Р. С. Макин, О гомоклинических траекториях эволюционных уравнений,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 479–489

https://www.mathnet.ru/de11258

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 479–489

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

О ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. Р. С. Макин

1. Если у автономной динамической системы (ДС) имеется гомоклиническая траектория состояния равновесия, то при малых по времени периодических возмущениях она может расщепиться с образованием в ее окрестности "грубой" гомоклинической траектории гиперболической периодической орбиты. Это в свою очередь означает существование у возмущенной ДС нетривиального гиперболического множества [1], гомеоморфного канторову совершенному множеству.

Впервые достаточные условия грубого расщепления сформулированы для аналитических двумерных ДС [2]. В дальнейшем в ряде работ эти результаты установлены для дважды дифференцируемых ДС [3, 4]. Периодические возмущения гомоклинических траекторий бесконечномерных эволюционных уравнений впервые рассмотрены в работе [5]. Сформулированные в [5] условия расщепления требуют информации о глобальном поведении траекторий невозмущенного уравнения, что трудно проверяемо. Можно сформулировать другие достаточные условия грубого расщепления гомоклинической траектории бесконечномерного эволюционного уравнения при малых периодических возмущениях, которые носят локальный характер и легче поддаются проверке.

2. В вещественном банаховом пространстве W с нормой $\|\cdot\|$, порождаемой скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, рассматривается эволюционное уравнение

$$\frac{du}{dt} = A_0(u) + \varepsilon\tilde{A}_1(u;t), \quad u(t_0) = u_0, \quad \varepsilon \geq 0, \tag{1}$$

неавтономное слагаемое $\tilde{A}_1(u;t) = \tilde{A}_1(u;T+t)$ периодично по t с периодом $T>0$. Класс исследуемых задач вида (1) определим с помощью системы условий $A_1)-A_5)$. В качестве частного случая этот класс уравнений включает в себя системы квазилинейных уравнений в частных производных с линейной главной частью и, возможно, непустым существенным спектром.

A_1). i) Слагаемое $A_0(u) = Au+B(u)$, где $A: W\to W$ – ограниченный линейный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)(\subset W)$, порождающий однопараметрическую непрерывную полугруппу (группу);

ii) нелинейные отображения $B(u): W\to W$; $\tilde{A}_1: W\times S^1 \to W$, $S^1 = \mathcal{R}/(\operatorname{mod} T)$, имеют класс гладкости C^∞. При этом, возможно, $B(0)=0$, $DB(0)=0$, $D^2B(0)=0$; $DB(u)$ – производная Фреше в точке $u(\in W)$;

iii) уравнение (1) порождает в $W\times S^1$ локальный по времени полупоток (поток) диффеоморфизмов F_t^ε, $F_t^0 \equiv F_t$.

В этом можно убедиться при помощи метода последовательных приближений. Предполагается, что F_t^ε определен $\forall t\in\mathcal{R}$ и достаточно малых $\varepsilon>0$.

A_2). i) Неавтономное слагаемое в правой части уравнения (1) имеет вид $\tilde{A}_1(u;t) = A_1u + H(t)+G(u;t)$, где $A_1: W\to W$, $H(t) = H(t+T)$, $G(u;t) = G(u;t+T)$, $T>0$, $G(0;t)=0$;

ii) линеаризованное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = Av + \varepsilon A_1 v + \varepsilon(H(t)+G'(t))v \tag{2}$$

имеет T-периодическое решение $v(t,\varepsilon)$ $\forall\varepsilon\geq 0$, причем $\|v(t;\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$, $A'\equiv DA$.

Следующая группа условий определяет тип нулевого состояния равновесия невозмущенного $(\varepsilon=0)$ уравнения (1).

A_3). Для семейства операторов $A(\varepsilon) = A + \varepsilon A_1 + \varepsilon G'$

i) спектр оператора A_0 $\sigma(A(0)) = \{\lambda\} \cup \{\mu\} \cup \sigma_0$, $\sigma_0 = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0; \lambda \neq 0\}$; $\lambda(> 0)$, $\mu(> 0)$ – простые вещественные собственные значения (с.зн.) оператора $A(0)$;

ii) спектр $\sigma(A(\varepsilon)) = \{\lambda_\varepsilon\} \cup \{\mu_\varepsilon\} \cup \sigma_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, где λ_ε, μ_ε – простые вещественные с.зн. при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |\lambda_\varepsilon - \lambda| + |\mu_\varepsilon - \mu| = 0$.

Существование с.зн. λ_ε, μ_ε следует из теории возмущений спектра. Множество σ_ε состоит из точек спектра с отрицательной действительной частью и

$$c_2\varepsilon \leq (\mathrm{dist}(\exp(\sigma_\varepsilon), S)) \leq c_1\varepsilon, \tag{3}$$

где S – единичная окружность на комплексной плоскости, $\exp(\sigma_\varepsilon)$ – образ множества σ_ε относительно отображения $\exp : \lambda \to e^\lambda$, $\exp : C \to C$.

A_4). Состояние равновесия невозмущенного ($\varepsilon = 0$) семейства операторов $A(0)$ имеет гомоклиническую траекторию $u_0(t)$, т.е. $\lim\limits_{t \to \pm\infty} u_0(t) = 0$, $A(0)u_0 \in W$ $\forall t \in \mathcal{R}$. Предполагается, что при $t \to \pm\infty$ гомоклиническая траектория стремится к нулю, касаясь собственного подпространства $\mathcal{Z}_s(A(0))$ оператора $A(0)$, отвечающего с.зн. μ. В свою очередь при $t \to -\infty$ $u_0(t) \to 0$, касаясь собственного подпространства $\mathcal{Z}_u(A(0))$, отвечающего с.зн. λ. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{t \to \infty} \|u_0(t)\| \exp[-(\mu + \delta)t] = 0; \quad \lim_{t \to -\infty} \|u_0(t)\| \exp[-(\lambda + \delta)t] = 0 \quad \forall \delta > 0.$$

A_5). Будем считать, что существуют кососимметрическая, непрерывная, слабо невырожденная, билинейная форма $\Omega : W \times W \to \mathcal{R}$ (назовем ее симплектической) и гладкая функция $h : W \to \mathcal{R}$ такие, что $\Omega(A_0(v), u) = Dh(v)u$ $\forall v \in D(A)$, $u \in W$.

Сделаем несколько полезных замечаний к условиям A_1) – A_5). Прежде всего отметим, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ гомоклиническая траектория может расщепиться таким образом, что устойчивое и неустойчивое многообразия периодической гиперболической орбиты γ_ε, рождающейся из состояния равновесия невозмущенного уравнения, будут иметь точку трансверсального пересечения. Достаточные условия такого расщепления для уравнений вида (1) предполагают, что гомоклиническая траектория лежит в некотором инвариантном (симплектическом) двумерном подмногообразии. Это предположение является существенным и фактически сводит задачу к двумерному случаю, рассмотренному в работе [2].

Из условия A_1i) следует, что связанная с задачей (1) автономная на $W \times S^1$ система

$$\frac{du}{dt} = A_0(u) + \varepsilon \tilde{A}_1(u; \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \tag{4}$$

имеет гладкий локальный полупоток (поток) $F_t^\varepsilon : W \times S^1 \to W \times S^1$. Иными словами, F_t^ε – гладкое отображение, определенное для малых $|t|$, непрерывное для всех $\varepsilon, t, u \in W$, $\theta \in S^1$; $\forall u_0 \in D(A)$ $t \to F_t^\varepsilon(u_0; \theta_0)$ является единственным решением задачи (4) с начальными условиями u_0, θ_0.

Из условия A_1ii) вытекает, что в окрестности нуля $\|B(u)\| \leq \mathrm{const} \cdot \|u\|^3$. В действительности это требование сгущения в нуле спектра оператора A. Если оно следует из других соображений, то требование $D^2B(0) = 0$ можно опустить.

Условие A_1iii) означает, что решение задачи (1) ((3)) не должно уходить на бесконечность (по норме) за конечное время.

Для конечномерных систем условие A_2i) может быть заменено следующим: единица не должна лежать в спектре e^{TA}, т.е. нет собственных значений оператора A, совпадающих с частотой вынуждающей силы. Для более общих гладких возмущений (T-периодических) возможны другие, более тонкие условия, не обязательно в форме A_2i). В ряде случаев в условии A_2ii) можно положить $G \equiv 0$. Этот член оставлен в общей теории, поскольку он появляется в ряде важных примеров.

Согласно условию A_3), оператор A_1 вносит положительный затухающий вклад, а неподвижная точка $p_0 = 0$ полупотока F_t^0 на симплектическом двумерном многообразии $\Sigma \subset W$

имеет гомоклиническую траекторию $u_0(t)$ и эта точка является седловой:

$$\frac{du_0(t)}{dt} = A(u_0(t)); \quad F_t^0(u_0(t)) = u_0(t).$$

Оценки (3) в условии A_3ii) гарантируют: a) справедливость неравенства $\|L_\varepsilon^{-1}\| \le \mathrm{const}/\varepsilon$, $L_\varepsilon = I - \exp[T(A + \varepsilon A_1)]$; b) малость возмущения спектра $\sigma(A_0 u)$ для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Условия A_4) и A_5) означают, что существует симплектическое двумерное многообразие Σ, инвариантное относительно F_t^0 и такое, что отображение Ω, ограниченное касательными векторами к Σ, определяет невырожденную билинейную форму. Ограничение F_t^0 на Σ порождается гладким векторным полем на Σ, т.е. динамика в пределах многообразия Σ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением. Заметим, что условие A_4) можно заменить подобным предположением о существовании гетероклинических орбит, связывающих две седловые точки, а существование трансверсальных гетероклинических орбит можно установить на основе изложенных ниже подходов.

3. Рассмотрим полупоток (поток) $F_t^\varepsilon : W \times S^1 \to W \times S^1$, порожденный уравнением (1). Пусть $\Pi : W \times S^1 \to W$ – каноническая проекция [6]. Определим отображение Пуанкаре для полупотока (потока) F_t^ε на сечении $W \times \{t_0\}$ $P_{t_0}^\varepsilon = \Pi(F_t^\varepsilon(u, t_0))$, $t_0 \in [0, T]$. Очевидно, что $P_{t_0}^0(0) = 0$, T-периодическим орбитам F_t^ε отвечают неподвижные точки $P_{t_0}^\varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия A_1)–A_5). Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственная неподвижная точка $u_\varepsilon(t_0)$ отображения $P_{t_0}^\varepsilon$ такая, что*

$$\sup_{t_0 \in [0,T]} \|u_\varepsilon(t_0)\| = O(\varepsilon).$$

При этом

$$\sigma(DP_{t_0}^\varepsilon(u_\varepsilon(t_0))) = \{\exp(T\tilde{\lambda}_\varepsilon(t_0))\} \cup \{T\tilde{\mu}_\varepsilon(t_0)\} \cup \tilde{\sigma}_\varepsilon(t_0),$$

где $\exp(T\tilde{\lambda}_\varepsilon(t_0))$, $\exp(T\tilde{\mu}_\varepsilon(t_0))$ *– простые вещественные с.зн. линеаризованного оператора $DP_{t_0}^\varepsilon$ (задачи (2)) в точке $u_\varepsilon(t_0)$, причем* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{t_0 \in [0,T]} \{|\tilde{\lambda}_\varepsilon(t_0) - \lambda| + |\tilde{\mu}_\varepsilon(t_0) - \mu|\} = 0$; $\tilde{\sigma}_\varepsilon(t_0)$ *– подмножество спектра, лежащее внутри круга радиуса $\rho(\varepsilon) < 1$, где $\rho(\varepsilon)$ не зависит от t, а λ, μ – простые с.зн. невозмущенного оператора $A(0)$.*

Доказательство следует схеме доказательства леммы 2 работы [7]. Прежде всего из условий A_1)–A_2) вытекает оценка

$$\sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|u(t, \varepsilon)\| \le c_1(\varepsilon)\varepsilon. \tag{5}$$

Рассмотрим шар $\mathcal{B}_\varepsilon(t_0)$ радиуса ε с центром в точке $v(t_0, \varepsilon)$ и отображение $P_{t_0}^\varepsilon$: $\mathcal{B}_\varepsilon(t_0) \to W$, $P_{t_0}^\varepsilon : u(t_0, \varepsilon) \to u(t_0 + T, \varepsilon)$. Из условий леммы вытекает, что $u(t_0, \varepsilon)$ – неподвижная точка отображения $P_{t_0}^\varepsilon$, если и только если она является неподвижной точкой отображения $F_{t_0}^\varepsilon : \mathcal{B}_\varepsilon(t_0) \to W$:

$$F_{t_0}^\varepsilon(u(t_0, \varepsilon)) = v(t_0, \varepsilon) + L_\varepsilon^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp[(T - s)(A + \varepsilon A_1)][B(u(s)) + \varepsilon G(u(s, \varepsilon), s)]\, ds. \tag{6}$$

В силу условия A_3ii) справедлива оценка $\|L_\varepsilon^{-1}\| \le c\varepsilon^{-1}$. Поскольку $u(t_0, \varepsilon) \in \mathcal{B}_\varepsilon(t_0)$ и имеет место оценка (5), то из (6) следует, что

$$\|F_{t_0}^\varepsilon(u(t_0, \varepsilon)) - v(t_0, \varepsilon)\| \le c\varepsilon^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} c_1(\varepsilon)[\|u(s, \varepsilon)\|^3 + \varepsilon\|u(s, \varepsilon)\|^2]\, ds \le c_2(\varepsilon)\varepsilon^2,$$

где $c_2(\varepsilon) \geq 0$ – непрерывная функция $\forall\varepsilon \geq 0$. Следовательно, $F^{\varepsilon}_{t_0}(\mathcal{B}_\varepsilon(t_0)) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(t_0)$ $\forall\varepsilon \geq 0$, $t_0 \in [0,T]$. Аналогично оценим производную Фреше отображения $F^{\varepsilon}_{t_0}$:

$$\|DF^{\varepsilon}_{t_0}(u(t_0,\varepsilon))\| \leq c_3(\varepsilon)\varepsilon, \quad u(t_0,\varepsilon) \in \mathcal{B}_\varepsilon(t_0), \tag{7}$$

где функция $c_3(\varepsilon) \geq 0$ непрерывна $\forall\varepsilon \geq 0$ и не зависит от t_0.

Из оценок (6), (7) вытекает, что $\forall t_0 \in [0,T]$ отображение $F^{\varepsilon}_{t_0} : \mathcal{B}_\varepsilon(t_0) \to \mathcal{B}_\varepsilon(t_0)$ сжимающее. Тем самым установлено существование неподвижной точки $u_\varepsilon(t_0)$ отображения $P^{\varepsilon}_{t_0}$.

Оценим расположение спектра оператора $DP^{\varepsilon}_{t_0}(u_\varepsilon(t_0))$. Отображение $P^{\varepsilon}_{t_0} : u(t_0,\varepsilon) \to$ $\to u(t_0+T,\varepsilon)$ определяется соотношением

$$u(t,\varepsilon) = \exp[(t-t_0)(A+\varepsilon A_1)]u(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp[(t-t_0)(A+\varepsilon A_1)][B(u(s,\varepsilon)) + \varepsilon\tilde{A}_1(u(s,\varepsilon),s)]\,ds.$$

Следовательно, $DP^{\varepsilon}_{t_0}(u_\varepsilon(t_0)) : w(t_0,\varepsilon) \to w(t_0+T,\varepsilon)$, где

$$w(t,\varepsilon) = \exp[(t-t_0)(A+\varepsilon A_1)]w(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp[(t-t_0-s)(A+\varepsilon A_1)]\times$$

$$\times[DB(u_\varepsilon(s))D\Pi F^{\varepsilon}_s(u_\varepsilon(s),s)w(s,\varepsilon) + \varepsilon DG(u_\varepsilon(s))D\Pi F^{\varepsilon}_s(u_\varepsilon(s),s)w(s,\varepsilon)]\,ds.$$

Воспользовавшись оценкой (7) и условиями A_1), A_2i), нетрудно показать, что

$$\sup_{t_0\in[0,T]} \|DP^{\varepsilon}_{t_0}(u_\varepsilon(t_0)) - \exp[T(A+\varepsilon A_1)]\| = O(\varepsilon^2).$$

Но в таком случае из условия A_3) и теории возмущений спектра [8] вытекает, что спектр оператора $DP^{\varepsilon}_{t_0}(u_\varepsilon(t_0))$ имеет вид (6), что завершает доказательство леммы.

По теореме об инвариантных многообразиях неподвижной точки диффеоморфизма (см. [6, § 5]) получаем, что неподвижная точка 0 отображения $P^0_{t_0}$ имеет одномерное устойчивое, одномерное неустойчивое инвариантные многообразия и центральное инвариантное многообразие коразмерности два. Из условия A_4) следует, что устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия отображения $P^0_{t_0}$ совпадают с гомоклинической траекторией невозмущенного уравнения.

Из леммы 1 и теоремы об инвариантных многообразиях неподвижной точки вытекает

Лемма 2. *В условиях леммы 1 гиперболическая неподвижная точка $u(t_0,\varepsilon)$ отображения $P^{\varepsilon}_{t_0}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ обладает единственными локальными инвариантными многообразиями: $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ – сильно устойчивым, $W^{u}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ – неустойчивым, причем такими, что:*

1) $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ и $W^{u}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ касаются в точке $u_\varepsilon(t_0)$ собственных подпространств оператора $DP^{\varepsilon}_{t_0}(u_\varepsilon(t_0))$ для с.зн. $\exp[T\tilde{\mu}_\varepsilon(t_0)] < 1$, $\exp[T\tilde{\lambda}_\varepsilon(t_0)] > 1$ соответственно;

2) $P^{\varepsilon}_{t_0}[W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))] \subset W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$, $(P^{\varepsilon}_{t_0})^{-1}[W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))] \subset W^{u}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(P^{\varepsilon}_{t_0})^n(u) - u_\varepsilon(t_0)\| \exp[-nT(\tilde{\mu}_\varepsilon(t_0)+\delta)] = 0$ $\forall u \in W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ и $\forall\delta > 0$;

4) $\lim\limits_{n\to-\infty} \|(P^{\varepsilon}_{t_0})^n(u) - u_\varepsilon(t_0)\| \exp[nT(-\tilde{\lambda}_\varepsilon(t_0)+\delta)] = 0$ $\forall u \in W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ и $\forall\delta > 0$;

5) $W^{u}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ равномерно $\forall t_0 \in [0,T]$ C^k-близко множеству $\{v_0(t) : t \leq t_*\}$ при $\varepsilon\to 0$ $\forall t_*$; $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ равномерно $\forall t_0 \in [0,T]$ C^k-близко множеству $\{v_0(t) : t \geq t_*\}$ при $\varepsilon \to 0$ $\forall t_*$, $k \in \mathcal{N}^+$.

Устойчивое инвариантное многообразие $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ неподвижной точки отображения $P^{\varepsilon}_{t_0}$ имеет коразмерность единица.

4. Рассмотрим вопрос о расщеплении гомоклинической траектории. Пусть $\gamma_\varepsilon(t)=(u_\varepsilon(t),t)$ – периодическая траектория полупотока $F^\varepsilon_{t_0}$; $W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$, $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$ и $W^u_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$ – устойчивое, сильно устойчивое и неустойчивое локальные инвариантные многообразия траектории γ_ε соответственно. В таком случае

$$W^s_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0)) = W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)\cap(W\times\{t_0\}),\quad W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0)) = W^{ss}_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)\cap(W\times\{t_0\}),$$

$$W^u_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0)) = W^u_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)\cap(W\times\{t_0\}),$$

и нас интересует поведение $W^s_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$, $W^u_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ при любых достаточно малых $\varepsilon>0$ и характер их пересечения. Везде далее отсутствие индекса loc означает рассмотрение глобального инвариантного многообразия.

Выберем точку $v_0\in\{v_0(t):t\in R\}\equiv\Gamma$, $v_0=v_0(0)$; пусть M – гиперплоскость в W коразмерности единица, проходящая через точку v_0 и трансверсально пересекающая гомоклиническую траекторию Γ. В силу леммы 2 (см. п. 3)) $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(u_\varepsilon(t_0))$ трансверсально пересекает гиперплоскость M в единственной точке $u_\varepsilon(t_0)$ при всех достаточно малых $\varepsilon>0$. Аналогично определяется точка $u_\varepsilon(t_0)$.

Рассмотрим функцию $\Delta_\varepsilon(t_0)=\Omega[A(v_0(0)),u^s_\varepsilon(t_0)-u^u_\varepsilon(t_0)]$. В работе [5] установлена лемма, позволяющая вычислить первый член разложения $\Delta_\varepsilon(t_0)$ по ε.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 равномерно по* $t\in[0,T]$ *справедливо разложение*

$$\Delta_\varepsilon(t_0)=-\mu(t_0)\varepsilon+O(\varepsilon^2),\quad \mu(t_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(A_0(v_0(t-t_0)),\tilde A_1(v_0(t-t_0),t))\,dt. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $u^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$ – решение задачи (1), удовлетворяющее условию

$$u^\alpha_\varepsilon(t_0,t_0)=u^\alpha_\varepsilon(t_0),\quad \alpha\in\{u,s\}.$$

Из условий $A_1)-A_3)$ можно найти, что $u^\alpha_\varepsilon(t,t_0)=v_0(t-t_0)+\varepsilon v^\alpha_1(t,t_0)+R_\alpha(t,t_0,\varepsilon)$, $\alpha\in\{u,s\}$, $\|R_\alpha(t,t_0,\varepsilon)\|\le c\varepsilon^2$, где при фиксированном t постоянная c не зависит от $t_0\in[0,T]$. Очевидно,

$$\frac{dv^\alpha_1}{dt}(t,t_0)=DA_0(v_0(t-t_0))v^\alpha_1(t,t_0)+\tilde A_1(t,v_0(t-t_0)),\quad \alpha\in\{u,s\}.$$

Рассмотрим $\Delta_\varepsilon(t,t_0)=\Omega[A_0(v_0(t-t_0)),u^s_\varepsilon(t,t_0)-u^u_\varepsilon(t,t_0)]$. Легко видеть, что $\Delta_\varepsilon(t_0)=$ $=\Delta^s_\varepsilon(t,t_0)-\Delta^u_\varepsilon(t,t_0)+R(t,t_0,\varepsilon)$, где $\Delta^\alpha_\varepsilon(t,t_0)=\Omega[A_0(v_0(t-t_0)),\varepsilon v^\alpha_1(t,t_0)]$, $\alpha\in\{u,s\}$, и остаточный член $R(t,t_0,\varepsilon)$ допускает при фиксированном t оценку $\|R(t,t_0,\varepsilon)\|\le c\varepsilon^2$ равномерно по $t_0\in[0,T]$. Функции $\Delta^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$, $\alpha\in\{u,s\}$, удовлетворяют соотношению

$$\frac{d\Delta^\alpha_\varepsilon}{dt}(t,t_0)=\Omega[DA_0(v_0(t-t_0))A_0(v_0(t-t_0)),\varepsilon v^\alpha_1(t,t_0)]+$$

$$+\Omega[A_0(v_0(t-t_0)),\varepsilon\{DA_0(v_0(t-t_0))\varepsilon v^\alpha_1(t,t_0)+\tilde A_1(v_0(t-t_0),t)\}],$$

которое в силу условия $A_5)$ эквивалентно соотношению

$$\frac{d\Delta^\alpha_\varepsilon}{dt}(t,t_0)=\Omega[A_0(v_0(t-t_0)),\varepsilon\tilde A_1(T,v_0(t-t_0))]. \tag{9}$$

Проинтегрируем соотношение (9) с $\alpha=s$ по t от t_0 до ∞ и с $\alpha=u$ по t от $-\infty$ до t_0, после чего сложим полученные выражения. В результате придем к требуемому разложению (8), что завершает доказательство леммы.

Пусть W – комплексное гильбертово пространство, неограниченный линейный оператор A порождает в W непрерывную полугруппу (группу) e^{tA}.

Лемма 4. *Пусть оператор* A *имеет полную систему корневых векторов* $\{p_k\}_1^\infty$, $Ap_n = \lambda_n p_n$, *причем среди с.зн.* $\{\lambda_i\}_1^\infty$ *лишь для конечного их числа* $\operatorname{Re}\lambda_k \neq 0$, *и пусть* $V(t)$ *– непрерывное семейство операторов,* $V(t) \in \overline{W}$, $t \in \mathcal{R}$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds < \infty, \quad \|V(t)p_k\| \le \frac{c}{\sqrt{k^2+1}}\|V(t)\|, \quad k \in \mathcal{N}^+.$$

Тогда уравнение

$$\frac{du}{dt} = (A + V(t))u \tag{10}$$

имеет решения $\varphi_k(t)$, $k \in \mathcal{N}^+$,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{k\in\mathcal{N}^+} \|\varphi_k(t)e^{-\lambda_k t} - p_k\| = 0, \tag{11}$$

и система векторов $\{\varphi_k(0)\}_1^\infty$ *будет полна в* W.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_k = \alpha$, $k \in \mathcal{N}^+$, тогда $\exp(tA) = S_1(t) + S_2(t)$, где $\forall u \in W$, $u = \sum_{k\ge1} c_k p_k$, справедливо

$$S_1(t) = \sum_{n:\operatorname{Re}\lambda_n<\alpha} c_n \exp(\lambda_n t)p_n, \quad S_2(t) = \sum_{n:\operatorname{Re}\lambda_n\ge\alpha} c_n \exp(\lambda_n t)p_n.$$

Тогда существуют c_1, c_2 такие, что $\forall\delta > 0$

$$\|S_1(t)\| \le c_1 \exp(\alpha\delta t), \quad t \ge 0, \quad \|S_2(t)\| \le c_2 \exp(\alpha t), \quad t \le 0.$$

Пусть $\psi_0(t) = p_k \exp(\lambda_k t)$ и

$$\psi_{\ell+1}(t) = p_k \exp(\lambda_k t) + \int\limits_a^t S_1(t-s)V(s)\psi_\ell(s)\,ds - \int\limits_t^\infty S_2(t-s)V(s)\psi_\ell(s)\,ds,$$

так что $(c_1+c_2)\int_a^\infty \|V(t)\|\,dt < 1/2$ для достаточно больших a. Установим справедливость неравенства

$$\|\psi_{\ell+1}(t) - \psi_\ell(t)\| \le c\cdot 2^{-(\ell+1)}(k^2+1)^{-1/2}\exp(\alpha t). \tag{12}$$

Пусть $\ell = 0$, тогда

$$\psi_1(t) - \psi_0(t) = \int\limits_a^t S_1(t-s)V(s)[p_k\exp(\lambda_k s)]\,ds - \int\limits_t^\infty S_2(t-s)V(s)[p_k\exp(\lambda_k s)]\,ds.$$

В силу условий леммы справедливы следующие оценки:

$$\|\psi_1(t) - \psi_0(t)\| \le c_1 \int\limits_a^t (k^2+1)^{-1/2}\exp[(\alpha-\delta)(t-s)]\exp(\alpha s)c\|V(s)\|\,ds +$$

$$+ c_2 \int\limits_t^\infty (k^2+1)^{-1/2} c\exp[\alpha(t-s)]\exp(\alpha s)\|V(s)\|\,ds \le \frac{c}{2}(k^2+1)^{-1/2}\exp(\alpha t).$$

Пусть оценка (12) справедлива для $\ell = n$, установим ее для $\ell = n+1$:

$$\|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)\| \le \int\limits_a^t c_1\exp[(\alpha-\delta)(t-s)]\|V(s)\|\,\|\psi_{n-1}(s)\|\,ds +$$

$$+\int\limits_t^\infty c_2\exp[\alpha(t-s)]\|V(s)\|\,\|\psi_n(s)-\psi_{n-1}(s)\|\,ds\le$$

$$\le c\cdot 2^n(k^2+1)^{-1/2}\left\{\int\limits_a^t \exp[(\alpha-\delta)(t-s)+\alpha s]\|V(s)\|\,ds+\int\limits_t^\infty \exp[\alpha(t-s)+\alpha s]\|V(s)\|\,ds\right\}\le$$

$$\le c\cdot 2^{-(n+1)}(k^2+1)^{-1/2}\exp(\alpha t).$$

Из (12) следует существование предельной функции $\varphi_k(t)$ такой, что $\|\varphi_k(t)\|\le c_3\exp(\alpha t)$, удовлетворяющей уравнению (10). Но в этом случае

$$\exp(-\alpha t)\|\varphi_k(t)-p_k\exp(\lambda_k t)\|\le 2c_1c_3\int\limits_a^t\exp[-\delta(t-s)]\|V(s)\|\,ds+2c_2c_3\int\limits_t^\infty\|V(s)\|\,ds\le$$

$$\le 2c_1c_3\exp\left(-\frac{\delta}{2}t\right)\int\limits_a^{t/2}\|V(s)\|\,ds+2c_3(c_1+c_2)\int\limits_{t/2}^\infty\|V(s)\|\,ds\to 0$$

равномерно по $k\in\mathcal{N}^+$ при $t\to\infty$. Тем самым установлено существование семейства функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ с асимптотическим поведением (11).

Пусть $\theta_k(t)=\exp(-\lambda_k t)\varphi_k(t)-p_k$, $k\in\mathcal{N}^+$. В силу $\psi_\ell(t)\to\varphi_k(t)$ при $\ell\to\infty$ можно утверждать, что $\xi_\ell(t)\equiv\exp(-\lambda_k t)\psi_\ell(t)-p_k\to\theta_k(t)$ при $\ell\to\infty$. Из неравенства (12) следует оценка $\|\xi_{\ell+1}(t)-\xi_\ell(t)\|\le 2^{-(\ell+1)}c(k^2+1)^{-1/2}$, откуда

$$\|\theta_k(t)\|\le 2c(k^2+1)^{-1/2}. \tag{13}$$

Операторы монодромии линейного уравнения (10) являются линейными изоморфизмами, поэтому для полноты системы векторов $\{\varphi_k(0)\}_1^\infty$ достаточно установить это свойство у системы $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ для некоторого $t\in\mathcal{R}$. Полнота системы $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ в свою очередь эквивалентна полноте системы $\{p_k+\theta_k(t)\}_1^\infty$. Пусть $\varepsilon(t)=\sum_{k\ge1}\|\theta_k(t)\|^2$ и в силу (13) $\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$. Определим оператор $E(t)(\in\overline{W})$ как $E(t)(\sum_{k\ge1}\alpha_kp_k)=\sum_{k\ge1}\alpha_k\theta_k(t)$, очевидно, $\|E(t)\|\le\varepsilon(t)$. Замыкание линейной оболочки системы $\{p_k+\theta_k(t)\}_1^\infty$ совпадает с образом W относительно оператора $I+E(t)$. Следовательно, для любых $t>0$, таких, что $\varepsilon(t)<1$, система $\{p_k+\theta_k(t)\}_1^\infty$ полна.

Замечание 1. Предложенный способ доказательства не является единственным. В работе [7] аналогичный результат установлен на основе спектральной теории операторов.

Замечание 2. Установленный результат является обобщением соответствующих результатов для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [9], гл. III, § 8).

Пусть $W^{cs}(0)$ – центральное инвариантное многообразие точки 0 отображения $P^0_{t_0}$, отвечающее части спектра $\sigma_0\cup\{\mu\}$. Если L – линейное подпространство W, то через L^Ω обозначим косоортогональное дополнение $L^\Omega=\{u:\Omega(u,v)\ \ \forall v\in L\}$. Напомним также, что $L_s=T_0W^{ss}_{\rm loc}(0)$, $L_u=T_0W^u_{\rm loc}(0)$, где T_v – касательное подпространство к многообразию в точке v. Назовем гомоклиническую траекторию $v_0(t)$ симметричной, если $DB(v_0(t))=$ $=DB(v_0(-t))$ $\forall t\in\mathcal{R}$. Пусть $\overline{W}$ и $\overline{A}$ – комплексификация пространства W и оператора A.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $A_1)$ – $A_5)$, операторы $\overline{A}$ и $\overline{DB(v_0(t))}$ удовлетворяют лемме 4 и форма Ω невырождена на подпространстве $L_u\oplus L_s$. Если гомоклиническая траектория $v_0(t)$ симметрична, функция $\mu_0(t)$ имеет невырожденный нуль, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ многообразия $W^s(u_\varepsilon(t_0))$ и $W^u(u_\varepsilon(t_0))$ неподвижной точки $u_\varepsilon(t_0)$ отображения $P^\varepsilon_{t_0}$ имеют точку трансверсального пересечения.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение в вариациях для гомоклинической траектории

$$\frac{dv}{dt} = Av + DB(v_0(t))v, \quad \dot{v_0}(0) = v_0. \tag{14}$$

В силу условий теоремы и леммы 4 гомоклиническая траектория симметрична и существует полная система векторов задачи (14), асимптотическое поведение которых при $t \to \pm\infty$ совпадает с асимптотическим поведением векторов задачи

$$\frac{dv}{dt} = Av, \quad v_0(0) = v_0.$$

Для упрощения выкладок будем рассматривать только собственные векторы задачи (14) $\varphi^u(t), \varphi^s(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots,$ что не теряет общности дальнейших рассуждений. Замыкание $\Pi(\varphi) = \{\varphi^u(0), \varphi^s(0), \varphi_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$ совпадает с пространством W. Решение $\varphi^u(t)$ отвечает с.зн. λ, $A\psi_u = \lambda\psi_u$, $\varphi^s(t)$ – с.зн. μ, $A\psi_s = \mu\psi_s$, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ – собственным (и в общем случае присоединенным) значениям из спектрального множества σ_0.

Произвольное аффинное подпространство L, проходящее через точку v_0, естественным образом отождествляется с подпространством $T_{v_0}W$. Далее не будем делать различия между подпространствами $T_{v_0}W$ и аффинными подпространствами, проходящими через точку v_0. Пусть $\Sigma_u = \Sigma'_u + v$, $\Sigma_s = \Sigma'_s + v$, $\Sigma = \Sigma' + v$, где Σ'_u, Σ'_s – подпространства, натянутые на векторы $\varphi^u(0)$, $\varphi^s(0)$ соответственно; $\Sigma' = \overline{\Pi}(\varphi)$. Рассмотрим $\Sigma'_u \oplus \Sigma'_s$. В силу леммы 4 $\theta_s(t) = \varphi^s(t)\exp(-\mu t) - p_s \to 0$, $\theta_u(t) = \varphi^u(t)\exp(-\lambda t) - p_u \to 0$ $\forall t \to \infty$. Форма Ω не вырождена на $L_u \oplus L_s$, тем самым $\Omega(p_u, p_s) \neq 0$, поэтому $\Omega(\varphi^u(0), \varphi^s(0)) = \Omega[\exp(-\lambda t)\varphi^u(t), \exp(-\mu t)\varphi^s(t)] = \Omega(\theta_u(t) + p_u, \theta_s(t) + p_s) \to \Omega(p_u, p_s) \neq 0$ $\forall \varepsilon \to 0$. Таким образом, $\Sigma'_u \oplus \Sigma'_s$ – двумерное симплектическое подпространство.

Покажем, что $(\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega} = \Sigma'$. Действительно, для невозмущенной задачи (1)

$$\Omega(\varphi^u(0), \varphi_k(0)) = \Omega(\varphi^u(t), \varphi_k(t)) \quad \forall k \in \mathcal{N}^+, \quad t \in \mathcal{R}.$$

Но $\|\varphi^u(t)\| \to 0$ при $t \to -\infty$, а $\|\varphi_k(t)\|$ остается ограниченной, следовательно,

$$\Omega(\varphi^u(0), \varphi_k(0)) = 0, \quad k \in \mathcal{N}^+.$$

Таким образом, $(\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega} \supset \Sigma'$. Если $\chi : (\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega} \oplus (\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u) \to (\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega}$ – каноническая проекция, то $\Sigma' = \chi(\Sigma') = \chi[(\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega} \oplus \Sigma'] = \chi(W) = \chi[(\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u) \oplus (\Sigma'_u \oplus \Sigma'_s)] = (\Sigma'_s \oplus \Sigma'_u)^{\Omega}$, что требовалось установить. Отсюда вытекает, что в касательном подпространстве

$$T_{v_0}W(\Sigma_u \oplus \Sigma_s)^{\Omega} = \Sigma.$$

Теорема об инвариантных многообразиях состояния равновесия автономного эволюционного уравнения [6] и асимптотическое поведение системы $\Pi(\varphi(t))$ при $t \to +\infty$ позволяют утверждать, что

$$T_{v_0}W^{cs}(0) = \Sigma_s \oplus \Sigma_u. \tag{15}$$

Поскольку главный член разложения (8) не зависит от секущей гиперплоскости M, то без ограничения общности можно считать $M = \Sigma_u \oplus \Sigma_s$. Рассмотрим локальную систему координат (x, y, z) с центром в точке v_0, где $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma_s$, $z \in \Sigma_u$. По теореме о возмущении инвариантных многообразий [6] $u^s_\varepsilon(t_0)$, $u^u_\varepsilon(t_0)$ находятся в $\Gamma(\varepsilon)$-окрестности точки v_0 равномерно по $t_0 \in [0, T]$, причем $r(\varepsilon) \le O(\varepsilon)$ для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$. Если $B(r, v_0) \subset W$ – открытый шар радиуса $r(\varepsilon)$ с центром в точке v_0, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ компонента связности точки v_0 во множестве $W^{cs}(0)B(r, v_0)$ задается в системе координат (x, y, z) графиком гладкой функции $z = \Phi(x, y)$, $\Phi(0, 0) = 0$. Компонента связности точки $u^s_\varepsilon(t_0)$ во множестве $W^s(u^s_\varepsilon(t_0) \cap B(r, v_0))$ задается графиком гладкой функции $z = \Phi_\varepsilon(x, t, t_0)$ в системе координат (x, y, z), причем, согласно (15), $D\Phi(0,0) = 0$. По теореме о возмущении инвариантных многообразий $\sup\limits_{(x,y,t_0)} \|D\Phi_\varepsilon(x,y,t_0)\| = O(\varepsilon)$, где $D\Phi_\varepsilon(x,y,t_0)$ – производная функции по переменным (x,y) в точке (x,y,t_0). Отсюда и из неравенства $r(\varepsilon) \le O(\varepsilon)$ следует оценка

$$\sup_{(x,y,t_0)} \Phi_\varepsilon(x,y,t_0) - \inf_{(x,y,t_0)} \Phi_\varepsilon(x,y,t_0) = O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Пусть $u_\varepsilon^s(t_0) - u_\varepsilon^u(t_0) = (x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0))$. В локальной системе координат (x,y,z) $A(v_0(0)) = (0,\xi,0)$, поэтому

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \Omega[(0,\xi,0),(0,0,z^\varepsilon(t_0))]. \tag{17}$$

Следовательно, в силу разложения (8) и существования невырожденного нуля t_0^* у функции $\mu(t_0)$ (лемма 4) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют $t_0^{(i)}(\varepsilon)$, $t_0^* \in (t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ такие, что в них функция $z^\varepsilon(t_0)$ принимает значения разных знаков, поскольку в двумерной плоскости $\Sigma_s \oplus \Sigma_u = \{(x,y,z) : x = 0\}$ вектор $(0,0,z^\varepsilon(t_0))$ меняет ориентацию относительно вектора $(0,\xi,0)$. Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} t_0^{(i)}(\varepsilon) = t_0^*$, $z^\varepsilon(t_0^{(i)}(\varepsilon)) = O(\varepsilon)$, $i = 1,2$. Но в таком случае из соотношения (16) вытекает существование значения аргумента $t_0 = \tau(\varepsilon)$ такого, что точка $u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon))$ принадлежит графику функции $\Phi_\varepsilon(x,y,\tau(\varepsilon))$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = t_0^*$.

Рассмотрим инвариантные подмногообразия $W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$, $W^u_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$ в фазовом пространстве $W \times S^1$. Очевидно, $\dim W^u_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon) = 2$, $\operatorname{codim} W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon) = 1$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $0 \ne W^u(\gamma_\varepsilon) \cap W^s(\gamma_\varepsilon) \supset \Gamma_\varepsilon = \{F_t^\varepsilon(u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon)), \tau(\varepsilon)) : t \in \mathcal{R}\}$. В силу (17), (8) и неравенства $d\mu/dt_0(t_0^*) \ne 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $dz^\varepsilon/dt_0(\tau(\varepsilon)) \ne 0$. Следовательно, касательное пространство $T_{[u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon)),\tau(\varepsilon)]} W^u(\gamma_\varepsilon) \not\subset T_{[u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon)),\tau(\varepsilon)]} W^s(\gamma_\varepsilon)$. Таким образом, Γ_ε – грубая гомоклиническая траектория. С другой стороны, поскольку двумерное подмногообразие $W^u_{\mathrm{loc}}(\gamma_\varepsilon)$ инвариантно, полупоток F_t^ε на нем порождается гладким векторным полем [6]. Следовательно, касательный вектор к траектории Γ_ε в точке $[u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon)), \tau(\varepsilon)]$ существует и его t_0-компонента равна единице. В таком случае любой касательный вектор к $W^u[u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon))] \times \{\tau(\varepsilon)\}$ в точке $[u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon)), \tau(\varepsilon)]$ линейно независим с касательным вектором к кривой Γ_ε в этой же точке. Поэтому, предположив, что $W^u[u_\varepsilon(\tau(\varepsilon))]$ и $W^s[u_\varepsilon(\tau(\varepsilon))]$ касаются друг друга в точке $u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon))$, получаем, что Γ_ε не является грубой гомоклинической траекторией. Таким образом, точка $u_\varepsilon^u(\tau(\varepsilon))$ является точкой трансверсального пересечения многообразий $W^u[u_\varepsilon(\tau(\varepsilon))]$ и $W^s[u_\varepsilon(\tau(\varepsilon))]$, что завершает доказательство теоремы.

Как следствие из теоремы 1 вытекает, что установленное существование расщепления грубой гомоклинической траектории ДС (1) означает в свою очередь существование у ДС нетривиального гиперболического множества, гомеоморфного канторову совершенному множеству [1, 10].

Следствие 1. *В силу общности предположений установленное существование трансверсальной гомоклинической (гетероклинической) точки пересечения влечет за собой существование бесконечного по крайней мере счетного множества гомоклинических (гетероклинических) точек пересечения с различными траекториями [10].*

Замечание 3. Условия существования невырожденного нуля у функции $\mu(t_0)$ связаны с исследованием конкретной модели ДС в соответствующих функциональных пространствах. Примеры исследований для модельных задач теории переноса можно найти в работах [11–13].

Замечание 4. Значительную трудность может вызвать установление полноты системы корневых векторов для соответствующей модельной задачи (лемма 4), поскольку соответствующие операторы являются, как правило, несамосопряженными. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо проводить соответствующие исследования [11, 12, 14].

В заключение укажем на появляющиеся возможности описания общей картины поведения ДС с использованием полученных результатов. В частности, для нелинейных динамических систем, описывающих процессы переноса, можно ввести марковское разбиение, используя также понятия топологических марковских цепей и гиперболических множеств [10] (см. также [12, 14]). С помощью этих понятий можно дать конструктивное построение и описание таких важных для ДС инвариантных множеств, как гиперболический аттрактор, топологическая энтропия и емкость, характеризующие разнообразие и стохастичность поведения нелинейных динамических систем [7, 10, 15].

5. Рассмотрим уравнение типа синус-Гордона с нулевыми граничными условиями Дирихле на отрезке $[0,1]$, которое возмущено внешней периодической силой и силой вязкого трения и в форме системы уравнений первого порядка имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 u_{xx} + \sin u + \varepsilon(-\delta p + f(x)\sin(\omega t)),$$
$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad p(x,t_0) = \psi(x), \quad \delta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad c \neq 0, \tag{18}$$

$f(x)$ – достаточно гладкая функция. В качестве W выберем пространство $\mathcal{H}(0,1) = \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1) \times L_2(0,1)$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$:

$$((\varphi_1(x),p_1(x)),(\varphi_2(x),p_2(x))) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x))^{(1)}_{2,[0,1]} + (p_1(x),p_2(x))_{2,[0,1]}.$$

Система уравнений (18) представима в виде (1), если:

$$A(u,p) = (p, c^2 u_{xx} + u), \quad B(u,p) = (0, \sin u - u),$$
$$A_1(u,p) = (0, -\delta p), \quad H(t) = (0, f(x)\sin(\omega t)). \tag{19}$$

Задача (18) однозначно разрешима в W и порождает в нем поток диффеоморфизмов [16]. Легко убедиться в том, что спектр оператора правой части линеаризованной в нуле задачи (18) удовлетворяет условию $A_3)$ при любом $c \in (1/(2\pi), 1/(4\pi))$. Условие $A_2)$ выполняется, если $\omega \neq \sqrt{\pi^2 c^2 n^2 - 1}$, $n \in \mathcal{N}^+$.

Нулевое состояние равновесия невозмущенной $(\varepsilon = 0)$ задачи (18) при указанных значениях c имеет две гомоклинические траектории [17] $(\pm\gamma(x,t), \gamma_t(x,t))$, где

$$\gamma(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}[\rho \sin(\pi x)\,\mathrm{ch}^{-1}(\pi\rho c t)], \quad \rho = \sqrt{(\pi c)^{-2} - 1},$$

которые симметричны в смысле данного выше определения.

Билинейная форма $\Omega((u_1,p_1),(u_2,p_2)) = \int_0^1 (u_1(x)p_2(x) - u_2(x)p_1(x))\,dx$ задает на $\mathcal{H}(0,1)$ симплектическую структуру, относительно которой невозмущенная задача (18) обладает функцией $H(u,p) = (1/2)\int_0^1 (c^2 u_x^2 + p^2 - 2\cos u)\,dx$. Проверка остальных условий $A_1) - A_5)$ не вызывает затруднений.

Рассмотрим семейство операторов $DB(v_0(t))$ для задачи (18):

$$DB(v_0(t))(u,p) = (0, [\cos(\gamma(x,t)) - 1]u).$$

Следовательно,

$$\|\overline{DB(v_0(t))}(u,p)\| \leq \|(1 - \cos(\gamma(x,t)))u\|_{2,[0,1]} \leq$$
$$\leq \|(1 - \cos(\gamma(x,t)))\|_{2,[0,1]} \|u\|_{2,[0,1]} \leq c_1 \|\overline{DB(v_0(t))}\|\, \|u\|_{2,[0,1]}. \tag{20}$$

Ортонормированные собственные функции оператора $\overline{A}$ для достаточно больших $k \in \mathcal{N}^+$ имеют вид $(u_k(x),p_k(x)) = k^{-1}(2\pi(1+c^2))^{-1/2}(\sin(\pi k x), i(c^2\pi^2k^2 - 1)^{1/2}\sin(\pi k x))$. Поэтому из (20) вытекает, что $\|\overline{DB(v_0(t))}(u_k(x),p_k(x))\| \leq c_2 k^{-1} \|\overline{DB(v_0(t))}\|$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 1 и возмущенная система (18) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет иметь грубую гомоклиническую траекторию гиперболической периодической орбиты, если у функции Мельникова $\mu(t_0)$ существует невырожденный нуль. В случае $f(x) \equiv f = \mathrm{const}$ невырожденный нуль существует, если

$$\int\limits_{\rho-1}^{\infty}(\xi^2+1)^{-1/2}\sin\left(\frac{\omega}{\pi\rho c}\operatorname{arcch}(\xi\rho)\right)\ln[(\sqrt{\xi^2+1}+1)(\sqrt{\xi^2+1}-1)^{-1}]\,d\xi >$$
$$> 2\pi^2\delta c\rho^2 f^{-1}(\rho^{-1}-\operatorname{arctg}\rho^{-1}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смейл С.* // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. Вып. 1. С. 113–185.
2. *Мельников В.К.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
3. *Holmes P.J.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. P. 65–80.
4. *Greenspan B., Holmes P.J.* // Nonlinear Dynamics and Turbulence / Eds. Barenblatt C., Iooss G., Joseph D.D. London, 1981.
5. *Holmes P.J., Marsden J.E.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1981. V. 43. P. 135–165.
6. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* // Lecture Notes in Math. 1977. № 583.
7. *Макин Р.С.* // Вестн. ДИТУД. Димитровград, 2003. Вып. 3 (17). С. 82–90.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
9. *Кодингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
10. *Песин Я.Б.* // Современные проблемы математики, фундаментальные направления. 1985. Т. 2. С. 123–173.
11. *Макин Р.С.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 3. С. 536–540.
12. *Макин Р.С.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 10. С. 1811–1818.
13. *Макин Р.С.* // Вопросы атомной науки и техники. Ядерная техника и технология. 1992. Вып. 6. С. 59–67.
14. *Макин Р.С.* // Функц. анализ и его приложения. 1987. Т. 20. Вып. 1. С. 80–81.
15. *Макин Р.С.* // Тр. НИИАР. Димитровград, 1993. С. 1–104.
16. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. М., 1977.
17. *Лэм Дж. (мл.)* Введение в теорию солитонов. М., 1983.

Научно-исследовательский институт
атомных реакторов, г. Димитровград

Поступила в редакцию
07.05.2004 г.