Смирнова Н. С.

ОБ УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Настоящая работа является продолжением работ [1–5] и рассматривает более строго вопрос об определении динамических волн внутри семейств кинематических аналогов в задаче на распространение волн в p-слойной однородной изотропной упругой среде с плоско-параллельными границами раздела. В работе [3] были сформулированы условия, которым должны удовлетворять произведения коэффициентов отражения-преломления двух волн, сравниваемых на динамическую эквивалентность. Однако там не было приведено строго доказательства необходимости этих условий. В настоящей статье приводится подробное исследование, посвященное данному вопросу. Уточняются необходимые и достаточные условия при выполнении которых две волны можно считать динамически эквивалентными.

1. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматривается упругая среда $z \geqslant 0$, состоящая из p слоев, лежащих на полупространстве $p+1$, с параметрами v_p^k, v_s^k и $\rho_k (k = 1, \dots, p+1)$ – скоростями распространения продольных и поперечных волн и плотностями, соответственно. В момент времени $t = 0$ в начале координат начинает действовать нестационарный и осесимметричный источник, не равный нулю на промежутке $[0, T]$, а в точке A на дневной поверхности при $t > 0$ начинают регистрироваться волны. Каждую волну будем описывать формулами нулевого приближения лучевого метода, определенными, например, равенствами (1) и (2) из работы [2].

Рассмотрим две элементарные волны, испытавшие всевозможные отражения и преломления на границах раздела среды и принадлежащие к фиксированной группе кинематически эквивалентных волн с параметрами $\vec{n}(p)$ и $\vec{k}(p)$. Вектор $\vec{n}(p)$ состоит из компонент, определенных числом (деленным пополам) звеньев луча волны в каждом слое, а компонентами вектора $\vec{k}(p)$ являются числа звеньев луча волны в каждом слое, вдоль которых волна распространяется как поперечная.

Введем следующие обозначения. Символами $(PP)_{\text{отр},i}$, $(PS)_{\text{отр},i}$, $(SP)_{\text{отр},i}$ и $(SS)_{\text{отр},i}$ – обозначим коэффициенты отражения плоских волн при падении на границу i сверху, а под числами α_{i1}, α_{i2}, α_{i3} и α_{i4} (по аналогии с обозначениями из [1]) будем обозначать степени, в которых входят указанные выше коэффициенты в выражения для интенсивностей волн (см. (1) и (2) из [2]). Аналогично, символами $(\widetilde{PP})_{\text{отр},i}$, $(\widetilde{PS})_{\text{отр},i}$, $(\widetilde{SP})_{\text{отр},i}$ и $(\widetilde{SS})_{\text{отр},i}$ – обозначим коэффициенты отражения плоских волн при падении на границу раздела снизу, а соответствующие степени их вхождения в формулы для интенсивности через $\widetilde{\alpha}_{i1}$, $\widetilde{\alpha}_{i2}$, $\widetilde{\alpha}_{i3}$ и $\widetilde{\alpha}_{i4}$. Посредством символов $(PP)_{\text{пр},i}$ $(PS)_{\text{пр},i}$, $(SP)_{\text{пр},i}$ и $(SS)_{\text{пр},i}$ $(\widetilde{(PP)}_{\text{пр},i}$, $(\widetilde{PS})_{\text{пр},i}$, $(\widetilde{SP})_{\text{пр},i}$ и $(\widetilde{SS})_{\text{пр},i})$ обозначим коэффициенты преломления плоских волн при падении на границу сверху (снизу), а их степени вхождения в формулы для интенсивности через μ_{i1}, μ_{i2}, μ_{i3} и μ_{i4} ($\widetilde{\mu}_{i1}$, $\widetilde{\mu}_{i2}$, $\widetilde{\mu}_{i3}$ и $\widetilde{\mu}_{i4}$). Произведения же коэффициентов отражения-преломления двух элементарных волн ($\nu = 1, 2$), распространяющихся в p-слойной среде обозначим символами $\Pi_\nu(0, 1, 2, \ldots p)$.

2. Рассмотрим вначале среду, состоящую из слоя (1) и полупространства (2). Пусть две элементарные волны, распространяющиеся в этой среде, динамически эквивалентны, т.е. выполняется условие

$$\Pi_1(0,1) = \Pi_2(0,1), \tag{1}$$

где

$$\Pi_\nu(0,1) = (\widetilde{PP})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{01}}_{\text{отр},0}(\widetilde{PS})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{02}}_{\text{отр},0}(\widetilde{SP})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{03}}_{\text{отр},0}(\widetilde{SS})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{04}}_{\text{отр},0}\times$$
$$\times(PP)^{\alpha^\nu_{11}}_{\text{отр},1}(PS)^{\alpha^\nu_{12}}_{\text{отр},1}(SP)^{\alpha^\nu_{13}}_{\text{отр},1}(SS)^{\alpha^\nu_{14}}_{\text{отр},1} \qquad (\nu = 1, 2). \tag{2}$$

Выясним вопрос, при каких соотношениях между числами $\widetilde{\alpha}^\nu_{ik}$ и α^ν_{ik} ($k = 1, 2, 3, 4$, $i = 0, 1$, $\nu = 1, 2$) может выполняться равенство (1). Для этого рассмотрим выражение

$$\widetilde{\Pi}_\nu = (\widetilde{PS})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{02}}_{\text{отр},0}(\widetilde{SP})^{\widetilde{\alpha}^\nu_{03}}_{\text{отр},0}(PS)^{\alpha^\nu_{12}}_{\text{отр},1}(SP)^{\alpha^\nu_{13}}_{\text{отр},1}, \tag{3}$$

содержащее только коэффициенты отражения обменного типа, входящие в (2). Воспользуемся соотношениями, установленными в работе [2] и имеющими вид:

$$
\begin{aligned}
(PS)_{\text{отр},i} &= (SP)_{\text{отр},i}(\alpha_i/\beta_i),\\
(SP)_{\text{пр},i} &= (\widetilde{PS})_{\text{пр},i}(\beta_i/\alpha_{i+1})\Omega_i,\\
(\widetilde{PS})_{\text{отр},i} &= (\widetilde{SP})_{\text{отр},i}(\alpha_{i+1}/\beta_{i+1}),\\
(PP)_{\text{пр},i} &= (\widetilde{PP})_{\text{пр},i}(\alpha_i/\alpha_{i+1})\Omega_i,\\
(PS)_{\text{пр},i} &= (\widetilde{SP})_{\text{пр},i}(\alpha_i/\beta_{i+1})\Omega_i,\\
(SS)_{\text{пр},i} &= (\widetilde{SS})_{\text{пр},i}(\beta_i/\beta_{i+1})\Omega_i,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где i – номер границы, а функции α_i, β_i и Ω_i определяются равенствами

$$
\alpha_i = \sqrt{1+\gamma_{i1}^2\eta^2}, \quad \beta_i = \sqrt{1+\delta_{i1}^2\eta^2}, \quad \gamma_i = v_s^{(1)}/v_p^{(i)},
$$
$$
\delta_i = v_s^{(1)}/v_s^{(i)}, \quad \Omega_i = \rho_{i+1}/(\rho_i\delta_{i+1,i}^2), \quad \delta_{i+1,i} = v_s^{(i)}/v_s^{(i+1)},
$$
$$
\eta = \frac{i}{\gamma_1 \sin\varphi_p} = \frac{i}{\sin\varphi_s},
$$

($\varphi_p(\varphi_s)$ – угол выхода продольной (поперечной) волны из источника). Ветви корней α_i и β_i фиксированы равенствами $\arg\alpha_i = \arg\beta_i = 0$, при $\eta > 0$. Представим (3), используя (4), в виде четырех различных соотношений:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_\nu &= (\widetilde{PS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu+\tilde{\alpha}_{03}^\nu}(PS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^\nu+\alpha_{13}^\nu}(\alpha_1/\beta_1)^{-\tilde{\alpha}_{03}^\nu-\alpha_{13}^\nu},\\
\tilde{\Pi}_\nu &= (\widetilde{PS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu+\tilde{\alpha}_{03}^\nu}(SP)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^\nu+\alpha_{13}^\nu}(\alpha_1/\beta_1)^{\alpha_{12}^\nu-\tilde{\alpha}_{03}^\nu},\\
\tilde{\Pi}_\nu &= (\widetilde{SP})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu+\tilde{\alpha}_{03}^\nu}(PS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^\nu+\alpha_{13}^\nu}(\alpha_1/\beta_1)^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu-\alpha_{13}^\nu},\\
\tilde{\Pi}_\nu &= (\widetilde{SP})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu+\tilde{\alpha}_{03}^\nu}(SP)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^\nu+\alpha_{13}^\nu}(\alpha_1/\beta_1)^{\tilde{\alpha}_{02}^\nu+\alpha_{12}^\nu}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Каждое из таких равенств следует подставить в (2) и выписать условие (1) в четырех различных видах. Не будем выписывать все четыре выражения для (1), а ограничимся лишь одним:

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{PP})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{01}^1}(\widetilde{SS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{04}^1}(PP)_{\text{отр},1}^{\alpha_{11}^1}(SS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{14}^1}(\widetilde{PS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^1+\tilde{\alpha}_{03}^1}\times\\
&\times(PS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^1+\alpha_{13}^1}(\alpha_1/\beta_1)^{-\tilde{\alpha}_{03}^1-\alpha_{13}^1} = (\widetilde{PP})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{01}^2}(\widetilde{SS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{04}^2}(PP)_{\text{отр},1}^{\alpha_{11}^2}\times\\
&\times(SS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{14}^2}(\widetilde{PS})_{\text{отр},0}^{\tilde{\alpha}_{02}^2+\alpha_{03}^2}(PS)_{\text{отр},1}^{\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2}(\alpha_1/\beta_1)^{-\tilde{\alpha}_{03}^2-\alpha_{13}^2}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Каждый из коэффициентов, входящих в четыре формулы типа (6), представляет собой сложную дробную трансцендентную функцию комплексного переменного η. Поэтому для выполнения равенств типа (6) необходимо требовать выполнения следующих соотношений:

$$\tilde{\alpha}^1_{01} = \tilde{\alpha}^2_{01},\ \tilde{\alpha}^1_{04} = \tilde{\alpha}^2_{04},\ \tilde{\alpha}^1_{02} + \tilde{\alpha}^1_{03} = \tilde{\alpha}^2_{02} + \tilde{\alpha}^2_{03}, \tag{7}$$

$$\alpha^1_{11} = \alpha^2_{11},\ \alpha^1_{14} = \alpha^2_{14},\ \alpha^1_{12} + \alpha^1_{13} = \alpha^2_{12} + \alpha^2_{13}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\alpha}^1_{03} + \alpha^1_{13} = \tilde{\alpha}^2_{03} + \alpha^2_{13},\ \alpha^1_{12} - \tilde{\alpha}^1_{03} = \alpha^2_{12} - \tilde{\alpha}^2_{03},\\ \tilde{\alpha}^1_{02} + \alpha^1_{12} = \tilde{\alpha}^2_{02} + \alpha^2_{12},\ \tilde{\alpha}^1_{02} - \alpha^1_{13} = \tilde{\alpha}^2_{02} - \alpha^2_{13}.\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, числа $\tilde{\alpha}^\nu_{01} \ldots \alpha^\nu_{14}\,(\nu = 1, 2)$ должны удовлетворять десяти соотношениям (7)–(9). Однако, не все эти соотношения независимы друг от друга. Действительно, если учесть, что сопоставляемые волны испытывают одинаковое число отражений, как от верхней, так и от нижней границы, то окажется, что справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{4} \tilde{\alpha}^1_{0k} = \sum_{k=1}^{4} \tilde{\alpha}^2_{0k} = n_1 - 1,\ \sum_{k=1}^{4} \alpha^1_{1k} = \sum_{k=1}^{4} \alpha^2_{1k} = n_1. \tag{10}$$

Учтем также, что рассматриваемые волны принадлежат одному и тому же семейству кинематических аналогов. Тогда будем иметь равенства

$$\alpha^1_{12} + \alpha^1_{13} + 2\alpha^1_{14} = \alpha^2_{12} + \alpha^2_{13} + 2\alpha^2_{14} = k_1, \tag{11}$$

К этому еще уместно добавить очевидное соотношение

$$(\widetilde{PP})_{\text{отр},0} = (\widetilde{SS})_{\text{отр},0} = -\frac{T_0}{R_0} = -\frac{(2+\eta^2)^2 + 4\alpha_1\beta_1}{(2+\eta^2)^2 - 4\alpha_1\beta_1}. \tag{12}$$

На основании формуд (10), (11), (12) нетрудно сделать вывод, что для существования равенства (1) необходимо требовать выполнения одного из соотношений (7), например,

$$\tilde{\alpha}^1_{02} + \tilde{\alpha}^1_{03} = \tilde{\alpha}^2_{02} + \tilde{\alpha}^2_{03}, \tag{13}$$

одного (любого) соотношения из (8),

$$\alpha^1_{12} + \alpha^1_{13} = \alpha^2_{12} + \alpha^2_{13}, \tag{14}$$

и, например, соотношения

$$\tilde{\alpha}^1_{03} + \alpha^1_{13} = \tilde{\alpha}^2_{03} + \alpha^2_{13} \tag{15}$$

из (9).

Таким образом, необходимыми условиями динамической эквивалентности двух волн являются три условия (13), (14) и (15). Отметим, что в условие (15) входят степени коэффициентов отражения на соседних границах.

3. Аналогичным образом выясняются условия динамической эквивалентности кратных волн, распространяющихся в среде, состоящей из двух (толстых) упругих слоев (1) и (2), контактирующих с полупространством (3). Выражения для произведений $\Pi_\nu(0,1,2)$ коэффициентов отражения-преломления этих волн можно представить теперь в виде

$$\Pi_\nu(0,1,2) = \Pi_\nu(0,1)\Pi_\nu(1)\Pi_\nu(1,2) \quad (\nu = 1,2), \tag{16}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}\Pi_\nu(1) = (\widetilde{PP})^{\tilde\mu^\nu_{11}}_{\text{пр},1}(\widetilde{PS})^{\tilde\mu^\nu_{12}}_{\text{пр},1}(\widetilde{SP})^{\tilde\mu^\nu_{13}}_{\text{пр},1}(\widetilde{SS})^{\tilde\mu^\nu_{14}}_{\text{пр},1}\times\\ \times(PP)^{\mu^\nu_{11}}_{\text{пр},1}(PS)^{\mu^\nu_{12}}_{\text{пр},1}(SP)^{\mu^\nu_{13}}_{\text{пр},1}(SS)^{\mu^\nu_{14}}_{\text{пр},1}.\end{gathered} \tag{17}$$

$\Pi_\nu(0,1)$ имеет значение из (2), а $\Pi_\nu(1,2)$ отличается от выражения для $\Pi_\nu(0,1)$ лишь заменой значков.

Анализ формул (16) осуществляется в такой же последовательности, как и в п.2. С учетом формул (4,5) функции $\Pi_\nu(0,1)$ и $\Pi_\nu(1,2)$ представляются четырьмя формулами вида (6) каждое. А $\Pi_\nu(1)$ выражается с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
(\widetilde{PP})^{\tilde\mu_{11}}_{\text{пр}}(PP)^{\mu_{11}}_{\text{пр}} &= \begin{cases}(\widetilde{PP})^{\tilde\mu_{11}+\mu_{11}}_{\text{пр}}(\alpha_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{11}},\\ (PP)^{\tilde\mu_{11}+\mu_{11}}_{\text{пр}}(\alpha_2/(\alpha_1\Omega_1))^{\tilde\mu_{11}}\end{cases}\\
(SP)^{\mu_{13}}_{\text{пр}}(\widetilde{PS})^{\tilde\mu_{12}}_{\text{пр}} &= \begin{cases}(\widetilde{PS})^{\tilde\mu_{12}+\mu_{13}}_{\text{пр}}(\beta_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{13}},\\ (SP)^{\tilde\mu_{12}+\mu_{13}}_{\text{пр}}(\alpha_2/(\beta_1\Omega_1))^{\tilde\mu_{12}}\end{cases}\\
(\widetilde{SP})^{\tilde\mu_{13}}_{\text{пр}}(PS)^{\mu_{12}}_{\text{пр}} &= \begin{cases}(\widetilde{SP})^{\tilde\mu_{13}+\mu_{12}}_{\text{пр}}(\alpha_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{12}},\\ (PS)^{\tilde\mu_{13}+\mu_{12}}_{\text{пр}}(\beta_2/(\alpha_1\Omega_1))^{\tilde\mu_{13}},\end{cases}\\
(\widetilde{SS})^{\tilde\mu_{14}}_{\text{пр}}(SS)^{\mu_{14}}_{\text{пр}} &= \begin{cases}(\widetilde{SS}^{\tilde\mu_{14}+\mu_{14}}_{\text{пр}}(\beta_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{14}},\\ (SS)^{\tilde\mu_{14}+\mu_{14}}_{\text{пр}}(\beta_2/(\beta_1\Omega_1))^{\tilde\mu_{14}}.\end{cases}
\end{aligned} \tag{18}$$

16-тью различными равенствами. Заметим, что в записи формул (18), ради ее сокращения, опущен индекс волны ν, а также номер преломляющей границы 1 при коэффициентах.

Не выписывая все 16-ть равенств, представим некоторые из них:

$$\begin{aligned}
\Pi_\nu(1) &= (\widetilde{PP})^{\sigma_1}(\widetilde{PS})^{\sigma_2}(\widetilde{SP})^{\sigma_3}(\widetilde{SS})^{\sigma_4}\times\\
&\quad\times(\alpha_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{11}^\nu}(\beta\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{13}^\nu}(\alpha_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{12}^\nu}(\beta_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{14}^\nu},\\
\Pi_\nu(1) &= (\widetilde{PP})^{\sigma_1}(\widetilde{PS})^{\sigma_2}(\widetilde{SP})^{\sigma_3}(SS)^{\sigma_4}\times\\
&\quad\times(\alpha_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{11}^\nu}(\beta_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{13}^\nu}(\alpha_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{12}^\nu}(\beta_2/\beta_1\Omega_1)^{\tilde\mu_{14}^\nu},\\
\Pi_\nu(1) &= (\widetilde{PP})^{\sigma_1}(\widetilde{PS})^{\sigma_2}(PS)^{\sigma_3}(\widetilde{SS})^{\sigma_4}(\alpha_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{11}^\nu}\times\\
&\quad\times(\beta_1\Omega_1/\alpha_2)^{\mu_{13}^\nu}(\beta_2/\alpha_1\Omega_1)^{\tilde\mu_{13}^\nu}(\beta_1\Omega_1/\beta_2)^{\mu_{14}^\nu}
\end{aligned}\tag{19}$$

и т.д., где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \tilde\mu_{11}^\nu+\mu_{11}^\nu, & \sigma_3 &= \tilde\mu_{13}^\nu+\mu_{12}^\nu,\\
\sigma_2 &= \tilde\mu_{12}^\nu+\mu_{13}^\nu, & \sigma_4 &= \tilde\mu_{14}^\nu+\mu_{14}^\nu,
\end{aligned}\tag{20}$$

Подставляя выражения для произведений $\Pi_\nu(0,1)$, $\Pi_\nu(1)$ и $\Pi_\nu(1,2)$ в формулу (16) и перебирая все возможные комбинации, приходим к выводу, что число формул, с помощью которых можно представить произведение $\Pi_\nu(0,1,2)$ в рассматриваемом случае равно 256-ти. Не выписывая это огромное количество формул, проанализируем полученные выражения в отношении одинакового вхождения однотипных функций в равенство

$$\Pi_1(0,1,2)=\Pi_2(0,1,2).\tag{21}$$

Очевидно, что для выполнения (21) должны иметь место равенства (7) и (8) из п.2, определяющие число коэффициентов на границе 0 и 1, а также аналогичные условия на границах 1 и 2:

$$\alpha_{11}^1=\tilde\alpha_{11}^2,\ \tilde\alpha_{12}^1+\tilde\alpha_{13}^1=\tilde\alpha_{12}^2+\tilde\alpha_{13}^3,\ \tilde\alpha_{14}^1=\tilde\alpha_{14}^2,\tag{22}$$

$$\alpha_{21}^1=\alpha_{21}^2,\ \alpha_{22}^1+\alpha_{23}^1=\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2,\ \alpha_{24}^1=\alpha_{24}^2.\tag{23}$$

Условия, связывающие степени коэффициентов преломления на границе 1, получающиеся на основе исследования вида функций $\Pi_\nu(1)$, принимают вид

$$\begin{aligned}
&\tilde\mu_{11}^1+\mu_{11}^1=\tilde\mu_{11}^2+\mu_{11}^2,\ \tilde\mu_{13}^1+\mu_{12}^1=\tilde\mu_{13}^2+\mu_{12}^2,\\
&\tilde\mu_{12}^1+\mu_{13}^1=\tilde\mu_{12}^2+\mu_{13}^2,\ \tilde\mu_{14}^1+\mu_{14}^1=\tilde\mu_{14}^2+\mu_{14}^2.
\end{aligned}\tag{24}$$

Кроме этого необходимо учесть, что имеется коэффициент Ω_1, входящий во все 16-ть равенств для $\Pi_\nu(1)$. Выписывая условия его одинакового вхождения в левую и правую части равенства (21), получаем 16-ть соотношений. Выпишем некоторые из них:

$$\begin{aligned}
&\mu_{11}^1+\mu_{13}^1+\mu_{12}^1+\mu_{14}^1=\mu_{11}^2+\mu_{13}^2+\mu_{12}^2+\mu_{14}^2,\\
&\mu_{11}^1+\mu_{13}^1+\mu_{12}^1-\tilde\mu_{14}^1=\mu_{11}^2+\mu_{13}^2+\mu_{12}^2-\tilde\mu_{14}^2,\\
&\mu_{11}^1+\mu_{13}^1-\tilde\mu_{13}^1+\mu_{14}^1=\mu_{11}^2+\mu_{13}^2-\tilde\mu_{13}^2+\mu_{14}^2,\\
&\mu_{11}^1+\mu_{13}^1-\tilde\mu_{13}^1-\tilde\mu_{14}^1=\mu_{11}^2+\mu_{13}^2-\tilde\mu_{13}^2-\tilde\mu_{14}^2
\end{aligned}\tag{25}$$

и т.д.

Анализируя (25), примем во внимание (24), а также формулы

$$\sum_{k=1}^4\mu_{1k}^1=\sum_{k=1}^4\mu_{1k}^2=\sum_{k=1}^4\tilde\mu_{1k}^1=\sum_{k=1}^4\tilde\mu_{1k}^2,\tag{26}$$

устанавливающие равенство числа коэффициентов преломлений на границе раздела 1 у двух сравниваемых волн при падении сверху и снизу. Тогда можно прийти к выводу, что все 16-ть условий(24) удовлетворяются автоматически.

И, наконец, рассмотрим с какими степенями могут входить в выражение (21) функции α_1, β_1, α_2 и β_2. Функция α_1 имеется только в произведениях $\Pi_\nu(0,1)$ и $\Pi_\nu(1)$. В $\Pi_\nu(0,1)$ она входит в степенях $-\tilde\alpha_{03}^\nu-\alpha_{13}^\nu$, $\alpha_{12}^\nu-\tilde\alpha_{03}^\nu$, $\tilde\alpha_{02}^\nu-\alpha_{13}$ и $\tilde\alpha_{02}^\nu+\alpha_{12}^\nu$, а в $\Pi_\nu(1)$ – в степенях $\mu_{11}^\nu+\mu_{12}^\nu$, $\mu_{11}^\nu-\tilde\mu_{13}^\nu$, $-\tilde\mu_{11}^\nu+\mu_{12}^\nu$ и $-\tilde\mu_{11}^\nu-\tilde\mu_{13}^\nu$. Что касается функции β_1, то в произведении $\Pi_\nu(0,1)$ она входит в тех же степенях, что и α_1, только умноженных на (-1). А в выражение для $\Pi_\nu(1)$ эта функция входит в степенях $\mu_{13}+\mu_{14}$, $\mu_{13}-\tilde\mu_{14}$, $-\tilde\mu_{12}+\mu_{14}$, $-\tilde\mu_{12}-\tilde\mu_{14}$. Естественно, что в формулы (21) каждая из функций α_1 и β_1 будет входить со степенями, составляющими 16-ть различных комбинаций значков α_{kl}^ν, $\tilde\alpha_{kl}^\nu$, μ_{kl}^ν и $\tilde\mu_{kl}^\nu$. Заметим, что в итоге вся совокупность из 32 равенств сводится к одному соотношению, а остальные в силу (24) и (25) выполняются автоматически. В качестве этого соотношения можно выбрать, например, равенство:

$$\mu_{11}^1+\mu_{12}^1-\tilde\alpha_{03}^1-\alpha_{13}^1=\mu_{11}^2+\mu_{12}^2-\tilde\alpha_{03}^2-\alpha_{13}^2.\tag{27}$$

Аналогичным образом исследуются степени вхождения в (21) функций α_2 и β_2. В результате получаем еще одно соотношение вида

$$\mu_{11}^1+\mu_{13}^1+\tilde\alpha_{13}^1+\alpha_{23}^1=\mu_{11}^2+\mu_{13}^2+\tilde\alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2.\tag{28}$$

Заметим, что в два последних равенства (27) и (28) входят степени коэффициентов, принадлежащих соседним границам. Запишем теперь условия кинематической эквивалентности двух рассматриваемых волн. Эти условия в данном случае имеют вид:

$$\begin{gathered}
2\alpha_{14}^1+\alpha_{12}^1+\alpha_{13}^1+\mu_{13}^1+\mu_{14}^1+\tilde{\mu}_{12}^1+\tilde{\mu}_{14}^1= \\
=2\alpha_{14}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+\mu_{13}^2+\mu_{14}^2+\tilde{\mu}_{12}^2+\tilde{\mu}_{14}^2=k_1, \\
2\tilde{\alpha}_{14}^1+\tilde{\alpha}_{12}^1+\tilde{\alpha}_{13}^1+\mu_{12}^1+\mu_{14}^1+\tilde{\mu}_{13}^1+\tilde{\mu}_{14}^1= \\
=2\tilde{\alpha}_{14}^2+\tilde{\alpha}_{12}^2+\tilde{\alpha}_{13}^2+\mu_{12}^2+\mu_{14}^2+\tilde{\mu}_{13}^2+\tilde{\mu}_{14}^2=k_2, \\
2\alpha_{24}^1+\alpha_{22}^1+\alpha_{23}^1=2\alpha_{24}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=k_2.
\end{gathered} \tag{29}$$

Учитывая равенства (7), (8), (10), (22), (23), (24) и (26), можно утверждать, что в случае среды, состоящей из двух слоев (1) и (2), контактирующих с полупространством (3) для динамической эквивалентности двух волн необходимо выполнение одного равенства, например, (13) на границе 0, трех (любых) равенств из (24), по одному равенству из (8) и (22) на границе 1, одного равенства из (23) на границе 2, а также двух равенств (27) и (28). Таким образом, следует проверить справедливость выполнения девяти равенств, связывающих степени коэффициентов отражения и преломления двух элементарных волн.

4. Перейдем теперь к рассмотрению среды, состоящей из p слоев, лежащих на полупространстве $(p+1)$. Пользуясь рассуждениями, приведенными выше, можно сразу же выписать условия, при которых две волны в такой среде будут динамически эквивалентными.

Очевидно, что будут выполняться условия типа (7), (8), (22), (23) и (24), которые имеют вид

$$\tilde{\alpha}_{01}^1+\tilde{\alpha}_{04}^1=\tilde{\alpha}_{01}^2+\tilde{\alpha}_{04}^2 \quad \tilde{\alpha}_{02}^1+\tilde{\alpha}_{03}^1=\tilde{\alpha}_{02}^2+\tilde{\alpha}_{03}^2, \tag{30}$$

$$\alpha_{i1}^1=\alpha_{i1}^2,\ \alpha_{i2}^1+\alpha_{i3}^1=\alpha_{i2}^2+\alpha_{i3}^2,\ \alpha_{i4}^1=\alpha_{i4}^2, \tag{31}$$

$$\tilde{\alpha}_{i1}^1=\tilde{\alpha}_{i1}^2,\ \tilde{\alpha}_{i2}^1+\tilde{\alpha}_{i3}^1=\tilde{\alpha}_{i2}^2+\tilde{\alpha}_{i3}^2,\ \tilde{\alpha}_{i4}^1=\tilde{\alpha}_{i4}^2, \tag{32}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{\mu}_{i1}^1+\mu_{i1}^1=\tilde{\mu}_{i1}^2+\mu_{-1}^2,\ \tilde{\mu}_{i3}^1+\mu_{i2}^1=\tilde{\mu}_{i3}^2+\mu_{i2}^2, \\
\tilde{\mu}_{i2}^1+\mu_{i3}^1=\tilde{\mu}_{i2}^2+\mu_{i3}^2,\ \tilde{\mu}_{i4}^1+\mu_{i4}^1=\tilde{\mu}_{i4}^2+\mu_{i4}^2,
\end{gathered} \tag{33}$$

при $i=1,\ldots,p-1$, а также

$$\alpha_{p1}^1=\alpha_{p1}^2,\ \alpha_{p2}^1+\alpha_{p3}^1=\alpha_{p2}^2+\alpha_{p3}^2,\ \alpha_{p4}^1=\alpha_{p4}^2. \tag{34}$$

Кроме того должны выполняться условия, аналогичные условиям типа (15), (27) и (28). Эти условия имеют вид:

$$\begin{gathered}
\mu_{11}^1 + \mu_{12}^1 - \tilde{\alpha}_{03}^1 - \alpha_{13}^1 = \mu_{11}^2 + \mu_{12}^2 - \tilde{\alpha}_{03}^2 - \alpha_{13}^2, \\
-\mu_{i-11}^1 - \mu_{i-13}^1 - \tilde{\alpha}_{i-13}^1 - \alpha_{i3}^1 + \mu_{i1}^1 + \mu_{i2}^1 = \\
= -\mu_{i-11}^2 - \mu_{i-13} - \tilde{\alpha}_{i-13}^2 - \alpha_{i3}^2 + \mu_{i1}^2 + \mu_{i2}^2,\ i = 2, \ldots, p-1, \\
\mu_{p-11}^1 + \mu_{p-13}^1 + \tilde{\alpha}_{p-13}^1 + \alpha_{p3}^1 = \\
= \mu_{p-11}^2 + \mu_{p-13}^2 + \tilde{\alpha}_{p-13}^2 + \alpha_{p3}^2.
\end{gathered} \tag{35}$$

Условия кинематической эквивалентности двух волн в общем случае будут представляться равенствами:

$$\begin{gathered}
\alpha_{i2} + \alpha_{i3} + 2\alpha_{i4} + \mu_{i3} + \mu_{i4} + \tilde{\mu}_{i2} + \tilde{\mu}_{i4} = k_i, \\
1 \leqslant i \leqslant p-1, \\
\alpha_{i-12} + \tilde{\alpha}_{i-13} + 2\tilde{\alpha}_{i-14} + \mu_{i-12} + \mu_{i-14} + \tilde{\mu}_{i-13} + \mu_{i-14} = k_i, \\
2 \leqslant i \leqslant p, \\
\alpha_{i2} + \alpha_{i3} + 2\alpha_{i4} = k_p.
\end{gathered} \tag{36}$$

Учитывая все равенства, выписанные в данном пункте, а также

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{4} \tilde{\alpha}_{ik}^1 = \sum_{k=1}^{4} \tilde{\alpha}_{ik}^2,\ (i = 0, \ldots, p-1), \\
\sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik}^1 = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik}^2,\ (i = 1, \ldots, p) \\
\sum_{k=1}^{4} \mu_{ik}^1 = \sum_{k=1}^{4} \mu_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{4} \tilde{\mu}_{ik}^1 = \sum_{k=1}^{4} \tilde{\mu}_{ik}^2,\ (i = 1, \ldots, p-1).
\end{gathered} \tag{37}$$

можно утверждать, что необходимыми условиями для динамической эквивалентности двух элементарных волн, распространяющихся в p-слойной среде, являются следующие. На границе 0 должно выполняться одно соотношение из (30). На i-ой границе ($i = 1 \ldots p-1$) должны выполняться: одно условие из (31) и одно условие из (32) и три условия из (34). Кроме того все условия (35). Общее количество условий в данном случае равно $I(p) = 6p - 3$. Таким образом, доказана необходимость выполнения $I(p)$ условий для того, чтобы две элементарные волны, распространяющиеся в p-слойной среде, были динамически эквивалентными. Но можно утверждать, что эти условия являются и достаточными. Действительно, рассмотрим среду, состоящую из слоя и полупространства. Будем предполагать, что выполнены три условия (13)–(15), а произведения для двух элементарных волн представлены формулами (2). Тогда, воспользовавшись соотношениями (4), нетрудно показать, что выполняется и равенство (1). Аналогично доказывается достаточность и при рассмотрении более сложных случаев. Заметим, что условия динамической эквивалентности согласуются с условиями кинематической эквивалентности, т.е., если две волны динамически эквивалентны, то они обязаны принадлежать одному и тому же семейству кинематических аналогов.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–16148).

Литература

1. Петрашень Г. И., Вавилова Т. И., *О расчете интенсивностей суммарных кратных волн в многослойных средах при любом расположении источника и приемника. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн IX.* Л, 1968, с. 77–96.
2. Смирнова Н. С., *Об одном алгоритме определения полей волн в многослойных упругих средах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **186** (1990), 154–171.
3. Смирнова Н. С., *Определение групп динамически эквивалентных волн при распространении в слоистых упругих средах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **195** (1991), 154–160.
4. Смирнова Н. С., *О расчете волновых полей в многослойных средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **203** (1992), 156–165.
5. Смирнова Н. С., *Алгоритм определения полей суммарных кратных волн при произвольном расположении источника и приемника внутри упругой среды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 251–261.

Smirnova N. S. On conditions of the dynamical equivalence of waves in multilayer elastic media.

Necessary and sufficient conditions of the dynamic equivalence of two wavs propagating in an elastic p-layered medium and undergoing all kind of exchanges on the interfaces of the medium are proved. These conditions are represented in the form of identities in which powers of the reflection and refraction coefficients contained in formulas for intensities of these waves enter.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 июля 1994 г.