}^k(M) \to M$ симплектических корепepов порядка k. Эти расслоения состоят из k-струй локальных систем координат $x = (x^1, \dots, x^n)$, в которых $\omega(x) = \omega_0$. Затем определяются ассоциированные (симплектические) расслоения $\mathscr{F} = \mathrm{SFr}^k(M) \times^{\mathrm{Sp}_n^{(k)}} F$, где $\mathrm{Sp}_n^{(k)} : F$ – дифференцируемое действие. (Заметим, что если действие $\mathrm{Sp}_n^{(k)} : F$ расширяется до действия $\mathrm{GL}_n^{(k)} : F$, то $\mathscr{F} \simeq \mathrm{SFr}^k(M) \times^{\mathrm{Sp}_n^{(k)}} \mathrm{GL}_n^{(k)} \times^{\mathrm{GL}_n^{(k)}} F \simeq \mathrm{Fr}^k(M) \times^{\mathrm{GL}_n^{(k)}} F$ является естественным расслоением в смысле 1.1.) Наконец, естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях определяются как операции вида $D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W})$, где $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ – симплектические расслоения, причем D одинаково записывается во всех симплектических локальных системах координат. Это эквивалентно тому, что отображение струй $\delta\colon V^{(k)} \to W$ является $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$-отображением.

4.3. Линейные операции. Теперь на основе метода IT-редукции мы получим описание естественных линейных дифференциальных операций на симплектических многообразиях. Впервые это описание было получено более сложным методом Рудаковым (см. [8]) в процессе изучения неприводимых представлений некоторых бесконечномерных алгебр Ли.

Напомним, что на n-мерном симплектическом многообразии имеется канонический изоморфизм $i_m\colon \Omega^m \to \Omega^{n-m}$. Положим

$$d^* = i_{n-m+1} \circ d \circ i_m\colon \Gamma(\Omega^m) \to \Gamma(\Omega^{m-1}).$$

Рассмотрим естественную линейную дифференциальную операцию

$$D\colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\mathscr{W}) \tag{17}$$

порядка q на n-мерных симплектических многообразиях, где $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W. Операция D соответствует линейному $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$-отображению $\delta\colon V^{(q)} \to W$, где $k > q$. В случае $q = 0$ операция D является тензорной (т.е. δ является линейным Sp_n-отображением $V \to W$, см. теорему 1.16). В случае $q > 0$ такие операции описываются следующей теоремой.

Теорема 4.13. *Для операции* (17) *порядка* $q > 0$ *имеется разложение*

$$D = I_1 \circ d \circ P_1 + I_2 \circ dd^* \circ P_2 + T,$$

где

$$P_i \colon \Gamma(\mathscr{V}) \to \Gamma(\Omega^\bullet), \qquad I_i \colon \Gamma(\Omega^\bullet) \to \Gamma(\mathscr{W})$$

и T *– тензорные операции.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $V = \mathbb{S}^{\langle\lambda\rangle}\mathbb{K}^{n*}$. Так же как в доказательстве теоремы 3.1, имеем включение

$$\mathfrak{nsp}_n^{(k)} \cdot V^{(q)} \subset \operatorname{Ker}(\delta). \tag{18}$$

Рассмотрим случай $q > 1$, $\lambda_1 \neq 1$. Для

$$\begin{aligned} \xi &= (x^n)^{q+1}, & v &= x^1 \otimes v_\lambda^-, \\ \xi' &= (q+1)x^1(x^n)^q, & v' &= x^n \otimes v_\lambda^-, \end{aligned}$$

используя (5), вычисляем

$$\begin{aligned} (\xi * \omega_0^*) \cdot v &= (x^n)^q \otimes v_\lambda^- + qx^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \\ (\xi' * \omega_0^*) \cdot v' &= (q\lambda_1 - 1)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + q(q-1)x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{v} = \sum_{p=1}^{\lambda_1} \operatorname{Alt}_\lambda\bigl((x^1)^{\otimes(p-1)} \otimes x^n \otimes (x^1)^{\otimes(\lambda_1-p)} \otimes (x^2)^{\otimes\lambda_2} \cdots \otimes (x^{n/2})^{\otimes\lambda_{n/2}}\bigr).$$

Отсюда получаем $0 \neq q(\lambda_1 - 1)x^n \otimes v_\lambda^- \in ((\mathrm{S}^{q+1}\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (\mathbb{K}^{n*} \otimes V)$. Но это противоречит (18), так как $x^n \otimes v_\lambda^-$ (тензорное произведение старшего и младшего векторов) порождает $\mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*} \otimes V$ как Sp_n-модуль.

Рассмотрим случай, когда $q = 1$, $\lambda_1 > 1$ или $q > 2$, $\lambda_1 = 1$. Для

$$\begin{aligned} \xi &= 3x^1(x^n)^2, & v &= (x^n)^{q-1} \otimes v_\lambda^-, \\ \xi' &= 3(x^1)^2 x^n, & v' &= (x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \end{aligned}$$

используя (5), вычисляем

$$\begin{aligned} (\xi * \omega_0^*) \cdot v &= (2\lambda_1 + 1 - q)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + 2x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \\ (\xi' * \omega_0^*) \cdot v' &= -2\lambda_1(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + 2(\lambda_1 - 1 - q)x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $(\lambda_1+1-q)(2\lambda_1-1-q)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- \in ((\mathrm{S}^3\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (\mathrm{S}^{q-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes V)$. Аналогично предыдущему, этот случай также невозможен.

Остался случай $\lambda = (1^m)$, $q \leqslant 2$.

Для $q = 1$ имеем

$$\mathbb{K}^{n*} \otimes V \simeq \mathbb{S}^{\langle 1^{m-1} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 1^{m+1} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-1} \rangle}\mathbb{K}^{n*}.$$

Проекция на первое прямое слагаемое соответствует оператору d^*, проекция на второе – оператору d. Нетрудно проверить, что третье прямое слагаемое совпадает с $((\mathrm{S}^3\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot V$.

Для $q = 2$ Sp_n-модуль $\mathrm{S}^2\mathbb{K}^{n*} \otimes V$ изоморфен

$$\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 1^{m} \rangle}\mathbb{K}^{n*}.$$

Докажем, что

$$\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle}\mathbb{K}^{n*} \subset ((\mathrm{S}^3\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (\mathbb{K}^{n*} \otimes V). \tag{19}$$

Действительно, для $i < n$ имеем

$$((x^1)^3 * \omega_0^*) \cdot \bigl(x^i \otimes (x^n \wedge x^2 \wedge \dots \wedge x^m)\bigr) = -2x^1 x^i \otimes (x^1 \wedge \dots \wedge x^m) =: w.$$

При $i = 1$ элемент w является младшим вектором в $\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle}\mathbb{K}^{n*}$. Отсюда следует включение (19) для первого прямого слагаемого. При $i = m + 1$ инвариантный проектор $\mathrm{Alt}_{(2,1^m)}$ отображает w в младший вектор

$$(-1)^{m+1} x^1 \otimes x^1 \wedge \dots \wedge x^{m+1} \in \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m} \rangle}\mathbb{K}^{n*}.$$

Отсюда следует включение (19) для второго прямого слагаемого. Для $i = n + 1 - m$ свертка w с ω_0^* по первому и последнему индексам даст

$$x^1 \otimes x^1 \wedge \dots \wedge x^{m-1} \in \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle}\mathbb{K}^{n*}.$$

Отсюда следует включение (19) для третьего прямого слагаемого. Проекция на четвертое прямое слагаемое соответствует оператору dd^*.

§ 5. Деформационное квантование

В этом параграфе мы докажем теорему о несуществовании на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях естественных деформационных квантований.

Рассмотрим многообразие Пуассона M с бивектором Пуассона β. На пучке $\mathscr{O}$ дифференцируемых функций на M определена скобка Пуассона $\{f, g\} = \beta(df, dg) = \beta^{ij}\, \partial_i f\, \partial_j g$. По определению деформационное квантование – это ассоциативное $\mathbb{K}[[\hbar]]$-линейное по отношению к бесконечным суммам умножение $\star$ на пучке $\mathscr{O}[[\hbar]]$, имеющее на $\mathscr{O}$ следующий вид:

$$f \star g = fg + \hbar\{f, g\} + \dots + \hbar^l \beta_l(f, g) + \cdots,$$

где β_l, $l = 1, 2, \dots$, суть билинейные дифференциальные операции [15]. Операцию умножения $\star$ можно рассматривать как некоммутативную деформацию с параметром $\hbar$ обычного коммутативного умножения функций, так что член первого порядка коммутатора $f \star g - g \star f$ равен $2\{f, g\}$.

Известно несколько конструкций деформационных квантований (см., например, де Вильд–Лекомт [16], Федосов [17], [18], Концевич [19]). В этих конструкциях для построения деформационных квантований используются дополнительные геометрические структуры. Возникает естественный вопрос: существуют ли естественные деформационные квантования на многообразиях Пуассона (на симплектических многообразиях)? Естественность квантования понимается как естественность всех дифференциальных операций β_l. Ответ на этот вопрос отрицателен.

Теорема 5.1. *На многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях не существует естественных деформационных квантований.*

Нам понадобится следующая

Лемма 5.2. *Пусть* $A\colon \mathscr{O} \times \mathscr{O} \to \mathscr{O}$ *– билинейная естественная дифференциальная операция на симплектических многообразиях. Тогда* $A(f,g) = bfg + c\{df, dg\}$, *где* $b, c \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Операция A определяется линейным $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$-отображением

$$\alpha\colon J_n^{(p)} \otimes J_n^{(q)} \to \mathbb{K},$$

где $k > \max\{p,q\}$. Заметим, что Sp_n-модули $\mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*}$ неприводимы и попарно неизоморфны, причем $(\mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*})^* \simeq \mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*}$. Этому изоморфизму соответствует ненулевое линейное Sp_n-отображение

$$\psi_p\colon \mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*} \to \mathbb{K},$$

а именно, полная свертка с $(\omega_0^*)^{\otimes k}$. При $p \neq q$ ненулевых эквивариантных линейных отображений $\mathrm{S}^p\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathrm{S}^q\mathbb{K}^{n*} \to \mathbb{K}$ не существует. Отсюда и из Sp_n-эквивариантности отображения α следует, что

$$\alpha(f \otimes g) = \sum_{p \geqslant 0} a_p \psi_p(f_p \otimes g_p),$$

где $a_p \in \mathbb{K}$. Осталось проверить, что $a_p = 0$ при $p \geqslant 2$. Для этого берем $\xi = 3(x^1)^2 x^n$, $v = (x^1)^{p-1} \otimes (x^n)^p$ и вычисляем

$$\begin{aligned}\alpha((\xi * \omega_0^*) \cdot v) &= \alpha\bigl((p-1)(x^1)^p \otimes (x^n)^p - 2p(x^1)^{p-1} \otimes x^1(x^n)^p\bigr)\\ &= (p-1)a_p\psi_p\bigl((x^1)^p \otimes (x^n)^p\bigr) = (p-1)a_p. \end{aligned}\tag{20}$$

С другой стороны, поскольку α $\mathrm{NSp}_n^{(k)}$-инвариантно, то выражение (20) равно нулю, откуда следует, что $a_p = 0$.

Доказательство теоремы 5.1.

Мы последовательно проверим, что не существует естественных квантований 1) симплектических, 2) четномерных и 3) нечетномерных многообразий Пуассона.

1) Если естественное квантование $\star$ существует, то согласно лемме 5.2 имеем $\beta_p(f,g) = b_p fg + c_p \beta(df, dg)$, $p = 2, 3, \ldots$. Нетрудно проверить, что такая операция $\star$ не может быть ассоциативной даже по модулю $\hbar^3$.

2) Естественное квантование четномерных многообразий Пуассона определит естественное квантование симплектических многообразий. Согласно 1) это невозможно.
3) Достаточно доказать, что естественное квантование многообразий Пуассона размерности $n+l$ определяет естественное квантование многообразий Пуассона размерности n.

Пусть M есть n-мерное многообразие Пуассона с бивектором Пуассона β. На многообразии $M \times \mathbb{R}^l$ определим бивектор Пуассона $\widetilde{\beta}$ такой, что

$$\widetilde{\beta}_{(x,t)} \in \bigwedge^2 T_{(x,t)}(M \times \{t\}), \qquad dp\big|_{(x,t)}(\widetilde{\beta}_{(x,t)}) = \beta_x$$

для всех $(x,t) \in M \times \mathbb{R}^l$, где $p\colon M \times \mathbb{R}^l \to M$ – проекция. Теперь на M определим операцию $\star'$:

$$(f \star' g)(x) = (p^* f \star p^* g)(x,t),$$

где $\star$ – квантование структуры Пуассона $\widetilde{\beta}$. Нетрудно заметить, что операция $\star'$ определена корректно и является квантованием структуры Пуассона β. Очевидно, так определенное квантование n-мерных многообразий Пуассона является естественным.

Замечание 5.3. Теорема 5.1 аналогична теореме Ван Хова о несуществовании канонического геометрического квантования [20; п. 5.2.2]. В [21] доказан близкий к теореме 5.1 результат о деформационном квантовании.

Список литературы

[1] P. B. Gilkey, "Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes", *Advances in Math.*, **10**:3 (1973), 344–382.

[2] А. Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] M. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, "On the heat equation and the index theorem", *Invent. Math.*, **19**:4 (1973), 279–330.

[4] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem*, Math. Lecture Ser., **11**, Publish or Perish, Wilmington, DE, 1984.

[5] И. М. Гельфанд, Д. А. Каждан, "Некоторые задачи дифференциальной геометрии и вычисление когомологий алгебр Ли векторных полей", *Докл. АН СССР*, **200** (1971), 269–272; англ. пер.: I. M. Gel'fand, D. A. Kazhdan, "Some problems of differential geometry and the calculation of cohomologies of Lie algebras of vector fields", *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1367–1370.

[6] P. I. Katsylo, "On curvatures of sections of tensor bundles", *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 129–140.

[7] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993; рус. пер.: И. Колар, П. В. Мичор, Я. Словак, *Естественные операции в дифференциальной геометрии*, Тимпани, Киев, 2001.

[8] А. Н. Рудаков, "Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли типов **S** и **H**", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 496–511; англ. пер.: A. N. Rudakov, "Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of types **S** and **H**", *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 465–480.

[9] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, "Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии", *Геометрия* I, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **28**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–289; англ. пер.: D. V. Alekseevskij, A. M. Vinogradov, V. V. Lychagin, "Basic ideas and concepts of differential geometry", *Geometry* I, Encyclopaedia Math. Sci., **28**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–264.

[10] R. S. Palais, Ch.-L. Terng, "Natural bundles have finite order", *Topology*, **16**:3 (1977), 271–277.

[11] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[12] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, "Теория инвариантов", *Алгебраическая геометрия.* 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, Eh. B. Vinberg, "Invariant theory", *Algebraic geometry.* IV: *Linear algebraic groups*, *invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.

[13] А. А. Кириллов, "Инвариантные операторы над геометрическими величинами", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **16**, ВИНИТИ, М., 1980, 3–29; англ. пер.: A. A. Kirillov, "Invariant operators on geometric quantities", *J. Math. Sci.*, **18**:1 (1982), 1–21.

[14] Е. Ю. Смирнов, *О естественных дифференциальных операциях*, дипломная работа, МГУ, М., 2004.

[15] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, "Deformation theory and quantization, I, II", *Ann. Physics*, **111**:1 (1978), 61–151.

[16] M. de Wilde, P. B. A. Lecomte, "Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds", *Lett. Math. Phys.*, **7**:6 (1983), 487–496.

[17] B. V. Fedosov, "A simple geometrical construction of deformation quantization", *J. Differential Geom.*, **40**:2 (1994), 213–238.

[18] C. Emmrich, A. Weinstein, "The differential geometry of Fedosov's quantization", *Lie theory and geometry*, Progr. Math., **123**, Birkhäuser, Boston, MA, 1994, 217–239.

[19] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds", *Lett. Math. Phys.*, **66**:3 (2003), 157–216; `arXiv: q-alg/9709040`.

[20] Н. Е. Харт, *Геометрическое квантование в действии*: *приложения гармонического анализа в квантовой статистической механике и в квантовой теории поля*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: N. E. Hurt, *Geometric quantization in action. Applications of harmonic analysis in quantum statistical mechanics and quantum field theory*, Math. Appl. (East European Ser.), **8**, Reidel Publ., Dordrecht–Boston, MA, 1983.

[21] X. Tang, "A counter example of invariant deformation quantization", *Proceedings of the 4th conference on Poisson geometry* (Luxembourg, 2004), Trav. Math., **16**, Univ. Luxembourg, Luxembourg, 2005, 273–283; `arXiv: math/0411626`.

П. И. Кацыло (P. I. Katsylo)
Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН, г. Москва
E-mail: `katsylo@gmail.com`

Поступила в редакцию
12.08.2007

Д. А. Тимашёв (D. A. Timashev)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `timashev@mech.math.msu.su`