ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28, 1988 № 12

УДК 519.85

О СОВМЕСТНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ АГРЕГИРОВАНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

КРЫСОВ Ю. А.

(Москва)

Вводятся и обсуждаются понятия совместности и устойчивости агрегирования в параметрических задачах оптимизации. Описываются конструкции, лежащие в основе метода совместного агрегирования. Дается обоснование устойчивости совместного агрегирования в классе параметрических задач линейного программирования.

Введение

В работах [1] – [3] была рассмотрена новая постановка проблемы агрегирования (уменьшения размерности) параметрических оптимизационных задач и предложена ее алгоритмическая реализация для отдельных классов таких задач. В отличие от традиционного подхода к проблеме совместного агрегирования, рассмотренная постановка предполагает совпадение некоторых характеристик функций оптимума исходной и агрегированной задач на всем допустимом множестве значений параметров $\mathfrak{A}$, а не только в выделенной его точке $a\in\mathfrak{A}$, а именно: при фиксированном $a\in\mathfrak{A}$ любая допустимая вариация параметров $a+\Delta a\in\mathfrak{A}$, улучшающая оптимальное значение в агрегированной параметрической задаче, приводит к улучшению оптимального значения в исходной задаче. В то же время отсутствие улучшающих вариаций в агрегированной задаче означает их отсутствие и на исходном уровне детализации.

Подобный подход целесообразно использовать в человеко-машинных процедурах выработки более предпочтительных значений параметров исследуемой задачи, приводящих к улучшению ее оптимального значения. За счет своих относительно небольших размеров агрегированная задача позволяет оперативно оценивать направление и величину изменения функции оптимума исходной задачи при вариации пользователем параметров. Тем самым существенно сокращается время реакции ЭВМ на действия человека, ведущего диалог, и открывается возможность для проведения параметрического анализа задач большой размерности в режиме реального времени.

Разработанный в [1] – [3] метод, который реализует концепцию совместного агрегирования для некоторых классов параметрических задач, является, однако, лишь принципиальной схемой, работающей в предположении, что все требуемые измерения и вычисления могут быть осуществлены безошибочно. Понятно, что на практике это предположение не выполняется и необходимо учитывать помехи, вызванные неизбежными ошибками вычислений как со стороны ЭВМ, так и со стороны пользователя. В частности, практический интерес представляет рассмотрение вопроса о том, как связаны между собой допустимые погрешности в оценке пользователем предпочтительности тех или иных вариантов задания параметров исходной и агрегированной задач.

В настоящей статье исследуются понятия совместности и устойчивости агрегирования параметрических оптимизационных задач. Приводятся конструкции, которые лежат в основе методов совместного агрегирования, рассмотренных в [1]–[3]. Для задач линейного программирования доказывается устойчивость совместного агрегирования, осуществляемого по методу, предложенному в [1].

§ 1. Обозначения и постановка проблемы устойчивости агрегирования

Пусть имеется исходная параметрическая задача вида

$$(1.1)\qquad f(y, x)\to\inf,\qquad x\in X(y)\subset R^n,$$

в которой $y\in\mathfrak{A}\subset R^q$ – вектор параметров, интерпретируемый обычно как информационная составляющая задачи, $f:\mathfrak{A}\times R^n\to\overline{R}^1$ – ее целевая функция, $X:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(R^n)$ – точечно-множественное отображение, задающее множество допустимых решений, где через $\mathfrak{B}(Q)$ обозначено множество всех подмножеств множества Q.

Функция оптимума задачи (1.1) определяется так:

$$\varphi(y)=\begin{cases}\inf\{f(y,x)\mid x\in X(y)\}, & y\in\mathfrak{A}^0,\\ +\infty, & y\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}^0,\end{cases}$$

где $\mathfrak{A}^0=\{y\in\mathfrak{A}\mid X(y)\neq\varnothing\}$. С помощью $\varphi:\mathfrak{A}\to\overline{R}^1$ можно ввести отношение строгого порядка R на множестве альтернатив $\mathfrak{A}$. Для определенности будем предполагать, что

$$yRz\Leftrightarrow\varphi(y)<\varphi(z),\qquad y, z\in\mathfrak{A}.$$

Зафиксируем теперь произвольную точку $a\in\mathfrak{A}^0$, в которой $\varphi(a)>-\infty$, и наряду с (1.1) рассмотрим построенную из нее агрегированную параметрическую задачу

$$(1.2)\qquad f_a(y, p)\to\inf,\qquad p\in X_a(y)\subset R^{n_a}.$$

Здесь $y\in\mathfrak{A}$, R^{n_a} – пространство агрегированных переменных, $X_a:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(R^{n_a})$ – точечно-множественное отображение, $f_a:\mathfrak{A}\times R^{n_a}\to\overline{R}^1$ – целевая функция. Обозначим $\mathfrak{A}_a{}^0=\{y\in\mathfrak{A}\mid X_a(y)\neq\varnothing\}$ и по аналогии с (1.1) введем функцию оптимума задачи (1.2):

$$\varphi_A(a, y)=\begin{cases}\inf\{f_a(y,p)\mid p\in X_a(y)\}, & y\in\mathfrak{A}_a{}^0,\\ +\infty, & y\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_a{}^0,\end{cases}$$

а также «агрегированное» отношение предпочтения R_a, определяемое соотношением

$$yR_az\Leftrightarrow\varphi_A(a, y)<\varphi_A(a, z),\qquad y, z\in\mathfrak{A}.$$

Задача (1.2) получается из (1.1) в результате процедуры агрегирования, которая подразумевает, что агрегированная задача (1.2) в некотором смысле проще исходной, например имеет меньшее число переменных и (или) ограничений, что приводит к уменьшению времени вычисления значений $\varphi_A(a, y)$ по сравнению с $\varphi(y)$. В дальнейшем предполагается, что размерность $n_a<n$.

Для корректной постановки проблемы агрегирования задачи (1.1) в (1.2) необходимо сформулировать требования, которым должна удовлетворять (1.2) по отношению к (1.1). Анализ традиционных постановок агрегирования задач оптимизации показывает, что они ориентированы, как правило, на задачи с постоянными коэффициентами и практически не могут быть использованы для построения задач типа (1.2), в которых предполагается варьирование значений параметра y. В связи с этим в [1]–[3] было введено следующее понятие совместного агрегирования, в основу которого положено требование согласованного поведения функций оптимума задач (1.1) и (1.2) при вариации их параметров.

Обозначим множества предпочтительных относительно точки a значений параметров в задачах (1.1) и (1.2) через

$$\Gamma^0(a)=\{y\in\mathfrak{A}\,|\,yRa\},\qquad \Gamma_A{}^0(a)=\{y\in\mathfrak{A}\,|\,yR_a a\}$$

соответственно, где $\Gamma^0:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ и $\Gamma_A{}^0:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ — точечно-множественные отображения.

Определение 1. Агрегирование исходной параметрической задачи (1.1) в задачу (1.2) назовем совместным в точке $a\in\mathfrak{A}$, если выполняются следующие условия:

(1.3а) $\qquad \varphi_A(a,a)=\varphi(a),$

(1.3б) $\qquad \Gamma_A{}^0(a)\neq\varnothing\Rightarrow\Gamma_A{}^0(a)\subset\Gamma^0(a),\qquad \Gamma_A{}^0(a)=\varnothing\Rightarrow\Gamma^0(a)=\varnothing.$

Агрегированную параметрическую задачу (1.2), удовлетворяющую условиям (1.3), будем называть совместной с (1.1) в точке a.

Предложенная постановка является, однако, идеализированной и не отражает особенностей принятия решений в реальных условиях. В частности, (1.3) предполагает, что предпочтительность тех или иных альтернатив (значений параметров) может быть оценена пользователем с любой степенью точности как в исходной, так и в агрегированной задачах. В действительности возможности пользователя по оценке качества альтернатив зависят от его опыта, квалификации, а также от специфики и точности построения самой параметрической задачи. Будем считать, что интегрированный результат воздействия отмеченных факторов проявляется в наличии определенного порога чувствительности, ниже которого альтернативы становятся неразличимыми, или эквивалентными для человека, принимающего решения.

Пусть точность оценки альтернатив на исходной задаче составляет величину $\delta>0$, а на агрегированной $\varepsilon>0$. Тогда отношения предпочтения R и R_a должны быть заменены «возмущенными» отношениями R^δ и $R_a{}^\varepsilon$, определяемыми следующим образом:

$$yR^\delta z\Leftrightarrow\varphi(y)<\varphi(z)-\delta,\qquad y,z\in\mathfrak{A},$$
$$yR_a{}^\varepsilon z\Leftrightarrow\varphi_A(a,y)<\varphi_A(a,z)-\varepsilon,\qquad y,z\in\mathfrak{A}.$$

Это, в свою очередь, приводит к замене множеств $\Gamma^0(a)$ и $\Gamma_A{}^0(a)$ на аппроксимации

$$\Gamma(a,\delta)=\{y\in\mathfrak{A}\,|\,yR^\delta a\}\subset\Gamma^0(a),$$
$$\Gamma_A(a,\varepsilon)=\{y\in\mathfrak{A}\,|\,yR_a{}^\varepsilon a\}\subset\Gamma_A{}^0(a)$$

соответственно, где $\Gamma:\mathfrak{A}\times R_+{}^1\to\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, $\Gamma_A:\mathfrak{A}\times R_+{}^1\to\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. Точки из $\Gamma(a,\delta)$ (или $\Gamma_A(a,\varepsilon)$) естественно назвать δ-предпочтительными (или ε-предпочтительными) к элементу a по отношению R (или R_a). В то же время если $\Gamma(a, \delta)$ (или $\Gamma_A(a, \varepsilon)=\varnothing$), то точка a является δ-оптимальной (или ε-оптимальной) на $\mathfrak{A}$ по отношению R (или R_a).

Для обеспечения совместности агрегирования аппроксимации $\Gamma(a, \delta)$ и $\Gamma_A(a, \varepsilon)$ должны удовлетворять условиям, аналогичным (1.3), причем желательно, чтобы налагаемая этими условиями взаимосвязь погрешностей ε и δ в некотором смысле не зависела от точки a, в которой производится агрегирование. Другими словами, желательно, чтобы указанные условия выполнялись равномерно по всем a из некоторой окрестности. В результате приходим к следующему понятию устойчивости совместного агрегирования в параметрических задачах оптимизации.

Определение 2. Агрегирование задачи (1.1) в (1.2) назовем устойчивым по вариациям параметров на множестве $S\subset\mathfrak{A}$, если найдутся такие скалярные функции $\delta(\varepsilon)$ и $\varepsilon(\delta)$, принимающие положительные значения при $\varepsilon>0$, $\delta>0$, что для всех $a\in S$ выполняется

(1.4а) $\quad \varphi_A(a, a)=\varphi(a)$,

(1.4б) $\quad \Gamma_A(a, \varepsilon)\neq\varnothing\Rightarrow\Gamma_A(a, \varepsilon)\subset\Gamma(a, \delta(\varepsilon))$,

(1.4в) $\quad \Gamma_A(a, \varepsilon(\delta))=\varnothing\Rightarrow\Gamma(a, \delta)=\varnothing$.

Обсудим понятие устойчивости с содержательной точки зрения. Условие (1.4а) введено для удобства пользователя и достаточно естественно в ситуации, когда предпочтительность решений оценивается по значению функции оптимума. Выполнения этого свойства в точке a можно при необходимости добиться путем добавления к функции $\varphi_A(a, \cdot)$ некоторой константы. Условие (1.4б) фактически означает, что в пределах множества S любое ε-предпочтительное к $a\in S$ значение параметров, выработанное пользователем на агрегированной задаче, приводит к уменьшению оптимального значения в исходной задаче не менее чем на величину $\delta(\varepsilon)>0$. В то же время свойство (1.4в) позволяет при работе на агрегированной задаче ограничиться точностью $\varepsilon(\delta)$, достаточной для идентификации δ-оптимальности исследуемой альтернативы a на множестве $\mathfrak{A}$ по отношению R.

Замечание. В приведенном определении устойчивости не учитываются аспекты, связанные с явным возмущением ограничений и целевых функций рассматриваемых задач. Эти вопросы представляют самостоятельный интерес, и их детальное исследование может быть проведено, например, в рамках теории устойчивости принципов оптимальности [4].

§ 2. Агрегирование переменных в параметрических задачах оптимизации

Отметим, что функция оптимума $\varphi_A(a, \cdot)$ агрегированной задачи (1.2) по сути дела является некоторой аппроксимацией функции $\varphi(\cdot)$ в точке a. При этом вычисление значений $\varphi_A(a, y)$, $y\in\mathfrak{A}$, менее трудоемко по сравнению с $\varphi(y)$.

Идея замены исследуемой функции подобного рода аппроксимациями, основанными на ее дифференциальных разложениях первого или второго порядка, довольно часто используется в различных итеративных алгоритмах оптимизации. Однако линейная и квадратичная аппроксимации имеют лишь локальный характер и, вообще говоря, не гарантируют выполнения свойств (1.4).

В дальнейшем будет показано, что для построения задачи (1.2), которая бы удовлетворяла условиям (1.4), можно использовать технику агрегирования, предложенную в [1]–[3]. Проиллюстрируем основную идею такого агрегирования на примере агрегирования переменных.

Обозначим $X^{\text{опт}}(y)=\{x\in X(y)\,|\,f(y,x)=\varphi(y)\}$. Пусть задана некоторая точка $a\in\mathfrak{A}^0$, $\varphi(a)>-\infty$, и известно оптимальное решение $x_a\in X^{\text{опт}}(a)$ задачи (1.1). Агрегирование переменных будем интерпретировать как сечение семейства допустимых множеств $X(y)$, $y\in\mathfrak{A}$, аффинным многообразием

(2.1) $$\Pi_a=\{x\,|\,x=x_a+P_ap\},$$

где $p\in R^{n_a}$ — вектор агрегированных переменных размерности $n_a<n$, $P_a: R^{n_a}\to R^n$ — некоторый линейный оператор, имеющий в данном случае вид матрицы размера $n\times n_a$.

Тогда для агрегированной задачи (1.2) получаем

$$f_a(y,p)=f(y,x_a+P_ap),\qquad X_a(y)=\{p\,|\,x_a+P_ap\in X(y)\},$$
$$\mathfrak{A}_a{}^0=\{y\in\mathfrak{A}\,|\,X(y)\cap\Pi_a\neq\varnothing\}.$$

Нетрудно видеть, что при таком подходе

$$\inf\{f(y,x)\,|\,x\in X(y)\}\leqslant\inf\{f_a(y,p)\,|\,p\in X_a(y)\},$$

т. е. $\varphi(y)\leqslant\varphi_A(a,y)$ для всех $y\in\mathfrak{A}$ и, следовательно, независимо от конкретного выбора P_a автоматически выполняются условия (1.4а) и (1.4б) (в данном случае $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$). Что касается свойства (1.4в), то его справедливость существенным образом зависит от структуры оператора P_a. Оказывается, что выбор P_a по способу, рассмотренному в [1]–[3], гарантирует выполнение отмеченных свойств и тем самым обеспечивает устойчивость агрегирования в смысле определения (1.4). Доказательство этого факта применительно к задачам линейного программирования содержится в § 3, где рассматривается общая ситуация, связанная с агрегированием не только переменных, но и ограничений.

§ 3. Устойчивость агрегирования в линейном программировании

В настоящем параграфе будет установлено, что в классе параметрических задач линейного программирования при некоторых предположениях относительно структуры множества $\mathfrak{A}$ агрегирование, проведенное методом, предложенным в [1], является устойчивым по вариациям параметров.

Рассмотрим в качестве (1.1) задачу линейного программирования

(3.1а) $$f(x)=c_1x_1+c_2x_2\to\min,$$

(3.1б) $$A_{11}(y)x_1+A_{12}x_2=b_1,\quad x_1\geqslant0,\qquad A_{21}x_1+A_{22}x_2=b_2,\quad x_2\geqslant0.$$

Здесь матрица условий $\left\|\begin{matrix}A_{11}(y), & A_{12}\\ A_{21}, & A_{22}\end{matrix}\right\|=A(y)$ имеет размеры $m\times n$, $m\leqslant n$, причем $\operatorname{rang}A(y)=m$ для всех $y\in\mathfrak{A}$, векторы

$$x=\left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\right\|\in R^n,\qquad b=\left\|\begin{matrix}b_1\\ b_2\end{matrix}\right\|\in R^m,\qquad c^{\text{т}}=\left\|\begin{matrix}c_1{}^{\text{т}}\\ c_2{}^{\text{т}}\end{matrix}\right\|\in R^n,$$

варьируемые элементы сосредоточены в матрице $A_{11}(y)$ размера $m_1 \times n_1$, $\max(m_1, n_1) \ll \min(m, n)$.

Пусть $x(y) = \operatorname{argmin}\{cx \mid A(y)x = b,\ x \geqslant 0\} \in X^{\text{опт}}(y)$ — произвольное оптимальное решение задачи (3.1), отвечающее параметру $y \in \mathfrak{A}^0$.

Определение 3. Оптимальное решение $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$ назовем невырожденным, если градиенты всех ограничений, которые выполняются в точке $x(a)$ как равенства, линейно независимы.

Определение 4. Параметрическую задачу (3.1) назовем невырожденной в точке $a \in \mathfrak{A}^0$, если все ее оптимальные решения $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$ являются невырожденными.

Под базисом оптимального решения $x(a)$ (оптимальным базисом) будем понимать систему из m линейно-независимых столбцов матрицы условий $A(a)$, соответствующих наибольшим по величине компонентам вектора $x(a)$ (в случае неоднозначности берется произвольная такая система). Компоненты $x(a)$, отвечающие столбцам, вошедшим в базис, называются базисными. Нетрудно проверить, что базисные компоненты всякого невырожденного оптимального решения $x(a)$ задачи (3.1) являются положительными.

Обозначим через $B(a)$ матрицу оптимального базиса решения $x(a)$, через $\mathfrak{R}(a)$ — множество матриц оптимальных базисов для всех $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$. По определению, базисная матрица $B(a)$ произвольного решения $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$ имеет размеры $m \times m$ и является невырожденной.

Помечая нижним индексом B те величины, которые (после фиксации оптимального базиса) соответствуют базисным компонентам вектора $x(a)$, а индексом D — небазисным, введем разбиение обратной базисной матрицы

$$B^{-1}(a) = \left\| \begin{matrix} A_{11B}(a) & A_{12B} \\ A_{21B} & A_{22B} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{B}_{11}(a) & \tilde{B}_{12}(a) \\ \tilde{B}_{21}(a) & \tilde{B}_{22}(a) \end{matrix} \right\| ,$$

где блок $\tilde{B}_{11}(a)$ имеет размеры $n_{1B} \times m_1$.

Пусть $a = A_{11}$ и оптимальное значение $\varphi(a) > -\infty$. В дальнейшем будем предполагать, что варьируемая матрица линейно зависит от параметра и имеет вид $A_{11}(y) = y = A_{11} + \Delta A_{11}$, т. е. $\mathfrak{A}$ представляет собой некоторое множество матриц y размера $m_1 \times n_1$.

Если зафиксировать $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$, в качестве P_a из (2.1) выбрать матрицу

$$P_a = \left\| \begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & D_a \end{matrix} \right\|, \qquad D_a = (\tilde{B}_{21}(a), -\tilde{B}_{21}(a), -\tilde{B}_{22}(a) A_{21D})$$

(E_{n_1} — единичная матрица порядка n_1), и затем провести агрегирование задачи (3.1) по методу [1], то получим в пространстве векторов $p = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ z \end{matrix} \right\| \in R^{n_a}$, $\quad n_a \leqslant 2(n_1 + m_1)$, параметрическую агрегированную задачу

(3.2а) $\qquad f_a(p) = c_1 x_1 + (c_{2B} D_a) z + c_2 x_2^0 \to \inf, \qquad p \in X_a(y),$

(3.2б) $\qquad X_a(y) = \{p \mid A_{11}(y) x_1 + (A_{12B} D_a) z = b_1 - A_{12} x_2(a),$
$\qquad \bar{A}_{21} x_1 + (\bar{A}_{22B} D_a) z = \bar{b}_2 - \bar{A}_{22} x_2(a),\ t_a z \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ z \geqslant 0\},$

где $\bar{A}_{21}$, $\bar{A}_{22B}$, $\bar{A}_{22}$ — некоторые подматрицы матриц A_{21}, A_{22B}, A_{22} соответственно, t_a — неотрицательная вектор-строка с коэффициентами

$$(3.3)\qquad (t_a)_j=\begin{cases}\max\limits_{i\in I_j}\dfrac{(-D_a)_{ij}}{(x_{2B}(a))_i}, & I_j=\{i\mid (D_a)_{ij}<0\}\neq\varnothing,\\[2ex] 0, & I_j=\varnothing.\end{cases}$$

Переходя к обоснованию устойчивости проведенного агрегирования, дополнительно предположим, что отображение $X^{\text{опт}}:\mathfrak{A}^0\to\mathfrak{B}(R^n)$ является ограниченным (т. е. найдется $M>0$ такое, что $\|x\|\leqslant M$ для всех $x\in X^{\text{опт}}(y)$ и всех $y\in\mathfrak{A}^0$), а множество параметров $\mathfrak{A}$ обладает свойством

$$(3.4)\qquad y^1,\ y^2\in\mathfrak{A}\Rightarrow y(\alpha)=y^1(E_{n_1}-\alpha)+y^2\alpha\in\mathfrak{A},$$

где $\alpha=\operatorname{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1})$ — произвольная диагональная матрица с коэффициентами $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$, $i=1, 2,\ldots, n_1$. Если столбцы матрицы $A(y)$ интерпретировать как технологии, то последнее свойство означает, что наряду с отдельными технологиями допустимы также «смеси» этих технологий.

Лемма 1. *Пусть задача* (3.1) *не вырождена в точке* $a\in\mathfrak{A}^0$, $\varphi(a)>-\infty$, *отображение* $X^{\text{опт}}$ *ограничено, множество* $\mathfrak{A}$ *ограничено и обладает свойством* (3.4). *Тогда для агрегированной задачи* (3.2), *построенной в точке* a, *можно указать константу* $\gamma(a)>0$ *такую, что для всякой* $y^1\in\Gamma^0(a)$ *найдется* $y^2\in\mathfrak{A}$, *в которой*

$$(3.5)\qquad \varphi(y^1)-\varphi(a)\geqslant\gamma(a)[\varphi_A(a, y^2)-\varphi_A(a, a)].$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $y^1\in\Gamma^0(a)$ и $x(a)\in X^{\text{опт}}(a)$. Зафиксируем некоторый оптимальный базис (с матрицей $B(a)\in\mathfrak{R}(a)$), соответствующий $x(a)$, и обозначим

$$\Delta(a, y)=(\Delta_1(a, y),\ldots,\Delta_n(a, y))=c-\pi(a)A(y),$$

где $\pi(a)$ — двойственное оптимальное решение задачи (3.1), отвечающее прямому решению $x(a)$. Отметим, что, в силу невырожденности исходной задачи в точке a, вектор $\pi(a)$ является единственным.

По условию леммы, $\varphi(y^1)-\varphi(a)<0$. Но в задаче линейного программирования (3.1) ввиду того, что $x(a)\in X^{\text{опт}}(a)$, разность значений целевой функции представима в виде

$$cx(y)-cx(a)=cx(y)-\pi(a)b=$$
$$=cx(y)-\pi(a)A(y)x(y)=\Delta(a, y)x(y).$$

Поэтому

$$(3.6)\qquad \varphi(y^1)-\varphi(a)=\Delta(a, y^1)x(y^1)<0.$$

Благодаря невырожденности $x(a)$ можно показать [1], что в случае $y^1\in\Gamma^0(a)$ найдутся $y^2\in\mathfrak{A}$ и $p^2\in X_a(y^2)$ такие, для которых в агрегированной задаче (3.2) имеет место соотношение

$$(3.7)\qquad 0>f_a(p^2)-\varphi_A(a, a)=\Delta_s(a, y^1)t(a, y^2, B).$$

Здесь

$$(3.8\text{а})\qquad \Delta_s(a, y^1)=\min_i\Delta_i(a, y^1),\qquad t(a, y, B)=\min\{\xi^*(a), \beta^*(a)\},$$

$$(3.8\text{б})\qquad \xi^*(a)=\min_i(x_{iB}(a)/[B_i^{-1}(a)A^s(y)]>0),$$

$$(3.8\text{в})\qquad \beta^*(a)=(L\|t_a\|)^{-1},\qquad L=\sup_{y\in\mathfrak{A}}\max_s 2\|A_{11}^s(y)\|+1.$$

Здесь $B_i^{-1}(a)$ есть i-я строка матрицы $B^{-1}(a)$, $A^s(y)$ есть s-й столбец матрицы $A(y)$, i, $s\in\{1, 2,\ldots, n_1\}$. Выбор величины $\xi^*(a)$ обеспечивает в задаче (3.2) неотрицательность составляющей x_1^2 вектора $p^2 = \left\| \begin{matrix} x_1^2 \\ z^2 \end{matrix} \right\|$, а $\beta^*(a)$ гарантирует, что составляющая $z^2 \in \{z | t_a z \leqslant 1, z \geqslant 0\}$.

Из условия невырожденности задачи (3.1) в точке a следует, что для определенных ранее оптимальных базисных матриц $B(a) \in \mathfrak{R}(a)$ независимо от выбора конкретного $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$ выполняется $x_B(a) = B^{-1}(a) b > 0$. Более того, в силу компактности множества $X^{\text{опт}}(a)$ найдется скаляр $\sigma^*(a) > 0$ такой, что равномерно по всем $x(a) \in X^{\text{опт}}(a)$ и соответствующим базисам $B(a) \in \mathfrak{R}(a)$ справедливо

$$x_B(a) \geqslant \sigma^*(a) \mu > 0, \tag{3.9}$$

где $\mu = (1, \ldots, 1)^T \in R^m$. (В противном случае можно было бы построить последовательность точек $x^k(a) \in X^{\text{опт}}(a)$, у которых по крайней мере одна базисная компонента не превышает величины $r^k > 0$, где $r^k \to 0$, $k \to \infty$, и выделить из $\{x^k(a)\}$ подпоследовательность, сходящуюся к точке $x^*(a) \in X^{\text{опт}}(a)$, имеющей не менее одной нулевой базисной компоненты, что противоречит невырожденности исходной задачи.)

Кроме того, из $A_{11}(y) = y$, из ограниченности множества $\mathfrak{A}$ и отображения $X^{\text{опт}}$ вытекает ограниченность на $\mathfrak{A}$ элементов $A(y)$, а также, в частности, элементов $B(a) \in \mathfrak{R}(a)$ матриц $A(a)$ и соответствующих $B^{-1}(a)$. Поэтому найдется скаляр $q^*(a) > 0$, при котором

$$\max_s \sup_y \sup_{B(a)} B^{-1}(a) A^s(y) \leqslant q^*(a) \mu, \tag{3.10}$$
$$s = 1, 2, \ldots, n_1, \qquad y \in \mathfrak{A}, \qquad B(a) \in \mathfrak{R}(a).$$

Используя (3.8) – (3.10), заключаем, что

$$t(a, y, B) \geqslant \min\left\{ \frac{\sigma^*(a)}{q^*(a)}, \beta^*(a) \right\} = t^*(a) > 0 \quad \forall y \in \mathfrak{A}, \quad B \in \mathfrak{R}(a). \tag{3.11}$$

Наконец, учитывая ограниченность отображения $X^{\text{опт}}$ и сопоставляя (3.6), (3.7) и (3.11), окончательно получаем

$$0 > \varphi(y^1) - \varphi(a) = \Delta(a, y^1) x(y^1) \geqslant n \Delta_s(a, y^1) \max_i |x_i(y^1)| \geqslant$$
$$\geqslant n \Delta_s(a, y^1) \|x(y^1)\| n^{-1/2} \geqslant n^{1/2} M \Delta_s(a, y^1) =$$
$$= n^{1/2} M [f_a(p^2) - \varphi_A(a, a)] [t(a, y^2, B)]^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant n^{1/2} M [f_a(p^2) - \varphi_A(a, a)] [t^*(a)]^{-1} \geqslant \gamma(a) [\varphi_A(a, y^2) - \varphi_A(a, a)],$$

где $\gamma(a) = n^{1/2} M [t^*(a)]^{-1} > 0$. Лемма доказана.

Относительно свойств константы $\gamma(a)$ в формулировке леммы 1 справедливо следующее утверждение о ее равномерной ограниченности.

Лемма 2. *Пусть в точке $a^* \in \mathfrak{A}^0$ выполнены предположения леммы 1. Тогда найдется окрестность $S(a^*)$ точки a^* такая, что величина $\gamma(a)$, удовлетворяющая соотношению* (3.5), *определена и ограничена сверху для всех $a \in S(a^*)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что в (3.11) будет $t^*(a) \geqslant t^* > 0$ для некоторого $t^* > 0$ и всех a из некоторой окрестности точки a^*.

Для этого заметим, что коэффициенты матрицы $A(y)$ в задаче (3.1) непрерывно зависят от параметра, $\operatorname{rang} A(y) = m$ для всех $y \in \mathfrak{A}$, $X^{\text{опт}}(a^*)$ — непустой компакт, множества $X(y)$ выпуклы, а целевая функция cx непрерывна на R^n. В этом случае, по теоремам 1.2, 1.7 и 1.9 из [5], отображение $X^{\text{опт}}$ является (по терминологии [5]) компактным, l-непрерывным и ν-непрерывным в точке a^*. Последнее свойство означает, что для произвольной последовательности $\{a^k\}$, сходящейся к a^*, и для любой окрестности нуля U в R^n начиная с некоторого номера справедливо включение $X^{\text{опт}}(a^*)+U\supset X^{\text{опт}}(a^k)$.

Отсюда, во-первых, следует существование окрестности $V^0(a^*)$ точки a^* такой, что задача (3.1) не вырождена для всех $a\in V^0(a^*)$.

Чтобы убедиться в этом, предположим противное и обозначим через $I(x)$ номера активных в x ограничений. Тогда найдутся последовательности $a^n\to a^*$ и $x^n\in X^{\text{опт}}(a^n)$, $n=0, 1, \ldots$, такие, что градиенты ограничений с индексами из $I(x^n)$ линейно зависимы в точках x^n. В силу компактности отображения $X^{\text{опт}}$ в точке a^* можно выделить последовательность номеров n_k, для которой $a^{n_k}\to a^*$, $x^{n_k}\to x^*$, $k\to\infty$, причем, согласно l-непрерывности отображения $X^{\text{опт}}$, предельная точка $x^*\in X^{\text{опт}}(a^*)$. В то же время для достаточно больших значений $k\geqslant k^0$ имеет место включение $I(x^{n_k})\subset I(x^*)$ (см. [6]), т. е. градиенты с номерами $i\in I(x^*)$ линейно зависимы в точках x^{n_k}, $k\geqslant k^0$, что противоречит невырожденности точки $x^*\in X^{\text{опт}}(a^*)$. Действительно, в силу невырожденности последней, ν-непрерывности отображения $X^{\text{опт}}$ в a^* и непрерывной дифференцируемости всех ограничений задачи (3.1) по переменным и параметрам найдутся окрестности $V^1(a^*)\subset V^0(a^*)\subset \subset\mathfrak{A}$, $Q(x^*)\subset R^n$ точек a^*, x^* такие, что для $a\in V^1(a^*)$ пересечение $X^{\text{опт}}(a)\cap \cap Q(x^*)\neq\varnothing$ и при этом градиенты ограничений с индексами $i\in I(x^*)$ линейно независимы для всех $x\in X^{\text{опт}}(a)\cap Q(x^*)$, $a\in V^1(a^*)$.

Таким образом, лемма 1 применима и величина $\gamma(a)$ из (3.5) определена для всех $a\in V^0(a^*)$.

Во-вторых, подбирая надлежащим образом окрестность $U\in R^n$, фигурирующую в определении ν-непрерывности, и учитывая невырожденность задачи (3.1) в a^*, можно выделить такую окрестность $S(a^*)\subset V^0(a^*)$ точки a^*, что для величины $\sigma^*(a)$ из (3.9) будет выполняться

$$\inf\{\sigma^*(a)\,|\,a\in S(a^*)\}\geqslant\sigma^*(a^*)/2=\sigma^*>0. \tag{3.12}$$

Наконец, из непрерывности коэффициентов $A(a)$ от параметра a следует равномерная по $a\in S(a^*)$ ограниченность элементов всех базисных матриц $B(a)\in\mathfrak{N}(a)$, а также соответствующих матриц $B^{-1}(a)$ и D_a. Поэтому, анализируя соотношения (3.3), (3.8), (3.10) и (3.12), заключаем, что найдутся скаляры $q^*>0$, $\beta^*>0$, для которых

$$\sup\{q^*(a)\,|\,a\in S(a^*)\}\leqslant q^*,\qquad \inf\{\beta^*(a)\,|\,a\in S(a^*)\}\geqslant\beta^*.$$

Положим $t^*=\min\{\sigma^*/q^*, \beta^*\}$. Тогда, согласно (3.11),

$$\inf\{t^*(a)\,|\,a\in S(a^*)\}\geqslant t^*,$$

откуда $\gamma(a)=n^{1/2}M/t^*(a)\leqslant n^{1/2}M/t^*=\gamma$ для всех $a\in S(a^*)$. Лемма доказана.

Из полученных результатов непосредственно следует

Утверждение. *Пусть исходная задача* (3.1) *не вырождена в точке* $a^*\in\mathfrak{A}^0$ ($\varphi(a^*)>-\infty$), *отображение* $X^{\text{опт}}$ *ограничено, множество* $\mathfrak{A}$ *ограничено и обладает свойством* (3.4). *Тогда агрегирование задачи* (3.1) *в* (3.2) *является устойчивым по вариациям параметров на множестве* $S(a^*)$.

Доказательство. Справедливость условий (1.4а) и (1.4б) установлена в § 2. Что касается свойства (1.4в), то оно следует из лемм 1 и 2, если положить $\varepsilon(\delta)=\gamma^{-1}\delta$, воспользоваться соотношением (3.5) и тем фактом, что $\gamma(a)\leqslant\gamma$ для всех $a\in S(a^*)$. Утверждение доказано.

Таким образом, установлено, что разработанный в [1] метод агрегирования параметрических задач линейного программирования обеспечивает не только совместность такого агрегирования, но и его устойчивость.

Литература

1. *Вен В. Л., Крысов Ю. А.* Частичное агрегирование в задачах линейного программирования с варьируемыми параметрами. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 3. С. 3–10.
2. *Вен В. Л., Крысов Ю. А.* Совместное агрегирование в параметрических задачах выпуклого программирования и многокритериальной оптимизации. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
3. *Крысов Ю. А.* О совместном агрегировании в некоторых классах параметрических оптимизационных задач в банаховом пространстве // Автоматика и телемехан. 1987. № 12. С. 147–157.
4. *Молодцов Д. А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.
5. *Барабаш С. Б.* Параметрический анализ конечномерных экстремальных задач // Матем. анализ моделей эконом. взаимодействия. Новосибирск: Наука, 1981. С. 3–21.
6. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 29.X.1987