УДК 574.3
MSC 2000 99Z99

© Е.Д. Емцева, Е.Я. Фрисман*

Оптимизация промысла для популяции при периодическом изменении внешних условий

Биологические циклы многих видов животных приурочены к сезонным изменениям окружающей среды. Периоды размножения таких животных обычно достаточно краткосрочны и фиксированы во времени. Хорошо изучены модели динамики численности популяции животных, имеющих один сезон размножения в течении года. Однако существуют виды с двумя и более сезонами размножения. Например, маньчжурская белка имеет осенний и весенний периоды генерации. Кроме того, интенсивность размножения и уровень смертности этого вида определяется величиной пищевых запасов, в основном, урожайностью кедровых орехов. Сама урожайность практически периодически меняется во времени, а длина периода составляет три года. Возникает проблема описания динамики численности популяции и определения оптимальных стратегий промысла при периодически меняющейся среде обитания. Постановка подобной задачи уже встречалась во многих исследованиях, но до сих пор сохранилась возможность поиска решения данной задачи, обобщения и уточнения результатов.

В данной работе рассматривается задача оптимизации периодически равновесного промысла в модели динамики численности популяции при периодическом изменении параметра a — репродуктивного потенциала популяции, который характеризует скорость роста популяции в пустоту. Пусть каждый рассматриваемый промежуток времени включает в себя k периодов размножения. Обозначим через $x_{n,j}$ численность популяции в n-м промежутке времени, j-м периоде.Тогда модель динамики численности популяции выражается системой уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = a_k x_{n,k} f_k(x_{n,k})(1-u_k), \\ x_{n+1,2} = a_1 x_{n+1,1} f_1(x_{n+1,1})(1-u_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1,k} = a_{k-1} x_{n+1,k-1} f_{k-1}(x_{n+1,k-1})(1-u_{k-1}), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i > 0$ для каждого $i = \overline{1,k}$; u_i — доля изымаемых особей в i-м периоде; $y = f_i(x)$ — непрерывная, монотонно убывающая функция, причем $f_i(0) = 1$; $y = xf_i(x)$ — функция, имеющая один экстремум (максимум), до которого она является вогнутой.

Для периодически равновесного значения численности популяции ($x_{n+1,i} = x_{n,i} = x_i$) система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_k x_k f_k(x_k)(1-u_k), \\ x_2 = a_1 x_1 f_1(x_1)(1-u_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = a_{k-1} x_{k-1} f_{k-1}(x_{k-1})(1-u_{k-1}). \end{cases} \tag{2}$$

* ВГУЭС, Владивосток, ИКАРП ДВО РАН, ЕАО г. Биробиджан. Электронная почта: edemtseva@list.ru, frisman@mail.ru

Равновесный среднепериодический уровень изъятия задается функцией:

$$z(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_i a_i x_i f_i(x_i).$$

Задача сводится к определению глобального максимума функции улова z, при переменной стратегии промысла, когда, вообще говоря, $u_i \neq u_j$ при $i \neq j$, с учетом области допустимых значений $x_i \geqslant 0, 0 \leqslant u_i \leqslant 1, i = \overline{1,k}$.

1. Необходимые и достаточные условия существования максимального периодического уравновешенного изъятия

Используя метод множителей Лагранжа для нахождения условного экстремума функции $z(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k)$, нетрудно показать, что, если хотя бы один из коэффициентов $a_i = 1$, то тривиальная точка $(0, 0, \dots, 0)$ является единственной критической точкой, а если хотя бы один $a_i \neq 1$, то тривиальная критическая точка $(0, 0, \dots, 0)$ не является экстремумом. О тривиальной критической точке при всех $a_i = 1$ и нетривиальной критической точке, которая существует в случае $a_i \neq 1$ для всех $i = \overline{1,k}$, подобным образом сделать вывод не удается, поэтому, используя систему соотношений (2), перейдем к поиску условного максимума функции равновесного изъятия

$$z(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Big(a_i x_i f_i(x_i) - x_i\Big). \tag{3}$$

в области допустимых значений

$$D_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \geqslant 0, i = \overline{1,k}, x_{i+1} - a_i x_i f_i(x_i) \leqslant 0, i = \overline{1,k-1},$$
$$x_1 - a_k x_k f_k(x_k) \leqslant 1\}.$$

Критическая точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ функции (3) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a_1\Big(f_1(x_1) + x_1 f_1'(x_1)\Big) = 1 \\ a_2\Big(f_2(x_2) + x_2 f_2'(x_2)\Big) = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k\Big(f_k(x_k) + x_k f_k'(x_k)\Big) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Матрица Гессе функции (3) является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} 2f_1'(x_1) + x_1 f_1''(x_1) < 0, \\ 2f_2'(x_2) + x_2 f_2''(x_2) < 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2f_k'(x_k) + x_k f_k''(x_k) < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $x_i^*, i = \overline{1,(k-1)}$ — точки максимума функции $y = x f_i(x)$ соответственно. Учитывая, что $a_i > 0, i = \overline{1,k}$ и используя уравнения системы (4), получим: $x_i^0 < x_i^*, i = \overline{1,k}$.

Учитывая свойства функции $y = xf_i(x)$, имеем $\Big(xf_i(x)\Big)'' = 2f_i'(x) + xf_i''(x) < 0$ при $x \leqslant x_i^*$. Следовательно, система неравенств (5) для всех $x_i \leqslant x_i^*$ $\quad (i = \overline{1,k})$ выполняется. Значит, функция (3) в области $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \leqslant x_i^*, i = \overline{1,k}\}$ является строго вогнутой, а точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ является точкой глобального максимума в этой области.

Заметим, что $x_i^* > 0$. Допустим противное: $x_i^* \leqslant 0$. Тогда $f_i(x_i^*) > 0, x_i^* f_i'(x^*) \geqslant 0$, а значит $f_i(x_i^*) + x_i^* f_i'(x_i^*) > 0$, что противоречит необходимому условию экстремума функции.

Преобразуем систему (4) к виду

$$\begin{cases} a_1 = \Big(f_1(x_1) + x_1 f_1'(x_1)\Big)^{-1}, \\ a_2 = \Big(f_2(x_2) + x_2 f_2'(x_2)\Big)^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = \Big(f_k(x_k) + x_k f_k'(x_k)\Big)^{-1}. \end{cases}$$

Правые части равенств системы являются монотонно возрастающими функциями при $x \leqslant x_i^*$,так как

$$\left(\Big(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\Big)^{-1}\right)' = \frac{-\Big(2f_i'(x_i) + x_i f_i''(x_i)\Big)}{\Big(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\Big)^2} > 0.$$

Значит, единственное решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ легко найти численно для каждого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Утверждение 1. *Пусть $a_i > 0, i = \overline{1,k}$. Неравенство $x_i^0 > 0$ выполняется для фиксированного целого $i (1 \leqslant i \leqslant k)$ тогда и только тогда, когда $a_i > 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $x_i^0 > 0$ при некотором $i = \overline{1,k}$. Поскольку $y = f_i(x)$ — непрерывная, монотонно убывающая функция, и $f_i(0) = 1$, то $f_i(x_i^0) < 1, f_i'(x_i^0) \leqslant 0$. Следовательно, $f_i(x_i^0) + x_i^0 f_i'(x_i^0) < 1$. Используя систему равенств (4), получим $a_i > 1$.

Достаточность. Допустим противное: пусть существует i такой, что $a_i > 1$, а $x_i^0 \leqslant 0$. Так как $x_i^0 \leqslant 0$, то $f_i(x_i^0) \geqslant 1$.Учитывая, кроме того, что $f_i'(x_i^0) \leqslant 0$, получим неравенство $f_i(x_i^0) + x_i^0 f_i'(x_i^0) \geqslant 1$. С другой стороны из системы (4) следует, что при $a_i > 1$ выполняется неравенство $f_i(x_i^0) + x_i^0 f_i'(x_i^0) < 1, i = \overline{1,k}$, противоречащее предыдущему.

Утверждение доказано.

Итак, в случае, когда все $a_i > 1$ стационарная точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ удовлетворяет системе неравенств $0 < x_i^0 < x_i^*$ для каждого $i = \overline{1,k}$.

Если точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ принадлежит области D_1, то она является глобальным максимумом функции равновесного изъятия при заданных ограничениях.

Исследуем область D_1 существования оптимальной равновесной численности промысловой популяции в зависимости от параметров a_i.

Утверждение 2. *Если D_1 содержит точку с положительными координатами, то* $\prod_{i=1}^k a_i > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, существует точка с положительными координатами, принадлежащая области D_1. Для координат этой точки выполняются неравенства

$$0 < \frac{x_{i+1}}{a_i x_i f_i(x_i)} \leqslant 1, \quad 0 < \frac{x_1}{a_k x_k f_k(x_k)} \leqslant 1.$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$\frac{x_1}{a_k x_k f_k(x_k)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{a_i x_i f_i(x_i)} \leqslant 1,$$

или

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i f_i(x_i)} \leqslant 1.$$

Учитывая, что при сделанных предположениях $0 < f_i(x_i) < 1$ для $i = \overline{1,k}$, получим

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(x_i) < 1.$$

Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{k} a_i > 1.$$

Утверждение доказано.

Введем обозначения $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k), X^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_k^i)$.

Утверждение 3. *Если для точки X^0 локального максимума функции (3) не выполняются некоторые условия принадлежности области D_1, то наибольшее значение этой функции в области D_1 следует искать на соответствующих нарушенным условиям границах области D_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что для любой точки $X \in D$ в каждой точке Y такой, что $Y = X^0 + \alpha(X - X^0)$, где $0 < \alpha < 1$ выполняется неравенство: $z(Y) > z(X)$. Действительно, $z(Y) = z(X^0 + \alpha(X - X^0)) = z(\alpha X + (1-\alpha)X^0)$. По определению строго вогнутой функции: $z(\alpha X + (1-\alpha)X^0) > \alpha z(X) + (1-\alpha)z(X^0)$. Так как для всех X из области D выполняется неравенство $z(X^0) > z(X)$, то $\alpha z(X) + (1-\alpha)z(X^0) > \alpha z(X) + (1-\alpha)z(X) = z(X)$. Итак, получим $z(Y) > z(X)$. Очевидно, $Y \in D$. Учитывая это, имеем $z(X^0) > z(Y) > z(X)$. Другими словами, функция z в точке максимума убывает по всем направлениям области D. Значит, наибольшее значение z в области D_1 при $X^0 \notin D_1$ следует искать на ближайших к X^0 границах этой области.

Утверждение доказано.

Докажем, что точка глобального максимума принадлежит области D, что даст возможность исключить из рассмотрения точки области $D_1 \cap \overline{D}$ (где $\overline{D}$ — дополнение к области D). Покажем, что для любой точки $X^2 \in D_1 \cap \overline{D}$ существует точка $X^3 \in D_1 \cap D$ такая, что $z(X^3) > z(X^2)$. Действительно, если $X^2 \in D_1 \cap \overline{D}$, то для некоторых координат выполняется условие $x_i^2 > x_i^*$. Заменив эти координаты на x_i^* соответственно, получим точку X^3, которая принадлежит области $D_1 \cap D$. Для того, чтобы сравнить $z(X^3)$ и $z(X^2)$ достаточно сравнить выражения вида $a_i x_i^* f_i(x_i^*) - x_i^*$ и $a_i x_i^2 f_i(x_i^2) - x_i^2$. Очевидно $a_i x_i^* f_i(x_i^*) - x_i^* > a_i x_i^2 f_i(x_i^2) - x_i^2$, так как $x_i^2 > x_i^*$. Значит, глобальный максимум следует искать в области $D_1 \cap D$.

`Замечание.`Следует отметить, что доказанный факт исключает из множества подозрительных на максимум точек точки перегиба функции $y = x f_i(x)$, в которых гессиан равен нулю.

Таким образом, сузив область определения функции z до $D_1 \cap D$, сведем задачу к поиску глобального максимума вогнутой функции.

Функции $g_{i+1}(X) = x_{i+1} - a_i x_i f_i(x_i), i = \overline{1, k-1}$, $g_1(X) = x_1 - a_k x_k f_k(x_k)$ являются выпуклыми, так как они представляют собой сумму линейной и выпуклой функции. Следовательно, область $D_1 \cap D$ выпуклая.

Воспользуемся условиями Куна-Таккера, которые являются необходимыми и достаточными для определения максимума функции z при ограничениях

$$\begin{cases} g_1(X) = x_1 - a_k x_k f_k(x_k) \leqslant 0, \\ g_2(X) = x_2 - a_1 x_1 f_1(x_1) \leqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(X) = x_k - a_{k-1} x_{k-1} f_{k-1}(x_{k-1}) \leqslant 0, \\ g_{k+1} = -x_1 \leqslant 0, \\ g_{k+2} = -x_2 \leqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_{2k} = -x_k \leqslant 0. \end{cases}$$

Условия Куна-Таккера имеют вид

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,k} \\ \bigtriangledown z(X) - \lambda \bigtriangledown g(X) = 0, \\ \lambda_i g_i(X) = 0, i = \overline{1,2k}, \\ g(X) \leqslant 0, \end{cases}$$

Получим систему

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,k} \\ a_i\Big(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\Big)\Big(\frac{1}{k} + \lambda_{i+1}\Big) - \lambda_i + \lambda_{k+i} = \frac{1}{k}, i = \overline{1,k-1} \\ a_k\Big(f_k(x_k) + x_k f_k'(x_k)\Big)\Big(\frac{1}{k} + \lambda_1\Big) - \lambda_k + \lambda_{2k} = \frac{1}{k}, \\ \lambda_1\Big(x_1 - a_k x_k f_k(x_k)\Big) = 0, \\ \lambda_{i+1}\Big(x_{i+1} - a_i x_i f_i(x_i)\Big) = 0, i = \overline{1,k-1}, \\ \lambda_{k+i} x_i = 0, i = \overline{1,k}, \\ x_1 - a_k x_k f_k(x_k) \leqslant 0, \\ x_{i+1} - a_i x_i f_i(x_i) \leqslant 0, i = \overline{1,k-1}, \\ -x_i \leqslant 0, i = \overline{1,k} \end{cases} \tag{6}$$

Для внутренней точки области $D_1 \cap D$ система (6) эквивалентна системе (4).

Для нахождения граничных точек максимума делаем активными соответствующие ограничения, т.е. $g_i(X) = 0$. Например, граничная точка максимума X^1, для которой

$g_{j+1}(X^1) = 0, g_i(X^1) < 0, i = \overline{1,2k}, i \neq j+1$, должна удовлетворять одной из двух систем уравнений

$$\begin{cases} a_i\Big(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\Big) = 1, i = \overline{1,k}, i \neq j, i \neq j+1, \\ a_{j+1} a_j\Big(f_j(x_j) + x_j f_j'(x_j)\Big)\Big(f_{j+1}\Big(a_j x_j f_j(x_j)\Big) + a_j x_j f_j(x_j) f_{j+1}'\Big(a_j x_j f_j(x_j)\Big)\Big) = 1, \\ a_j\Big(f_j(x_j) + x_j f_j'(x_j)\Big) \leq 1, \\ a_{j+1}\Big(f_{j+1}\Big(a_j x_j f_j(x_j)\Big) + a_j x_j f_j(x_j) f_{j+1}'\Big(a_j x_j f_j(x_j)\Big)\Big) \geq 1. \end{cases} \tag{7}$$

при $j = \overline{1, k-1}$ или

$$\begin{cases} a_i\biggl(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\biggr) = 1, i = \overline{2, k-1}, \\ a_1 a_k\biggl(f_k(x_k) + x_k f_k'(x_k)\biggr)\biggl(f_1\biggl(a_k x_k f_k(x_k)\biggr) + a_k x_k f_k(x_k) f_1'\biggl(a_k x_k f_k(x_k)\biggr)\biggr) = 1, \\ a_k\biggl(f_k(x_k) + x_k f_k'(x_k)\biggr) \le 1, \\ a_1\biggl(f_1\biggl(a_k x_k f_k(x_k)\biggr) + a_k x_k f_k(x_k) f_1'\biggl(a_k x_k f_k(x_k)\biggr)\biggr) \ge 1. \end{cases} \tag{8}$$

при $j = k$.

Пусть, например, точка $(x_1^{00}, x_2^{00}, \ldots, x_k^{00})$ — решение системы (7), из которой следует, что

$$f_j(x_j^{00}) + x_j^{00} f_j'(x_j^{00}) > 0, f_{j+1}\biggl(a_j x_j^{00} f_j(x_j^{00})\biggr) + a_j x_j^{00} f_j(x_j^{00}) f_{j+1}'\biggl(a_j x_j^{00} f_j(x_j^{00})\biggr) > 0.$$

Преобразуем систему (7) к виду

$$\begin{cases} a_i = \biggl(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)\biggr)^{-1}, i = \overline{1, k}, i \ne j, i \ne j+1, \\ a_{j+1} = \frac{1}{a_j}\biggl(\biggl(f_j(x_j) + x_j f_j'(x_j)\biggr)\biggl(f_{j+1}(x_{j+1}) + x_{j+1} f_{j+1}'(x_{j+1})\biggr)\biggr)^{-1}, \\ a_j\biggl(f_j(x_j) + x_j f_j'(x_j)\biggr) \le 1, \\ a_{j+1}\biggl(f_{j+1}(x_{j+1}) + x_{j+1} f_{j+1}'(x_{j+1})\biggr) \ge 1, \\ x_{j+1} = a_j x_j f_j(x_j). \end{cases}$$

Правые части первых $k-1$ уравнений являются монотонно возрастающими функциями в области существования решения системы. Значит, единственное решение $(x_1^{00}, x_2^{00}, \ldots, x_k^{00})$ легко найти численно для каждого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Если $X^0 \in D_1$ (что означает $X^0 \in D_1 \cap D$), то X^0 — глобальный максимум. Если $X^0 \notin D_1$, то выбор стратегии промысла будет определяться следующими возможными ситуациями:

а) не выполняется одно из условий вида $x_1^0 < a_k x_k^0 f_k(x_k^0)$, $x_{i+1}^0 < a_i x_i^0 f_i(x_i^0)$, $i = \overline{1, k-1}$;

б) не выполняется несколько условий вида $x_1^0 < a_k x_k^0 f_k(x_k^0)$, $x_{i+1}^0 < a_i x_i^0 f_i(x_i^0)$, $i = \overline{1, k-1}$.

В случае а) исследуем на экстремум функцию z на соответствующей границе, описываемой одним из уравнений $x_1 = a_k x_k f_k(x_k)$, $x_{i+1} = a_i x_i f_i(x_i)$, $i = \overline{1, k-1}$.

В случае б) исследуем на экстремум функцию z на каждой из соответствующих границ. Как только будет найдена точка экстремума на одной из границ, принадлежащая области $D_1 \cap D$, делаем вывод, что это точка глобального максимума на данной границе. Если точки экстремума на каждой из двух рассматриваемых смежных границ, описываемых уравнениями $x_i = a_{i-1} x_{i-1} f_{i-1}(x_{i-1})$ и $x_{i+1} = a_i x_i f_i(x_i)$ соответственно, не принадлежат области $D_1 \cap D$,то вновь возвращаемся к рассмотрению указанных выше случаев для новых точек экстремума (т.е. исследуем функцию на экстремум на границе, описываемой системой уравнений $x_i = a_{i-1} x_{i-1} f_{i-1}(x_{i-1})$ и $x_{i+1} = a_i x_i f_i(x_i)$), пока не будет найдена точка экстремума, принадлежащая области $D_1 \cap D$.

Подытоживая сказанное выше, приведем алгоритм нахождения оптимальной стратегии промысла для исследуемой популяции.

1)Вычислить произведение $\prod_{i=1}^{k} a_i$. Если $\prod_{i=1}^{k} a_i \leq 1$, то популяция вырождается. В этом случае либо вылавливаем по возможности всех особей, либо искусственно поддерживаем численность популяции на нужном уровне. Если $\prod_{i=1}^{k} a_i > 1$, то переход к пунктам 2,3.

2)Решив систему,(4) найти точку X^0.

3) Найти соответствующую точке X^0 долю изъятия для каждого периода, используя систему (2). Если $X^0 \in D_1$(что означает $X^0 \in D_1 \cap D$), то X^0 — точка глобального максимума и стратегия определяется найденными долями изъятия. Если $X^0 \notin D_1$, то исследуем соответствующие границы, а именно решаем системы (7) или (8), которые уже частично решены при нахождении точки X^0.

4) Среди множества точек $X_1, X_2, \ldots, X_l$, где X_i — точка глобального максимума на границе, выбранной согласно утверждению 3 $x_{i+1} = a_i x_i f_i(x_i)$, выбираем точку глобального максимума путем сравнения значений функций в этих точках.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации равновесного промысла для модели динамики численности популяции с двумя периодами размножения, в случае, когда связь между численностями в смежных поколениях описывается кривой Риккера $N_{k+1} = aN_k e^{-cN_k}$ (или $x_{k+1} = ax_k e^{-x_k}$, где $x = cN$).

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = a_2 x_{n,2} e^{-x_{n,2}}(1-u_2), \\ x_{n+1,2} = a_1 x_{n+1,1} e^{-x_{n+1,1}}(1-u_1), \end{cases} \tag{9}$$

где $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Для периодически равновесного значения численности популяции ($x_{n+1,i} = x_{n,i} = x_i$) система (9) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_2 x_2 e^{-x_2}(1-u_2), \\ x_2 = a_1 x_1 e^{-x_1}(1-u_1). \end{cases} \tag{10}$$

Равновесный уровень изъятия задается функцией:

$$z(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(a_2 x_2 e^{-x_2} + a_1 x_1 e^{-x_1} - x_1 - x_2).$$

Критическая точка (x_1^0, x_2^0) согласно (4) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 = \frac{e^{x_1^0}}{1-x_1^0}, \\ a_2 = \frac{e^{x_2^0}}{1-x_2^0}. \end{cases} \tag{11}$$

Поскольку $x^* = 1$,то $x_1^0 < 1, x_2^0 < 1$. Соответствующие доли изъятия вычисляются по формулам

$$\begin{cases} u_1^0 = 1 - \frac{x_1^0 e^{x_2^0}}{a_2 x_2^0} = 1 + x_1^0 - \frac{x_1^0}{x_2^0}, \\ u_2^0 = 1 - \frac{x_2^0 e^{x_1^0}}{a_1 x_1^0} = 1 + x_2^0 - \frac{x_2^0}{x_1^0}, \end{cases}$$

Область существования оптимального значения функции улова имеет вид

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : x_i \leq 0, i = 1, 2, 0 \leq \frac{x_1 e^{x_2}}{a_2 x_2} \leq 1, 0 \leq \frac{x_2 e^{x_1}}{a_1 x_1} \leq 1\}$$

Согласно (7) или (8) экстремум при условиях $u_1 = 0, u_2 = 0$ есть решение следующих систем соответственно.

$$\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 e^{-x_1}, \\ a_1 a_2 (1-x_1)(1 - a_1 x_1 e^{-x_1}) e^{-x_1 - a_1 x_1 e^{-x_1}} = 1, \\ a_1 (1-x_1) e^{-x_1} \leq 1, \\ a_2 (1 - a_1 x_1 e^{-x_1}) e^{-a_1 x_1 e^{-x_1}} \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_2 x_2 e^{-x_2}, \\ a_1 a_2 (1-x_2)(1-a_2 x_2 e^{-x_2}) e^{-x_2 - a_2 x_2 e^{-x_2}} = 1, \\ a_2(1-x_2)e^{-x_2} \leq 1, \\ a_1(1-a_2 x_2 e^{-x_2}) e^{-a_2 x_2 e^{-x_2}} \geq 1. \end{cases} \tag{13}$$

Определим границы области D_1 в координатной плоскости (x_1^0, x_2^0), точнее на единичном квадрате этой плоскости. Уравнение границ: $x_1^0 = a_2 x_2^0 e^{-x_2^0}, x_2^0 = a_1 x_1^0 e^{-x_1^0}$.

Учитывая соотношения (11), получаем

$$x_1^0 = \frac{x_2^0}{1-x_2^0}, x_2^0 = \frac{x_1^0}{1-x_1^0}. \tag{14}$$

Графики кривых (14), ограничивающих область D_1, приведены на рисунке 1.

Учитывая (11), можно отобразить область D_1 из координатной плоскости x_1^0, x_2^0 в плоскость a_1, a_2.Границы области D_1 в плоскости a_1, a_2 имеют асимптоты

$$a_i = 2\sqrt{e}, i = 1, 2.$$

Рис. 1. Область D_1 в координатах x_1^0, x_2^0.

Графики кривых, ограничивающих область D_1 в плоскости a_1, a_2 приведены на рисунке 2. Кроме того, на этом рисунке приведена кривая $a_1 a_2 = 1$, ограничивающая область существования нетривиального равновесия популяции.

Если точка (x_1^0, x_2^0) лежит вне области D_1, но $a_1 a_2 > 1$, то максимум равновесного улова приходится искать на границах $u_1 = 0$ $(x_2 = a_1 x_1 e^{-x_1})$ или $u_2 = 0$ $(x_1 = a_2 x_2 e^{-x_2})$. В первом случае соответствующие значения равновесных численностей удовлетворяют системе уравнений (12), во втором — (13).

Единственное решение (x_1^{00}, x_2^{00}) системы (12) или (13) может быть найдено численно для каждой пары (a_1, a_2). Согласно решению, например системы (12), доли изъятия находятся по формулам

$$u_1^{00} = 0, u_2^{00} = 1 - \frac{x_1^{00} e^{x_2^{00}}}{a_2 x_2^{00}} = 1 - \frac{e^{x_1^{00} + x_2^{00}}}{a_1 a_2}.$$

Рис. 2

2. Устойчивость популяции при равновесном промысле

Рассмотрим вопрос об устойчивости положения равновесия в точке максимума функции z. Положение равновесия является локально устойчивым в том случае, когда отклонения (возможно достаточно малые) от этого положения со временем убывают, и неустойчивым, когда эти отклонения возрастают.

Введем обозначения

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = a_k x_{n,k} f_k(x_{n,k})(1-u_k^0) = G_k(x_{n,k}); \\ x_{n+1,2} = a_1 x_{n+1,1} f_1(x_{n+1,1})(1-u_1^0) = G_1(x_{n+1,1}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1,k} = a_{k-1} x_{n+1,k-1} f_{k-1}(x_{n+1,k-1})(1-u_{k-1}^0) = G_{k-1}(x_{n+1,k-1}). \end{cases}$$

Тогда для периодически равновесного значения численности популяции система примет вид

$$\begin{cases} x_1 = a_k x_k f_k(x_k)(1-u_k^0) = G_k(x_k); \\ x_2 = a_1 x_1 f_1(x_1)(1-u_1^0) = G_1(x_1); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = a_{k-1} x_{k-1} f_{k-1}(x_{k-1})(1-u_{k-1}^0) = G_{k-1}(x_{k-1}). \end{cases}$$

Обозначим отклонения численности от оптимального положения равновесия в n-м промежутке времени j-м периоде $\varphi_{n,j} = x_{n,j} - x_j^0$. Воспользовавшись теоремой Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1,1} = x_{n+1,1} - x_1^0 = G_k(x_{n,k}) - G_k(x_k^0) = G_k'(y_{n,k})(x_{n,k} - x_k^0) = G_k'(y_{n,k})\varphi_{n,k} = \\ = G_k'(y_{n,k})(G_{k-1}(x_{n,k-1}) - G_{k-1}(x_{k-1}^0)) = G_k'(y_{n,k})G_{k-1}'(y_{n,k-1})\varphi_{n,k-1} = \\ = G_k'(y_{n,k})G_{k-1}'(y_{n,k-1})G_{k-2}'(y_{n,k-2})\varphi_{n,k-2} = \ldots = \varphi_{n,1}\prod_{i=1}^{k} G_i'(y_{n,i}) = \\ = G_k'(y_{n-1,k})\varphi_{n-1,k}\prod_{i=1}^{k} G_i'(y_{n,i}) = \ldots = \varphi_{n-1,1}\prod_{i=1}^{k}(G_i'(y_{n,i})G_i'(y_{n-1,i})), \end{aligned}$$

где $y_{n,i}$ — некоторое значение численности, лежащее между $x_{n,i}$ и x_i^0.

Если выполняются неравенства $|G_i'(x_i^0)| < 1, i = \overline{1,k}$, то в силу непрерывности функций $G_i'(x)$ существуют окрестности точек $x_i^0, i = \overline{1,k}$, для которых $|G_i'(x)| < 1$. При достаточно малых отклонениях от оптимального положения равновесия $x_{n,i}$ и, соответственно, $y_{n,i}$ лежат в этой окрестности, поэтому $|G_i'(y_{n,i})| < 1$, а значит $|\prod_{i=1}^{k} G_i'(y_{n,i})G_i'(y_{n-1,i})| < 1$.

Вычислим значения $G_i'(x_i^0), i = \overline{1,k}$.

$$G_i'(x_i) = a_i(1-u_i^0)(f_i(x_i) + x_i f_i'(x_i)), i = \overline{1,k}.$$

Отсюда $|G_i'(x_i^0)| = |(1-u_i^0)| < 1, i = \overline{1,k}$ в силу выполнения этого неравенства для всех точек области D_1. Следовательно,

$|\varphi_{n+1,1}| < |\varphi_{n,1}|, |\varphi_{n,k}| < |\varphi_{n-1,k}|, \ldots, |\varphi_{n,2}| < |\varphi_{n-1,2}|$. И точка x_i^0 локально устойчива.

Аналогичные рассуждения можно провести и для $u_i = u_i^{00}$, $i = \overline{1,k}$.

Таким образом, равновесная численность популяции при оптимальном промысле (при оптимальных долях изъятия, обеспечивающих максимум улова) оказывается устойчивой.

3. Оптимизация промысла при постоянной доле изъятия для обобщенной модели Риккера

При постоянной стратегии промысла $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = u$ функция равновесного улова для обобщенной модели Риккера примет вид

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_k, u) = \frac{u}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i x_i e^{-x_i}. \tag{15}$$

Система равенств (2) задает соотношения между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_k, u$.

$$\begin{cases} x_1 = a_k x_k e^{-x_k}(1-u), \\ x_2 = a_1 x_1 e^{-x_1}(1-u), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_k = a_{k-1} x_{k-1} e^{-x_{k-1}}(1-u). \end{cases} \tag{16}$$

Если $u = 1$, то $x_i = 0, i = \overline{1,k}$. В этом случае $z = 0$.

Пусть $u \neq 1$. Исследуем на максимум функцию (15) при ограничениях.

$$\begin{cases} x_1 = a_k x_k e^{-x_k}(1-u), \\ x_{i+1} = a_i x_i e^{-x_i}(1-u), i = \overline{1,k-1} \\ 0 \le u < 1, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{17}$$

Утверждение 4. *Точка глобального максимума функции (15) при ограничениях (17) есть решение системы*

$$\begin{cases} x_1 = a_k x_k e^{-x_k}(1-u), \\ x_{i+1} = a_i x_i e^{-x_i}(1-u), i = \overline{1,k-1} \\ \prod_{i=1}^{k} a_i = \dfrac{e^{ku}}{(1-u)^k}. \end{cases} \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заданную ограничениями (17) область в координатном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, u$ обозначим M. Сведем задачу к поиску максимума в более широкой области и докажем, что найденное максимальное значение является глобальным максимумом функции (15) в области M.

Функцию равновесного улова можно записать в виде

$$z = \frac{u}{k(1-u)} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Перемножая почленно уравнения системы (16), находим

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = Ln\Big((1-u)^k \prod_{i=1}^{k} a_i\Big).$$

Заметим, что система (17) имеет решение при $\prod_{i=1}^{k} a_i \ge 1$. Таким образом, получим

$$z(u) = \frac{uLn\Big((1-u)^k \prod_{i=1}^{k} a_i\Big)}{k(1-u)}.$$

Критические точки удовлетворяют уравнению

$$\prod_{i=1}^{k} a_i = \frac{e^{ku}}{(1-u)^k}. \tag{19}$$

Покажем, что уравнение (19) имеет единственное решение $u = u^0$ в промежутке $0 \le u < 1$. Функция $t(u) = \frac{e^{ku}}{(1-u)^k}$ монотонно возрастает на промежутке $0 \le u < 1$, так как $t'(u) = \frac{ke^{ku}(2-u)}{(1-u)^{k+1}} > 0$ при $0 \le u < 1$. Причем, $t(u) \ge 1$ при $0 \le u < 1$. Значит, при $\prod_{i=1}^{k} a_i \ge 1$ уравнение (19) имеет единственное решение $u = u^0$ в промежутке $0 \le u < 1$.

В области $0 \le u < 1$ функция $z(u)$ вогнута, следовательно u^0 — точка глобального максимума функции $z(u)$ в этой области.

Рассмотрим вопрос о существовании решения системы (18) в области M. Покажем, что при фиксированном $u = u^0$ система (17) имеет нетривиальное решение. Введем обозначения $b_i = a_i(1-u^0), i = \overline{1,k}$. Первые уравнения системы (17) примут вид

$$\begin{cases} x_1 = b_k x_k e^{-x_k}, \\ x_{i+1} = b_i x_i e^{-x_i}, i = \overline{1, k-1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \quad x_1 = \prod_{i=1}^{k} b_i x_1 e^{-x_1 - b_1 x_1 e^{-x_1} - b_1 b_2 x_1 e^{-x_1 - b_1 x_1 e^{-x_1}} - \dots}, \\ x_{i+1} = b_i x_i e^{-x_i}, i = \overline{1, k-1} \end{cases} \tag{20}$$

Пусть $x_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-x_1 - b_1 x_1 e^{-x_1} - b_1 b_2 x_1 e^{-x_1 - b_1 x_1 e^{-x_1}} - \dots} = 0$. Чтобы доказать существование решения этого уравнения при $x_1 > 0$ в силу непрерывности функции $\psi(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t - b_1 t e^{-t} - b_1 b_2 t e^{-t - b_1 t e^{-t}} - \dots}$ достаточно показать, что существуют значения t_1 и t_2 такие, что

$\psi(t_1) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t_1 - b_1 t_1 e^{-t_1} - b_1 b_2 t_1 e^{-t_1 - b_1 t_1 e^{-t_1}} - \dots} < 0$,

$\psi(t_2) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t_2 - b_1 t_2 e^{-t_2} - b_1 b_2 t_2 e^{-t_2 - b_1 t_2 e^{-t_2}} - \dots} > 0$.

Так как

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t - b_1 t e^{-t} - b_1 b_2 t e^{-t - b_1 t e^{-t}} - \dots} \right) = 1,$$

существует t_2 такой, что $\psi(t_2) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t_2 - b_1 t_2 e^{-t_2} - b_1 b_2 t_2 e^{-t_2 - b_1 t_2 e^{-t_2}} - \dots} > 0$.

При $t > 0$ $e^{-t - b_1 t e^{-t} - b_1 b_2 t e^{-t - b_1 t e^{-t}} - \dots} < 1$, а значит выполнение неравенства

$1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t - b_1 t e^{-t} - b_1 b_2 t e^{-t - b_1 t e^{-t}} - \dots} < 0$ возможно в случае $\prod_{i=1}^{k} b_i > 1$. Последнее неравенство следует из уравнения (19). Действительно, $\prod_{i=1}^{k} b_i = \prod_{i=1}^{k} a_i (1-u^o)^k = e^{ku^0} > 1$ при $0 < u^0 < 1$. Следовательно, при $0 < u^0 < 1$ $\psi(0) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i < 0$. Значит, существует t_1 такой, что $\psi(t_1) = 1 - \prod_{i=1}^{k} b_i e^{-t_1 - b_1 t_1 e^{-t_1} - b_1 b_2 t_1 e^{-t_1 - b_1 t_1 e^{-t_1}} - \dots} < 0$ в силу непрерывности функции $\psi(t)$.

Остальные уравнения системы (20) $x_{i+1} = b_i x_i e^{-x_i}$, $i = \overline{1, k-1}$ имеют положительные решения $x_{i+1}(x_i)$, $i = \overline{1, k-1}$ в силу свойств функции $w(t) = b_i t e^{-t}$.

Таким образом, решение системы (18) есть точка глобального максимума функции (15) при ограничениях (17).

Утверждение доказано.

Итак, максимальное значение функции улова вычисляется по формуле

$$z(u^0) = \frac{(u^0)^2}{(1-u^0)^2},$$

где u^0 находится из уравнения (19).

Исследование равновесной численности на устойчивость при воздействии оптимального промысла проводится аналогично рассуждениям, описанным в пункте 2. Вычислив

$$|\prod_{i=1}^{k} G_i'(x_i^0)| = \prod_{i=1}^{k} |1 - x_i^0|$$

и учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^0 = ku^0,$$

делаем вывод, что равновесная численность популяции с двумя периодами генерации при оптимальном промысле оказывается локально устойчивой. Для популяции с периодом размножения больше двух можно указать достаточное условие локальной устойчивости

$$\prod_{i=1}^{k} a_i < \frac{e^2}{(1-\frac{2}{k})^k}.$$

Список литературы

[1] Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Владивосток, Дальнаука, 1992, 124 с.

[2] Гимельфарт А.А., Гинзбург А.Р., Полуэктов Р.А. и др. Динамическая теория биологических популяций. Под редакцией Полуэктова Р.А. Москва. Наука, 1974, 456 с.

[3] Скалецкая Е. И. Оптимальная стратегия управления эксплуатируемой популяцией с циклически меняющимся параметром . Математическое моделирование в популяционной экологии. Владивосток, ДВНЦ АНСССР, 1985, 72–80 с.

[4] Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности и оптимизация промысла. Москва. Наука, 1979, 166 с.

[5] Фрисман Е.Я., Луппов С.П., Ашихмина Е.В. Математическая модель динамики численности локальной популяции, подверженной сезонному промыслу. Математическое моделирование в популяционной экологии. Владивосток, ДВНЦ АНСССР, 1985, 72–80 с.

[6] Х. Таха. Введение в исследование операций. Книга 2. Москва, Мир, 1985, 496 с.

Представлено в Дальневосточный математический сборник в окончательной форме 15 ноября 2003 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00065, а также программы ОБН РАН “Биоресурсы” и конкурсных проектов ДВО РАН № 03-1-0-03-32, № 03-3-А-01-151.

E.D. Emtseva, E.Ya. Frisman, Optimization of a craft for a population at a periodic modification of exterior conditions. Far Eastern Mathematical Journal, 2003. v. 4, № 1, pp. 304–315.

SUMMARY

The problem of optimization of a periodically equilibrium craft is solved in the given article.The necessary and sufficient conditions of existence of maximum periodic counterbalanced extraction are described. The proposed strategy include variable and constant part of extraction.The results are verified for generalized Rifker model with two periods of generation.