



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. G. Zhuravlev, Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2005, Volume 322, 83–106

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

February 7, 2025, 07:19:23



В. Г. Журавлев

РАЗБИЕНИЯ РОЗИ И МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА НА ТОРЕ

ВВЕДЕНИЕ

С помощью конструкции [1] для тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \bmod \mathbb{Z}^2$ строится согласованная последовательность разбиений Розы (Rauzy)

$$d^0 \supset d^1 \supset \dots \supset d^m \supset \dots$$

уровней m , в которой каждое разбиение d^{m+1} получается делением тайлов из предыдущего разбиения d^m .

Обозначим θ число Пизо, являющееся вещественным корнем уравнения

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$$

и определим сдвиг

$$S(x) = x + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \bmod \mathbb{Z}^2$$

тора \mathbb{T}^2 , где $\zeta = \theta^{-1}$. В теореме 4.1 доказано, что разбиения d^m согласованы с S : действие сдвига S на разбиение d^m сводится к перекладыванию трех его базисных тайлов, разбивающих область $B^m d$, где $d = d^0$ — нулевое разбиение и $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}$. Показано, что ограничение $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ сдвига S на подмножество $B^m d \subset \mathbb{T}^2$ (индуцированное отображение или отображение первого возвращения) снова является сдвигом тора, аффинно изоморфного исходному сдвигу S . Последнее свойство означает, что d^m — бесконечно дифференцируемые разбиения единичного периода.

С кубическим числом Пизо θ связаны числа Трибоначчи T_m , определяемые рекуррентным соотношением

$$T_{m+3} = T_{m+2} + T_{m+1} + T_m.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00368).

В п. 3 доказывается, что разбиения Рози d^m также удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$d^{m+3} = Bd^{m+2} + (z + B^2d^{m+1}) + (z + Bz + B^3d^m), \quad (1)$$

где справа в равенстве (1) записано разбиение на три множества, а в скобках указаны множества, полученные сдвигом на вектор $z = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$ и $z + Bz$ соответственно.

Аналогичное рекуррентное соотношение для разбиений Фибоначчи f^m единичной окружности $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \bmod \mathbb{Z}$ получено в [2]

$$f^{m+2} = \tau^{-1} \cdot f^{m+1} + (\tau^{-1} + \tau^{-2} \cdot f^m), \quad (2)$$

где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – квадратичное число Пизо (золотое сечение), являющееся корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Для сравнения заметим, что с τ связаны числа Фибоначчи F_m , удовлетворяющие рекуррентному соотношению второго порядка

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m.$$

Пусть X – некоторое подмножество тора \mathbb{T}^2 и

$$Z_N(X) = \#\{i : S^i(0) \in X, 1 \leq i \leq N\}$$

– количество возвращений начальной точки 0 в X . Если в качестве X выбрать множество $B^m d$, то для $Z_N(B^m d)$ имеет место следующая явная формула (теорема 5.1)

$$Z_N(B^m d) = \frac{m}{N}, \quad (3)$$

где $\frac{m}{N}$ обозначает число, полученное из N m -кратным сдвигом влево в системе счисления T_n . При этом для отклонения

$$r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$$

при всех уровнях $m = 0, 1, 2, \dots$ выполнены неравенства

$$-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5. \quad (4)$$

Поскольку, как уже было отмечено, индуцированное отображение $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ является сдвигом тора, то по критерию Розы [3] для любого m имеем

$$\sup_N |r_N(B^m d)| < \infty.$$

Малость величины отклонения $r_N(B^m d)$ (4) указывает на глубокую связь арифметических свойств числа Пизо θ с геометрией границы $\partial\bar{d}$ области Розы d [4, 5, 6, 7]. Граница $\partial\bar{d}$ представляет собой фрактальную развертку тора \mathbb{T}^2 . В одномерном случае \mathbb{T}^1 указанная связь рассмотрена в [2, 8], а условия ограниченности остатка были впервые найдены в [9, 10].

Пусть $N = N_{N'}(B^m d)$ – это время N' -го возвращения начальной точки $0 \in \mathbb{T}^2$ в область $B^m d$. Тогда в теореме 6.1 доказано, что $N_{N'}(B^m d)$ вычисляется по формуле

$$N_{N'}(B^m d) = \overset{m}{N'}$$

где $\overset{m}{N'}$ обозначает m -кратный сдвиг вправо числа N' в системе счисления Трибоначчи T_n . Как следствие, из последней формулы для перенормировок получается следующая оценка

$$|N_{N'}(B^m d) - \theta^m N'| < 2\theta^m,$$

справедливая для всех $m, N' = 0, 1, 2, \dots$

Развертка тора $\partial\bar{d}$ строится с помощью инвариантной калибровочной последовательности $u = 1213121\dots$. Данная последовательность является самоподобной и получается из 1 с помощью подстановки

$$\Pi(1) = 12, \Pi(2) = 13, \Pi(3) = 1.$$

Поскольку, согласно формуле (3), разностная функция

$$\chi_{B^m d}(N) = \overset{m}{N} - (\overset{m}{N-1})$$

принимает значения 1, если точка $N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$ принадлежит области $B^m = d$, и равна 0 в противном случае, то границу $\partial\overline{B^m d}$ можно строить с помощью системы счисления T_n , минуя подстановку Π .

1. T -СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ РАЗБИЕНИЯ

1.1. T -система счисления. Числа Трибоначчи T_n определяются рекуррентным соотношением

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad (5)$$

для $n \geq 0$ и начальными условиями $T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$. Так как выполняется неравенство

$$T_{n+1} \leq 2T_n$$

для всех $n \geq 0$, то любое N из множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ можно единственным способом разложить в конечную сумму

$$N = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N) T_n,$$

где коэффициенты $\varepsilon_n(N) = 0$ или 1 удовлетворяют условию (закон сокращения)

$$\varepsilon_k(N)\varepsilon_{k+1}(N)\varepsilon_{k+2}(N) = 0 \quad (6)$$

для любого $k \geq 0$. Если $N = 0$, то полагаем $\varepsilon_n(N) = 0$ для всех $n \geq 0$.

Отображение

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\varepsilon} E : N \longmapsto \varepsilon(N) = (\varepsilon_0(N), \varepsilon_1(N), \dots) \quad (7)$$

устанавливает биекцию между множеством неотрицательных целых чисел \mathbb{N} и множеством E последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ из элементов $\varepsilon_n = 0$ или 1 с ограничением (6) и с конечным числом элементов $\varepsilon_n = 1$.

1.2. E -разбиения уровня m . Приведем несколько способов построения разбиений множества последовательностей E .

Способ 1 использует E -координаты. Разбиение

$$E^m = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}^m} E_R^m(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in \bar{J}^m} E_G^m(\bar{j}) + \sum_{\bar{k} \in \bar{K}^m} E_B^m(\bar{k}) \quad (8)$$

состоит из тайлов $E_R^m(\bar{i})$, $E_G^m(\bar{j})$, $E_B^m(\bar{k})$ с E -координатами

$$\bar{i} = (\underbrace{\dots}_m 0), \quad \bar{j} = (\underbrace{\dots}_m 10), \quad \bar{k} = (\underbrace{\dots}_m 11)$$

– последовательностями из E длины $m+1$, $m+2$, $m+2$ соответственно. Тайлы имеют вид

$$\begin{aligned} E_R^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E : \varepsilon|_{m+1} = \bar{i}\}, \\ E_G^m(\bar{j}) &= \{\varepsilon \in E : \varepsilon|_{m+2} = \bar{j}\}, \\ E_B^m(\bar{k}) &= \{\varepsilon \in E : \varepsilon|_{m+2} = \bar{k}\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varepsilon|_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ – начало последовательности ε длины n .

Способ 2 использует подстановки (инфляцию $E^m \mapsto E^{m+1}$)

$$E_R^m(\bar{i}) = E_{RR}^m(\bar{i}) + E_{RG}^m(\bar{i}) + E_{RB}^m(\bar{i}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} E_{RR}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) : \varepsilon|_{m+2} = (\bar{i}0)\}, \\ E_{RG}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) : \varepsilon|_{m+3} = (\bar{i}10)\}, \\ E_{RB}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) : \varepsilon|_{m+3} = (\bar{i}11)\}. \end{aligned}$$

Тогда тайлы разбиения E^{m+1} получаются переименовкой и делением тайлов разбиения E^m следующим образом:

$$\begin{aligned} E_R^{m+1}(\bar{i}) &= \begin{cases} E_{RR}^m(\bar{i}_m) & \text{для } \bar{i} = (\bar{i}_m 0) \in \bar{I}^{m+1}, \bar{i}_m \in \bar{I}^m, \\ E_G^m(\bar{i}) & \text{для } \bar{i} \in \bar{J}^m \subset \bar{I}^{m+1}; \end{cases} \\ E_G^{m+1}(\bar{j}) &= \begin{cases} E_{RG}^m(\bar{i}_m) & \text{для } \bar{j} = (\bar{i}_m 10) \in \bar{J}^{m+1}, \bar{i}_m \in \bar{I}^m, \\ E_B^m(\bar{j}_m) & \text{для } \bar{j} = (\bar{j}_m 0) \in \bar{J}^{m+1}, \bar{j}_m \in \bar{K}^m; \end{cases} \quad (11) \\ E_B^{m+1}(\bar{k}) &= E_{RB}^m(\bar{i}_m) \quad \text{для } \bar{k} = (\bar{i}_m 11) \in \bar{K}^{m+1}, \bar{i}_m \in \bar{I}^m. \end{aligned}$$

Разбиение нулевого уровня E^0 имеет вид (8)

$$E^0 = E_R^0(0) + E_G^0(10) + E_B^0(11).$$

Определим на множестве последовательностей E некоммутативную операцию прикладывания (\oplus -сумма)

$$\varepsilon \oplus \varepsilon' = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$$

в случае, если последовательность справа обладает свойством (6). Тогда множество E -координат удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \bar{I}^{m+1} &= \bar{I}^m \oplus (0) \cup \bar{J}^m, \\ \bar{J}^{m+1} &= \bar{I}^m \oplus (10) \cup \bar{K}^m \oplus (0), \quad (12) \\ \bar{K}^{m+1} &= \bar{I}^m \oplus (11) \end{aligned}$$

для уровней $m \geq 0$, при этом полагаем $\bar{I}^0 = \{(0)\}$, $\bar{J}^0 = \{(10)\}$, $\bar{K}^0 = \{(11)\}$.

Определим на множестве последовательностей E еще две операции: сдвиг вправо (мультипликативный сдвиг)

$$E \xrightarrow{B} E : \quad \varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \mapsto \vec{\varepsilon} = B(\varepsilon) = (0, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \quad (13)$$

и операцию сложения

$$\varepsilon \dot{+} \varepsilon' = \varepsilon(N + N'),$$

индуцированную, в силу биекции (7), операцией сложения целых чисел $N, N' \in \mathbb{N}$, отвечающих последовательностям $\varepsilon, \varepsilon'$.

Способ 3 построения E -разбиений основан на использовании E -рекуррентного соотношения (ср. с соотношением 5 для чисел Трибоначчи T_n)

$$E^{m+3} = BE^{m+2} + [(1) \dot{+} B^2 E^{m+1}] + [(11) \dot{+} B^3 E^m] \quad (14)$$

для $m \geq 0$, при этом начальные разбиения E^0, E^1, E^2 определены в (8).

Если на множестве E дополнительно определить аддитивный сдвиг

$$E \xrightarrow{S} E : \quad \varepsilon \mapsto S(\varepsilon) = \varepsilon \dot{+} (1), \quad (15)$$

то рекуррентные соотношения (14) можно переписать в виде

$$E^{m+3} = BE^{m+2} + SB^2 E^{m+1} + S^3 B^3 E^m, \quad (16)$$

где отображения B (13) и S (15) не коммутируют друг с другом (подробнее см. теорему 1.1).

1.3. Глобальные координаты. С помощью биекции (7) отождествим множества E -координат тайлов из разбиения E^m (8) с множествами \mathbb{N} -номеров или координат

$$I^m = \varepsilon^{-1}(\bar{I}^m), \quad J^m = \varepsilon^{-1}(\bar{J}^m), \quad K^m = \varepsilon^{-1}(\bar{K}^m)$$

соответствующих тайлов

$$E_R^m(i) = E_R^m(\bar{i}), \quad E_G^m(j) = E_G^m(\bar{j}), \quad E_B^m(k) = E_B^m(\bar{k}),$$

где $\bar{i} = \varepsilon(i)$ и т.д. Тогда множества \mathbb{N} -координат удовлетворяют рекуррентному соотношению (12). Отсюда получаем

$$I^m = [0, T_m), \quad J^m = [T_m, T_{m+1}), \quad K^m = [T_{m+1} + T_m, T_{m+2}), \quad (17)$$

где полуинтервал $[T, T')$ состоит из целых чисел $T, T+1, \dots, T'-1$. Из (5) следует, что множества I^m, J^m, K^m содержат соответственно количество номеров

$$T_{m,R} = T_m, \quad T_{m,G} = T_{m-1} + T_{m-2}, \quad T_{m,B} = T_{m-1}, \quad (18)$$

где $m \geq 0$ и $T_{-2} = 0, T_{-1} = 1$.

Введем обозначения

$$i_0 = i, \quad j_0 = j - T_m, \quad k_0 = k - T_{m+1} - T_m. \quad (19)$$

Тогда разбиение E^m (8) можно переписать в виде

$$E^m = \sum_{i \in I^m} E_R^m(i) + \sum_{j \in J^m} E_G^m(j) + \sum_{k \in K^m} E_B^m(k), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} E_R^m(i) &= \bar{i}_0 \dot{+} E_R^m(0) = S^{i_0} E_R^m(0), \\ E_G^m(j) &= \bar{j}_0 \dot{+} E_G^m(T_m) = S^{j_0} E_G^m(T_m), \\ E_B^m(k) &= \bar{k}_0 \dot{+} E_B^m(T_{m+1} + T_m) = S^{k_0} E_B^m(T_{m+1} + T_m) \end{aligned} \quad (21)$$

Формулы (21) дают основание назвать номера i, j, k глобальными координатами тайлов $E_R^m(i), E_G^m(j), E_B^m(k)$.

1.4. Индуцированное отображение $S^{(m)}$. Из (20), (21) вытекает инвариантность или согласованность разбиений E^m относительно действия сдвига S (15):

$$SE^m \stackrel{\text{a.e.}}{=} E^m \setminus W^m + W^m, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} W^m &= E_R^m(0) + E_G^m(T_m) + E_B^m(T_{m+1} + T_m), \\ W'^m &= E_R^m(T_m) + E_G^m(T_{m+1}) + E_B^m(T_{m+2}), \end{aligned}$$

и равенство $\stackrel{\text{a.e.}}{=}$ означает совпадение множеств за исключением, может быть, конечного числа элементов. В последнем разбиении W'^m тайлы соответственно равны

$$\begin{aligned} E_R^m(T_m) &= S^{T_{m,R}} E_R^m(0), \\ E_G^m(T_{m+1}) &= S^{T_{m,G}} E_G^m(T_m), \\ E_B^m(T_{m+2}) &= S^{T_{m,B}} E_B^m(T_{m+1} + T_m). \end{aligned} \quad (23)$$

Если не учитывать разбиения множеств, то можем записать

$$B^m E = W^m \stackrel{\text{а.е.}}{=} W'^m, \quad W'^m \subset W^m, \quad (24)$$

где B – сдвиг вправо на множестве E . Заметим, что в равенстве (22) разбиения W^m , W'^m индуцированы разбиением нулевого уровня E^0 (8):

$$W^m = B^m E^0, \quad W'^m = B^m S E^0. \quad (25)$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ B^m \downarrow & & \downarrow B^m \\ B^m E & \xrightarrow{S^{(m)}} & B^m E \end{array} \quad (26)$$

где $S^{(m)} = S|_{B^m E}$ – производное отображение от S на подмножестве $B^m E \subset E$. Отображение $S^{(m)}$ также называют индуцированным или отображением первого возвращения. Существование индуцированного отображения $S^{(m)}$ вытекает из (22) и (24).

Теорема 1.1. *Диаграмма (26) коммутативна, т.е. выполняется равенство*

$$B^m S = S^{(m)} B^m.$$

Сдвиг S (15) и его производное отображение $S^{(m)}$ связаны следующими соотношениями

$$S^{(m)}(\varepsilon) = \begin{cases} S^{T_{m,R}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E_R^m(0), \\ S^{T_{m,G}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E_G^m(T_m), \\ S^{T_{m,B}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E_B^m(T_{m+1} + T_m), \end{cases}$$

где степени $T_{m,R}$, $T_{m,G}$, $T_{m,B}$ определены в (18).

Доказательство вытекает из равенств (20)–(26). \square

Кроме сдвига вправо B (13), на множестве последовательностей E можно соответственно определить и сдвиг влево

$$E \xrightarrow{B^{-1}} E: \quad \varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \longmapsto \overleftarrow{\varepsilon} = B^{-1}(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots).$$

По теореме 1.1 для производного отображения $S^{(m)}$ из диаграммы (26) получаем формулу

$$S^{(m)}(\varepsilon) = B^m S B^{-m}(\varepsilon) \quad (27)$$

сопряжения $S^{(m)}$ с аддитивным сдвигом S (15) на подмножестве $B^m E \subset E$.

2. \mathbb{N} -РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ

2.1. \mathbb{N} -разбиения. С помощью биекции $\mathbb{N} \xrightarrow{\varepsilon} E$ (7) разбиениям E^m (8) можно сопоставить разбиения

$$\mathbb{N}^m = \sum_{i \in I^m} \mathbb{N}_R^m(i) + \sum_{j \in J^m} \mathbb{N}_G^m(j) + \sum_{k \in K^m} \mathbb{N}_B^m(k) \quad (28)$$

множества неотрицательных целых чисел \mathbb{N} , на котором также определен оператор сдвига $S(N) = N + 1$. Очевидно, что S -орбитой $0 \in \mathbb{N}$ является все множество \mathbb{N} . Поэтому существуют все производные преобразования

$$S|_X, \quad \text{где } X = \mathbb{N}_R^m(i), \quad \mathbb{N}_G^m(j) \quad \text{или} \quad \mathbb{N}_B^m(k)$$

– один из тайлов в разбиении \mathbb{N}^m (28). При этом любой тайл X состоит из одной орбиты относительно соответствующей производной $S|_X$ и начальная точка орбиты – это одновременно и номер тайла X . Элементы тайла X линейно упорядочены и индуцированный отображением $S|_X$ порядок $<|_X$ согласован с порядком $<$ на множестве \mathbb{N} . Тем самым, элементы их из X имеют свой порядковый $S|_X$ -номер N' , а также – первоначальный номер $N \in \mathbb{N}$.

2.2. Перенормировки и количество возвращений.

Отображение

$$N' \xrightarrow{X} N$$

называется перенормировкой элементов тайла X .

Предложение 2.1. Для тайлов $\mathbb{N}_R^m(i)$, $\mathbb{N}_G^m(j)$, $\mathbb{N}_B^m(k)$ разбиения \mathbb{N}^m (28) соответствующие перенормировки имеют вид

$$N = i + B^{m+1}N', \quad N = j + B^{m+2}N', \quad N = k + B^{m+3}N'. \quad (29)$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$ принадлежит одному из тайлов $\mathbb{N}_R^m(i)$, $\mathbb{N}_G^m(j)$ или $\mathbb{N}_B^m(k)$. Тогда, согласно определению E -координат (8), имеют место соответственно разложения

$$\bar{N} = \bar{i} \oplus \bar{N}', \quad \bar{N} = \bar{j} \oplus \bar{N}', \quad \bar{N} = \bar{k} \oplus (0) \oplus \bar{N}'. \quad (30)$$

Теперь переход от E -последовательностей к числам (29) осуществляется с помощью оператора сдвига B (13). \square

Пусть элементы $x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots$ некоторого тайла X из разбиения \mathbb{N}^m (28) расположены в порядке возрастания. Обозначим

$$Z_N(X) = \#\{i : x_i \leq N, i > 0\}$$

– количество возвращений в тайл X начальной точки x_0 под действием сдвига S . Как отмечалось, начальными точками x_0 в тайлах $\mathbb{N}_R^m(i)$, $\mathbb{N}_G^m(j)$, $\mathbb{N}_B^m(k)$ являются их номера i, j, k , что согласуется с формулами перенормировок (29) (нужно в формулах (29) выбрать $N' = 0$).

Отсюда и из разложений (20) вытекает

Предложение 2.2. *Для количества возвращений начальной точки в тайлы из разбиения \mathbb{N}^m (28) под действием сдвига $S : N \mapsto N + 1$ выполняются следующие явные формулы*

$$Z_N(\mathbb{N}_R^m(i)) = B^{-(m+1)}(N - i) = \overleftarrow{(N - i)^{m+1}},$$

$$Z_N(\mathbb{N}_G^m(j)) = B^{-(m+2)}(N - j) = \overleftarrow{(N - j)^{m+2}},$$

$$Z_N(\mathbb{N}_B^m(k)) = B^{-(m+3)}(N - k) = \overleftarrow{(N - k)^{m+3}},$$

при этом сдвиги B^{-m} на множестве \mathbb{N} определены равенством

$$B^{-m}(N) = \varepsilon^{-1} B^{-m} \varepsilon(N),$$

где ε – биекция (7). □

Замечание 2.1. С помощью биекции $\varepsilon : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$ все утверждения предложений 2.1 и 2.2 могут быть соответствующим образом переформулированы для разбиений E^m (8) множества последовательностей E . Введение разбиений \mathbb{N}^m (28) обусловлено тем обстоятельством, что определения и доказательства упрощаются, если использовать разбиения целых чисел \mathbb{N} .

3. КОНСТРУКЦИЯ РОЗИ

3.1. Калибровочная последовательность. Пусть $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ – конечный алфавит и \mathcal{A}^{fin} – множество конечных последовательностей (слов) в алфавите \mathcal{A} . Зададим на \mathcal{A} подстановку Трибоначчи [1]

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{A}^{fin} : \Pi(1) = 12, \Pi(2) = 13, \Pi(3) = 1$$

и продолжим Π на множество последовательностей \mathcal{A}^{fin} , полагая

$$\mathcal{A}^{fin} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{A}^{fin} : v = v_1 \dots v_m \mapsto \Pi(v) = \Pi(v_1) \dots \Pi(v_m)$$

и $\Pi(\emptyset) = \emptyset$ для пустого слова. Аналогично продолжаем Π на \mathcal{A}^∞ – множество всех конечных и бесконечных последовательностей: если $v = v_1 \dots v_m \dots$ принадлежит \mathcal{A}^∞ , то $\Pi(v) = \Pi(v_1) \dots \Pi(v_m) \dots$. Подстановка Π имеет единственную неподвижную последовательность

$$u = 12131211213 \dots = u_1 u_2 u_3 \dots \quad (31)$$

Назовем u калибровочной последовательностью. Мотивировкой для этого является то обстоятельство, что с помощью последовательности u обмотка тора удерживается в компактной области.

Начальные подпоследовательности из u длины $N = 0, 1, 2, \dots$ обозначим

$$U_N = u_1 u_2 \dots u_N \quad (32)$$

для $N \geq 1$ и $U_0 = \emptyset$. Для $v = v_1 \dots v_m$ из \mathcal{A}^{fin} и $k = 1, 2, 3$ из \mathcal{A} пусть

$$r(v) = \begin{pmatrix} r_1(v) \\ r_2(v) \\ r_3(v) \end{pmatrix}$$

где $r_k(v)$ равно количеству букв $v_i = k$ в последовательности v .

3.2. Подстановка Π и числа Трибоначчи. Подстановка Π действует на столбец $r(v)$ по следующему правилу

$$r(\Pi(v)) = A \cdot r(v), \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие из приведенной формулы, для $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$r(\Pi^n(v)) = A^n \cdot r(v), \quad (33)$$

где $\Pi^n(v) = \Pi(\dots(\Pi(v)))$ – n -раз. Подстановочная матрица A задает

$$\begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

последовательность чисел Трибоначчи T_n , также определяемую рекуррентным соотношением (5). Характеристический многочлен матрицы A равен

$$Ch_A(x) = x^3 - x^2 - x - 1,$$

он имеет один вещественный корень $\theta \approx 1.8392$ и два комплексно сопряженных корня $\alpha, \bar{\alpha}$. Так как $\theta > 1$ и $|\alpha|^2 = \frac{1}{\theta}$, то $|\alpha| = |\bar{\alpha}| < 1$ и, следовательно, θ – число Пизо. Для него обратное число $\zeta = \frac{1}{\theta} \approx 0.5436$ удовлетворяет соотношению

$$\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 = 1. \quad (34)$$

3.3. Отклонения. Для последовательности $v \in \mathcal{A}^{fin}$ определим отклонения

$$\Delta_k(v) = \zeta^k l(v) - r_k(v)$$

где $k = 1, 2, 3$ и $l(v) = r_1(v) + r_2(v) + r_3(v)$ – длина последовательности v . Из общей теории подстановок следует ограниченность отклонений

$$|\Delta_k(\Pi^n(v))| \leq c_{v,k} < \infty$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Согласно (34) отклонения $\Delta_k(v)$ удовлетворяют линейному соотношению

$$\Delta_1(v) + \Delta_2(v) + \Delta_3(v) = 0.$$

Поэтому поведение отклонений $\Delta_k(v)$ полностью описывается вектор-столбцом

$$\Delta(v) = \begin{pmatrix} \Delta_1(v) \\ \Delta_2(v) \end{pmatrix} = l(v) \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(v) \\ r_2(v) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\Delta(v)$ – собственный вектор для подстановки Π :

$$\Delta(\Pi(v)) = B \cdot \Delta(v), \quad (35)$$

где матрица $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен

$$Ch_B(x) = x^2 + (\zeta + \zeta^2)x + \zeta.$$

Из уравнения (34) для него вытекает разложение

$$Ch_B(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}),$$

где

$$\alpha, \bar{\alpha} = \frac{-(\zeta + \zeta^2) \pm i\sqrt{d}}{2} \quad (36)$$

и $d = \zeta^2 + 4\zeta - 1 > 0$.

Для отклонения $\Delta(v)$ в случае последовательности $v = U_N$ (32) введем специальное обозначение

$$\delta(N) = \Delta(U_N) = N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(U_N) \\ r_2(U_N) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Тогда

$$\delta(N) \equiv N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (38)$$

для $N = 0, 1, 2, \dots$ и поэтому отображение $N \mapsto \delta(N)$ задает обмотку тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \pmod{\mathbb{Z}^2}$, получающуюся сдвигом нулевой точки на вектор $\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \equiv z \pmod{\mathbb{Z}^2}$, где

$$z = \delta(1) = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

3.4. Собственные последовательности. Последовательности $v = \Pi^n(1)$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\Pi^0(1) = 1$, назовем собственными последовательностями из \mathcal{A}^{fin} . Из равенств

$$\begin{aligned} \Pi^3(1) &= \Pi^2(1)\Pi^1(1)\Pi^0(1), \\ \Pi^{n+1}(1) &= \Pi^1(\Pi^n(1)) \end{aligned}$$

индукцией по n получается некоммутативное рекуррентное соотношение для собственных последовательностей (ср. (5) и (16))

$$\Pi^{n+3}(1) = \Pi^{n+2}(1)\Pi^{n+1}(1)\Pi^n(1) \quad (40)$$

для $n \geq 0$ с начальными условиями $\Pi^0(1) = 1$, $\Pi^1(1) = 12$, $\Pi^2(1) = 1213$. Так как длины этих последовательностей соответственно равны 1, 2, 4, то из рекуррентного соотношения (40) следует, что собственные последовательности $\Pi^n(1)$ имеют длины

$$T_n = l(\Pi^n(1)), \quad (41)$$

равные числам Трибоначчи T_n (5).

Поскольку для калибровочной последовательности u (31) справедливы равенства $\Pi(u) = u$, $u = 1u'$, то $u = \Pi^n(u) = \Pi^n(1)\Pi^n(u')$ и, значит,

$$\Pi^n(1) = U_{T_n} \quad (42)$$

являются начальными подпоследовательностями калибровочной последовательности u длины T_n . Из (35) следует

$$\Delta(\Pi^n(1)) = B^n \Delta(1). \quad (43)$$

Отсюда и из (37) вытекает формула

$$\delta(T_n) = B^n z \quad (44)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$, где z – сдвиг тора (39).

Индукцией по N из рекуррентного соотношения (40) получаются следующие формулы

$$r_k(\Pi^n(1)) = r_k(U_{T_n}) = T_{n-k} \quad (45)$$

для $k = 1, 2, 3$, $n \geq 1$, где согласно (5) $T_{-2} = 0$, $T_{-1} = 1$.

В силу (35) отклонение $\delta(T_n)$ связано с корнями характеристического уравнения $Ch_B(x)$ соотношением

$$\delta(T_n) = \alpha^n a + \bar{\alpha}^n \bar{a} \quad (46)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$, где

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\bar{\alpha} - \alpha} \begin{pmatrix} (\zeta - 1)\bar{\alpha} + 1 - 2\zeta \\ \zeta^2(\bar{\alpha} - \alpha) + 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Из (47) и (36) для коэффициентов a_1, a_2 выводим явные выражения

$$a_1 = \frac{\zeta - 1}{2} + i \frac{\zeta^2 - 2\zeta + 1}{2\sqrt{d}}, \quad a_2 = \zeta^2 - i \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (48)$$

и, следовательно, для них получаем неравенства $|a_1| < 0.2438$, $|a_2| < 0.8761$.

4. РАЗБИЕНИЯ РОЗИ

4.1. Разбиения Розы уровня m . Рассмотрим множество $D = \delta(E)$ из \mathbb{R}^2 , где для последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \in E$ отображение δ определяется равенством

$$\delta(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z, \quad (49)$$

где B – матрица из (35) и $z = \delta(1)$ – вектор сдвига тора (39). Разбиение E^m (8) индуцирует разбиение

$$D^m = \delta(E^m)$$

на тайлы $D_R^m(i)$, $D_G^m(j)$, $D_B^m(k)$ – δ -образы тайлов (9). Обозначим

$$d_R^m(i), \quad d_G^m(j), \quad d_B^m(k)$$

– множества внутренних точек замыканий $\overline{D_R^m(i)}$, $\overline{D_G^m(j)}$, $\overline{D_B^m(k)}$ соответственно. Рози [1] доказал, что для уровня $m = 0$ множество

$$d^0 = d_R^0(0) + d_G^0(1) + d_B^0(3) \tag{50}$$

содержит D^0 и его составляющие образуют разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \bmod \mathbb{Z}^2$, обладающего следующими свойствами:

1. Тайлы $d_*^0(*)$ в (50) являются односвязными множествами.
2. Множества $d_R^0(0) + \mathbb{Z}^2$, $d_G^0(1) + \mathbb{Z}^2$, $d_B^0(3) + \mathbb{Z}^2$ не пересекаются.
3. Объединение их замыканий совпадает с \mathbb{R}^2 .
4. Если $v, v' \in \mathbb{Z}^2$, $v \neq v'$ и $d_*^0(*)$ – какой-либо тайл из разбиения (50), то множества $d_*^0(*) + v$ и $d_*^0(*) + v'$ не пересекаются.

Пусть

$$S(x) = x + \xi \quad \bmod \mathbb{Z}^2, \tag{51}$$

где $\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$, – сдвиг тора \mathbb{T}^2 . Из определения сдвига S (15) на множестве последовательностей E следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ D & \xrightarrow{S} & D \end{array} \tag{52}$$

где нижняя стрелка означает перекладывание множества D , определяемое равенствами

$$S(x) = x + z_R^0, \quad x + z_G^0, \quad x + z_B^0 \tag{53}$$

в зависимости от того, какому из тайлов в разбиении

$$D^0 = D_R^0(0) + D_G^0(1) + D_B^0(3) \tag{54}$$

принадлежит x . При этом в (53)

$$\begin{aligned} z_R^0 &= \delta(1) - \delta(0) = \xi - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z_G^0 &= \delta(2) - \delta(1) = \xi - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ z_B^0 &= \delta(4) - \delta(3) = \xi. \end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что ограничение сдвига тора S (51) на множество D совпадает с перекладыванием (55) $\bmod \mathbb{Z}^2$.

4.2. Дифференцируемость разбиений Розы.

Теорема 4.1. 1. Для $m = 0, 1, 2, \dots$ имеют место разбиения

$$d^m = \sum_{i \in I^m} d_R^m(i) + \sum_{j \in J^m} d_G^m(j) + \sum_{k \in K^m} d_B^m(k), \quad (56)$$

тора \mathbb{T}^2 , обладающие свойствами 1)-4). При этом

$$d_R^m(i) = S^{i_0} d_R^m(0), \quad d_G^m(j) = S^{j_0} d_G^m(T_m), \quad d_B^m(k) = S^{k_0} d_k^m(T_{m+1} + T_m), \quad (57)$$

где S – сдвиг тора (51) и степени i_0, j_0, k_0 определены в (19).

2. Сумма тайлов

$$w^m = d_R^m(0) + d_G^m(T_m) + d_B^m(T_{m+1} + T_m) \quad (58)$$

представляет собою разбиение тора

$$B^m \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \bmod B^m \mathbb{Z}^2, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix},$$

также обладающего свойствами 1)-4). При этом $w^0 = d^0$ – разбиение Розы (50) и

$$w^m = B^m w^0 \quad (59)$$

для $m \geq 0$.

3. Разбиения d^m (56) согласованы с действием сдвига S (51) на торе \mathbb{T}^2 , т.е.

$$S d^m \stackrel{\text{a.e.}}{=} d^m \setminus w^m + w'^m, \quad (60)$$

где

$$w'^m = d_R^m(T_m) + d_G^m(T_{m+1}) + d_B^m(T_{m+2}) \quad (61)$$

– снова разбиение тора $B^m \mathbb{T}^2$ со свойствами 1)–4) и

$$\begin{aligned} d_R^m(T_m) &= S^{T_{m,R}} d_R^m(0) \pmod{\mathbb{Z}^2}, \\ d_G^m(T_{m+1}) &= S^{T_{m,G}} d_G^m(T_m) \pmod{\mathbb{Z}^2}, \\ d_B^m(T_{m+2}) &= S^{T_{m,B}} d_B^m(T_{m+1} + T_m) \pmod{\mathbb{Z}^2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Замыкания $\overline{w}^m, \overline{w}'^m$ разбиений w^m, w'^m совпадают и $\stackrel{\text{a.e.}}{=}$ означает, что замыкания множеств в правой и левой части (60) равны.

4. Индуцированное отображение

$$S^{(m)} = S|_{w^m}$$

есть перекладывание тайлов из разбиения w^m (58):

$$\begin{aligned} d_R^m(T_m) &= d_R^m(0) + z_R^m \\ d_G^m(T_{m+1}) &= d_G^m(T_m) + z_G^m, \\ d_B^m(T_{m+2}) &= d_B^m(T_{m+1} + T_m) + z_B^m, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} z_R^m &= B^m z_R^0 \equiv T_{m,R} \xi \pmod{\mathbb{Z}^2}, \\ z_G^m &= B^m z_G^0 \equiv T_{m,G} \xi \pmod{\mathbb{Z}^2}, \\ z_B^m &= B^m z_B^0 \equiv T_{m,B} \xi \pmod{\mathbb{Z}^2} \end{aligned} \quad (64)$$

для $m \geq 0$ и векторы z_R^0, z_G^0, z_B^0 определены в (55).

5. Преобразование перекладывания тайлов $S^{(m)}$ (63) представляет собой сдвиг тора $B^m \mathbb{T}^2$. При этом $S^{(m)}$ получается сопряжением

$$S^{(m)} = B^m S B^{-m} \quad (65)$$

сдвига S тора \mathbb{T}^2 и, следовательно, производный сдвиг $S^{(m)}$ аффинно изоморфен исходному сдвигу S .

Доказательство. Из способа 2 построения разбиений E^m (10), (11) и определения сдвига B (13) на множестве E получаем

$$E_R^0(0) = E_R^1(0) + E_G^1(2) + E_B^1(6) = B E_R^0(0) + B E_G^0(1) + B E_B^0(3) = B E^0,$$

т.е. B -сдвиг преобразует разбиение E^0 в разбиение тайла $E_R^0(0)$ из E^1 . Отсюда и из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{B} & E \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ D & \xrightarrow{B} & D \end{array} \quad (66)$$

где нижняя стрелка означает умножение на матрицу B , индукцией по m получаем разбиения d^m (56). Равенства (57) вытекают из (21).

Утверждения 2) следуют из коммутативности диаграммы (55) и равенств $W^m = B^m W^0$ (25), $w^m = \delta(W^m)$, где W^m – разбиение (22).

Утверждения 3), 4) вытекают из теоремы 1.1, коммутативности диаграммы (52) и (53)–(55). Согласно (55) имеем $z_R^0 = \delta(1) - \delta(0) = \Delta(\Pi^0(1))$. Поэтому в силу формулы (43) можем записать

$$z_R^m = B^m z_R^0 = \Delta(\Pi^m(1)) = \delta(T_m) = \delta(T_{m,R}) = T_{m,R} \xi \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Аналогично доказываются сравнения для векторов z_G^m, z_B^m . Формулы перекладывания (63) вытекают из (53)–(55).

Равенство (66) следует из (62)–(64) и коммутативности диаграмм (26) и (52). \square

Доказанная теорема 4.1 содержит реализацию построения разбиений E^m способом 1 в виде разбиений d^m тора \mathbb{T}^2 : разбиение d^m получается из трех базисных тайлов $d_R^m(0), d_G^m(T_m), d_B^m(T_{m+1} + T_m)$ (58) с помощью многократного повторения сдвига тора S (51).

Способы 2, 3 построения разбиений E^m позволяют строить разбиения d^m индукционно через подстановки (деление или инфляцию) и рекуррентные соотношения.

Способ 2. Разбиение d^{m+1} получается из d^m с помощью следующих подстановок (ср. (10)–(11))

$$\begin{aligned} d_R^m(i) &= d_R^{m+1}(i) + d_G^{m+1}(i + T_{m+1}) + d_B^{m+1}(i + T_{m+2} + T_{m+1}), \\ d_G^m(j) &= d_R^{m+1}(j), \\ d_B^m(k) &= d_G^{m+1}(k). \end{aligned} \quad (67)$$

Способ 3. Разбиения d^m удовлетворяют рекуррентному соотношению (ср. с соотношением (5) для чисел Трибоначчи T_n и с (14) для разбиений E^m)

$$d^{m+3} = B d^{m+2} + (z + B^2 d^{m+1}) + (z + Bz + B^3 d^m), \quad (68)$$

где $z = \delta(1) = \xi - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и B – матрица из (35). Поскольку

$$z + Bz = \delta(3) = 3\xi - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то с помощью сдвига S (51) соотношение (68) можно переписать в виде рекуррентного соотношения (ср. (16))

$$d^{m+3} \equiv Bd^{m+2} + SB^2d^{m+1} + S^3B^3d^m \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (69)$$

для разбиений тора \mathbb{T}^2 .

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ТОРЕ

Пусть d обозначает множество внутренних точек замыкания $\delta(E)$, где δ – отображение (49). Тогда можем записать

$$B^{m+1}d = d_R^m(0), \quad (70)$$

где B – матрица из 2.5 и $d_R^m(0)$ – множество внутренних точек замыкания тайла $D_R^m(0) = \delta(E_R^m(0))$. Обозначим

$$Z_N(B^m d) = \#\{i : S^i(0) \in B^m d + \mathbb{Z}^2, 1 \leq i \leq N\}$$

– количество точек S -орбиты 0 , где S – сдвиг (51) тора \mathbb{T}^2 , попавших в область $B^m d + \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{T}^2$. Поскольку выполняется равенство

$$d_R^m(0) \stackrel{\text{a.e.}}{=} w^{m+1}, \quad (71)$$

где w^{m+1} – разбиение (59), то для $Z_N(B^m d)$ из (70), (71) и предложения 2.2 вытекает формула

$$Z_N(B^m d) = \frac{m}{N} \quad (72)$$

для любого уровня $m \geq 0$. Заметим, что определитель матрицы B равен $0 < \zeta < 1$ и d является фундаментальной областью для тора \mathbb{T}^2 , поскольку $d \stackrel{\text{a.e.}}{=} d^0$. Поэтому естественно рассмотреть разность $N\zeta^m - \frac{m}{N}$ как отклонение $Z_N(B^m d)$ от площади.

К оценке этого отклонения применим формулу (46). Рассматривая только первые координаты, записываем

$$T_n \zeta - T_{n-1} = 2 \operatorname{Re}(a_1 \alpha^n)$$

для любого $n \geq 0$. При условии $1 \leq m \leq n + 1$ из последнего равенства выводим

$$T_n \zeta^m - T_{n-m} = 2 \operatorname{Re}(a_1 \alpha^{n-m+1} [1 + \alpha \zeta + \dots + (\alpha \zeta)^{m-1}]) \quad (73)$$

и, следовательно, получаем оценку

$$|T_n \zeta^m - T_{n-m}| \leq c_1 |\alpha|^{n-m+1}, \quad (74)$$

где $|\alpha| < 1$ и константа $c_1 = \frac{2|a_1|}{1-|\alpha|}$ не зависит от параметров m, n .

Выберем произвольное $k \geq 0$ и разобьем N на две части

$$N = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N) T_n = N_k + N_{>k},$$

где N_k равно сумме слагаемых с индексами $n \leq k$. Поскольку данное разложение инвариантно относительно сдвига

$$\frac{m}{N} = \frac{m}{N_k} + \frac{m}{N_{>k}},$$

то разность $N \zeta^m - \frac{m}{N}$ можем записать в виде суммы

$$N \zeta^m - \frac{m}{N} = N_k \zeta^m - \frac{m}{N_k} + r_N(m, k), \quad (75)$$

где остаток равен

$$r_N(m, k) = N_{>k} \zeta^m - \frac{m}{N_{>k}}.$$

Применяя неравенство (74) и учитывая ограничения на коэффициенты $\varepsilon_n(N)$ (6), получаем

$$\begin{aligned} |r_N(m, k)| &\leq c_1 \sum_{n \geq k+1} \varepsilon_n(N) |\alpha|^{n-m+1} \\ &\leq c_1 |\alpha|^{k-m+1} (1 + |\alpha| + |\alpha|^3 + |\alpha|^4 + \dots) \end{aligned}$$

и, значит, для остатка $r_N(m, k)$ имеет место оценка

$$|r_N(m, k)| \leq c_2 |\alpha|^{k-m+2} \quad (76)$$

с константой $c_2 = c_1 \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|^3}$.

Для конкретных значений уровня m формула (75) и неравенство (77) сводят вычисление разностей $N \zeta^m - \frac{m}{N}$ к вычислению

аналогичных разностей для ограниченных значений N . Так, например, из (75), (77) получаем следующие равенства

$$\begin{aligned}
 c_m^+ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \{N\zeta^m - \bar{N}\} = \sup_{N < T_{k+1}} \{N\zeta^m - \bar{N}\} + r^+(m, k), \\
 c_m^- &= \inf_{N \in \mathbb{N}} \{N\zeta^m - \bar{N}\} = \inf_{N < T_{k+1}} \{N\zeta^m - \bar{N}\} + r^-(m, k),
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

где

$$|r^+(m, k)| \leq c_2 |\alpha|^{k-m+2}, \quad |r^-(m, k)| \leq c_2 |\alpha|^{k-m+2}$$

и $k \geq 0$ – произвольное фиксированное число.

Для уровней $m \leq 10$ в Таблице 5.1 приведены соответствующие верхние и нижние границы для c_m^+ и c_m^- .

Таблица 5.1

m	c_m^-	c_m^+
1	-0.33	0.92
2	-0.26	1.14
3	-0.24	1.21
4	-0.26	1.32
5	-0.26	1.36
6	-0.26	1.37
7	-0.26	1.39
8	-0.26	1.40
9	-0.26	1.41
10	-0.27	1.41

Чтобы получить границы для разности $N\zeta^m - \bar{N}$ в случае произвольного m , воспользуемся следующими итерациями

$$\frac{t}{N}\zeta^{m-t} + c_t^- \zeta^{m-t} \leq N\zeta^m \leq \frac{t}{N}\zeta^{m-t} + c_t^+ \zeta^{m-t},$$

где $t \leq m$, и получим нужные неравенства

$$c^- \leq N\zeta^m - \frac{m}{N} \leq c^+, \quad (78)$$

где

$$c^+ = \max_{0 \leq t < m'} \left\{ c_t^+ + c_{m'}^+ \frac{\zeta^t}{1 - \zeta^{m'}} \right\},$$

$$c^- = \min_{0 \leq t < m'} \left\{ c_t^- + c_{m'}^- \frac{\zeta^t}{1 - \zeta^{m'}} \right\},$$

$m' \geq 1$ – любое фиксированное значение и $c_0^+ = c_0^- = 0$. Если в качестве m' выбрать, скажем, $m' = 10$ и воспользоваться Таблицей 5.1, то для констант c^+ , c^- получим соответственно оценки $c^+ < 1.7$, $c^- > -0.5$.

Из (72) и (78) вытекает

Теорема 5.1. Пусть $S(x) = x + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^2}$ – сдвиг тора \mathbb{T}^2 ;

d – множество внутренних точек из $\overline{\delta(E)}$, где δ – отображение (49) и E – множество последовательностей из 0 и 1 с ограничением (6); $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$, где $\zeta^{-1} > 1$ – кубическое число Пизо, являющееся корнем многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

1. Тогда для количества $Z_N(B^m d)$ попаданий точек орбиты $S(0), S^2(0), \dots, S^N(0)$ в область $B^m d$, $m \geq 0$, имеет место формула

$$Z_N(B^m d) = \frac{m}{N},$$

где $\frac{m}{N}$ обозначает число, полученное из N m -кратным сдвигом влево в системе счисления Трибоначчи T_n (5).

2. Для отклонения

$$r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$$

при любом уровне m выполняются неравенства

$$-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5.$$

6. ПЕРЕНОРМИРОВКИ СДВИГА ТОРА

Для орбиты $S^0(0), S^1(0), S^2(0), \dots$ точки 0 рассмотрим перенормировку (ср. с перенормировкой из п. 2.2)

$$\mathbb{N} \xrightarrow{B^m d} \mathbb{N} : N' \mapsto N \tag{79}$$

ее ограничения на область $B^m d + \mathbb{Z}^2$ тора \mathbb{T}^2 . Если $S^{(m)}$ – ограничение сдвига тора S (51) на область $B^m d$, то перенормировка (79) означает выполнение следующего соотношения

$$(S^{(m)})^{N'}(0) = S^N(0)$$

для всех $N' = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, $N = N_{N'}(B^m d)$ – это время N' -го возвращения начальной точки 0 в область $B^m d$.

Теорема 6.1. 1. Пусть

$$N' = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N') T_n$$

– разложение числа N' в системе счисления Трибоначчи (5) и

$$\overset{m}{N'} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N') T_{n+m} \tag{80}$$

– m -кратный сдвиг вправо числа N' . Тогда время N' -го возвращения начальной точки 0 в область $B^m d$ вычисляется по формуле

$$N_{N'}(B^m d) = \overset{m}{N'} \tag{81}$$

для всех $m, N' = 0, 1, 2, \dots$

2. Пусть $\theta > 1$ – вещественный корень многочлена $x^3 - x^2 - x - 1$. Тогда перенормировки удовлетворяют неравенству

$$|N_{N'}(B^m d) - \theta^m N'| < 2\theta^m. \tag{82}$$

Доказательство. Формула (81) вытекает из равенства (70) для области $B^m d$ и из первой формулы перенормировок (29). Неравенство (82) получается прямыми вычислениями, если воспользоваться соотношением $\theta = \zeta^{-1}$, определением (80) сдвига $\overset{m}{N'}$ и неравенством (74).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*. — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
2. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*. — Изв. РАН, сер. матем. (2005). (В печати.)
3. S. Ferenczi, *Bounded remainder sets*. — Acta Arithmetica **61** (1992), 319–326.
4. S. Akiyama, *On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers*. — J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 283–308.
5. A. Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*. — J. Théorie Nombres de Bordeaux **10** (1998), 135–162.
6. S. Ito and M. Kimura, *On Rauzy fractal*. — Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 461–486.
7. S. Ito and M. Ohtsuki, *Modified Jacobi–Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*. — **16**, No. 2 (1993), 441–472.
8. А. В. Шутов, *О распределении дробных долей*. — Чебышевский сборник **5** вып. 3 (2004), Тула (2004), 111–121.
9. E. Hecke, *Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins*. — Math. Sem. Hamburg. Univ. **Bd. 1** (1921), 54–76.
10. H. Kesten, *On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1*. — Acta Arith. **14** (1973), 26–38.

Zhuravlev V. G. Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus.

For the two dimensional torus \mathbb{T}^2 we construct the Rauzy tilings $d^0 \supset d^1 \supset \dots \supset d^m \supset \dots$, where each tiling d^{m+1} turns out by inflation of d^m . The following results are proved:

1) Any tiling d^m is invariant with respect to the shift $S(x) = x + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^2}$, here $\zeta^{-1} > 1$ is a Pisot number satisfying the equation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

2) The induced map $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ is an exchange transformation of $B^m d \subset \mathbb{T}^2$, where $d = d^0$ and $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1-\zeta^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}$.

3) The map $S^{(m)}$ is a shift of the torus $B^m d \simeq \mathbb{T}^2$ and $S^{(m)}$ is isomorphic to the initial shift S . It means that d^m are infinite differentiable tilings.

Let $Z_N(X)$ be equal to the number of points in the orbit $S^1(0), S^2(0), \dots, S^N(0)$ visited the domain $B^m d$. Then the remainder $r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$ satisfies $-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5$ for all m .

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 5 марта 2005 г.

E-mail: vzhuravlev@mail.ru