

КРИТЕРИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2007 г. **Н. Б. ЖУРАВЛЕВ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	37
2. Критерий гиперболичности в случае рационального периода	39
3. Рациональная аппроксимация	42
4. Представление гладких периодических функций	47
5. Построение рациональной аппроксимации	56
6. Критерий гиперболичности в случае иррационального периода	57
Список литературы	61

Аннотация. Данная работа посвящена построению критерия гиперболичности периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в терминах нулей характеристической функции. В известных ранее работах, посвященных данной тематике, необходимые условия отличались от достаточных, а в случае, когда период решения иррациональный, предполагалось, что исследуемое периодическое решение допускает рациональную аппроксимацию. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия гиперболичности. В случае произвольного иррационального периода предложено конструктивное доказательство существования рациональной аппроксимации. Все результаты получены для случая нескольких рациональных запаздываний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена исследованию условий гиперболичности периодических решений некоторого класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, который является обобщением уравнения

$$x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

на случай нескольких запаздываний. Интерес к уравнениям такого типа вызван их применениями в теории управления с последствием и теории искусственных нейронных сетей. Впервые периодические решения таких уравнений были рассмотрены в работе Дж. Л. Каплана и Дж. А. Йорка [16].

Свойство гиперболичности периодического решения является обобщением свойства устойчивости и определяется расположением собственных значений оператора монодромии относительно единичной окружности (точные определения даются ниже). В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений оператор монодромии, ассоциированный с периодическим решением функционально-дифференциального уравнения, является бесконечномерным. Это затрудняет получение конструктивных необходимых и достаточных условий гиперболичности. Ранее такие условия были получены только в частных случаях: когда период решения равен 4 (см. [13]) и 3 (см. [11]). Для произвольного рационального периода как необходимые так и достаточные условия гиперболичности были получены в работах [1–3, 18]. Затем теми же авторами был рассмотрен случай иррационального периода [4, 18]. В случае нескольких запаздываний аналогичные результаты были получены в работах [8, 21]. Отметим, что гиперболичность периодических решений функционально-дифференциальных уравнений и связанные с этим вопросы рассматривались также в работах [12, 14, 15, 17, 19, 20]. Подробную библиографию можно найти в [2]. В настоящей

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00256.

статье в отсутствие дополнительных ограничений будут получены необходимые и достаточные условия гиперболичности периодических решений некоторого класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. В частном случае, когда правая часть уравнения зависит только от одного запаздывания, полученные результаты также являются новыми. Для произвольного периодического решения с иррациональным периодом будет предложено конструктивное доказательство существования рациональной аппроксимации, наличие которой предполагалось в [18]. Отметим, что даже в случае одного запаздывания при построении такой аппроксимации необходимы результаты относительно нескольких рациональных запаздываний.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f(x(t), x(t - r_1), x(t - r_2), \dots, x(t - r_n)), \quad (1.1)$$

где функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $0 < r_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 1, \dots, n$). Везде далее, если не оговорено противное, будем считать, что $r_i < r_{i+1}$. Положим $r_0 = 0$. Мы будем изучать T -периодическое осциллирующее решение $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1), предполагая, что оно нам известно. Введем некоторые обозначения. Пусть $C_{\mathbb{C}} = C([-r_n, 0], \mathbb{C})$ и $C = C([-r_n, 0], \mathbb{R})$ — банаховы пространства с нормой $\|\phi\| = \max_{t \in [-r_n, 0]} |\phi(t)|$. Если y отображает отрезок $[t - r_n, t]$ в множество B , то

функция $y_t : [-r_n, 0] \rightarrow B$ задается по формуле $y_t(s) = y(t+s)$. Если $y : [a - r_n, b] \rightarrow \mathbb{R}$ есть решение уравнения (1.1), то траекторией этого решения мы будем называть множество $\{y_t : t \in [a, b]\} \subset C$.

Оператор монодромии — это линейное непрерывное отображение $\mathcal{M} : C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$, заданное по формуле

$$\mathcal{M}\phi = v_T^{\phi},$$

где $v^{\phi} : [-r_n, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — решение начальной задачи

$$v'(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t)v(t - r_k), \quad (1.2)$$

$$v_0 = \phi \in C_{\mathbb{C}}, \quad (1.3)$$

где

$$\alpha_i(t) = f'_{y_i}(y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)) \Big|_{y_j(t) = \tilde{x}(t - r_j), j=0, \dots, n} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.2) является линеаризацией уравнения (1.1) в окрестности периодического решения \tilde{x} . Оно называется также вариационным уравнением.

При $kT > r_n$ операторы \mathcal{M}^k являются компактными операторами. Поэтому все точки $\lambda \neq 0$ спектра $\sigma(\mathcal{M})$ оператора монодромии являются изолированными собственными значениями и их алгебраические кратности $m(\lambda)$ конечны. Эти собственные значения называются мультипликаторами Флоке. Сужение функции \tilde{x}' на отрезок $[-r_n, 0]$, очевидно, является собственной функцией оператора монодромии, которой соответствует собственное значение $\lambda = 1$.

Периодическое решение \tilde{x} уравнения (1.1) называется гиперболическим, если собственное значение $\lambda = 1$ оператора монодромии является простым и на единичной окружности нет других собственных значений. Траектории, соответствующие решениям уравнения (1.2), определенные на бесконечных полуинтервалах и близкие к периодической орбите гиперболического решения, стремятся к этой орбите при $|t| \rightarrow \infty$.

В разделе 2 будет доказано, что уравнение $(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0$ эквивалентно краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе этой эквивалентности там же будет получен критерий гиперболичности периодического решения уравнения (1.1) в случае рационального периода. В разделе 3 будет сформулировано определение рациональной аппроксимации в случае нескольких запаздываний, которое в случае одного запаздывания впервые было предложено в работе [18]. В разделе 3 также будет доказано свойство, позволяющее при исследовании спектра оператора монодромии добавлять в правую часть уравнения (1.1) формальные запаздывания, от которых фактически правая часть не зависит. Это свойство позволит обобщить введенное ранее понятие рациональной аппроксимации (см. определение 3.2). В разделе 4 будет доказано некоторое свойство (см. теорему 4.2) гладких периодических функций, которое будет лежать в основе метода построения рациональной аппроксимации. Частный случай этого свойства (см. теорему 4.1) может представлять независимый интерес. В разделе 5 в отсутствие каких-либо дополнительных

ограничений будет предложен метод построения рациональной аппроксимации (в смысле определения 3.2). В разделе 6 будет сформулирован и доказан критерий гиперболичности в случае иррационального периода.

Через $C^1(A, B)$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых функций, отображающих множество $A \subset \mathbb{R}^m$ в множество B , с нормой

$$\|f\|_{C^1(A, B)} = \max \left\{ \sup_{y \in A} |f(y)|, \sup_{y \in A} \left| \frac{\partial f(y)}{\partial y_1} \right|, \dots, \sup_{y \in A} \left| \frac{\partial f(y)}{\partial y_m} \right| \right\},$$

Если множество A некомпактно, то под $C^1(A, B)$ будем понимать пространство непрерывно дифференцируемых функций, для которых определенная выше норма $\|f\|_{C^1(A, B)}$ конечна. (В частности, если $f(x) = x^2$, то в принятых обозначениях $f \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.) Аналогично определим пространство $C(A, B)$ с нормой $\|f\|_{C(A, B)} = \sup_{y \in A} |f(y)|$. Для функций $v \in C(A, \mathbb{R})$, $A \supset [a, b]$, определим $\|v\|_{C[a, b]} = \|v|_{[a, b]}\|_{C([a, b], \mathbb{R})}$, где $v|_{[a, b]}$ — сужение функции v на отрезок $[a, b]$. Символ C_T будет обозначать пространство функций из $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеющих период T . (Период T является наименьшим для функций из C_T .)

Пусть $B_\varepsilon(\lambda_0)$ есть открытый круг $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Границу этого круга обозначим через $\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$. Через $\text{meas}(A)$ обозначим меру множества A . Пусть E — единичная матрица, а I — тождественный оператор. Образ и ядро линейного оператора L обозначаются $\mathcal{R}(L)$ и $\mathcal{N}(L)$ соответственно.

2. КРИТЕРИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ РАЦИОНАЛЬНОГО ПЕРИОДА

В этом разделе, предполагая $T \in \mathbb{Q}$, мы установим связь между функциями из $\mathcal{N}((M - \lambda I)^2)$ при $\lambda \neq 0$ и решениями линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе этой системы мы получим критерий простоты для собственных значений оператора монодромии и, затем, критерий гиперболичности для периодических решений уравнения (1.1) с рациональным периодом.

Рассмотрим уравнение

$$(M - \lambda I)^2 \phi = 0. \quad (2.1)$$

Функция ϕ является решением уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда пара функций (ϕ, v^ϕ) является решением системы уравнений (2.1), (1.2), (1.3). При этом решение уравнения (1.2) нам необходимо знать только при $t \in (-r_n, 2T)$.

Воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания. Представим числа $T, r_i \in \mathbb{Q}$ в виде дробей $T = \tilde{N}_0/\tilde{M}_0$, $r_i = \tilde{N}_i/\tilde{M}_i$, где $\tilde{M}_i, \tilde{N}_i \in \mathbb{N}$. Пусть M — наименьшее общее кратное чисел $\tilde{M}_0, \dots, \tilde{M}_n$. Тогда $N = \tilde{N}_0 M/\tilde{M}_0 \in \mathbb{N}$ и $M_i = \tilde{N}_i M/\tilde{M}_i \in \mathbb{N}$. Положим $\tau = 1/M$. Тогда $T = N\tau$, $r_i = M_i\tau$. В системе, состоящей из уравнений (2.1), (1.2), (1.3), произведем следующую замену переменной:

$$u_i(t) = v(t + (i - 1)\tau) \quad (i = 1 - M_n, \dots, 0, 1, \dots, 2N, t \in [0, \tau]). \quad (2.2)$$

При этом из уравнения (1.3) получаем

$$\phi(t) = u_i(t - (i - 1)\tau) \quad (t \in [i\tau - \tau, i\tau], i = 1 - M_n, \dots, 0), \quad (2.3)$$

а уравнения (2.1) и (1.2) превратятся в следующие системы уравнений соответственно:

$$u_i(t) = 2u_{i+N}(t)/\lambda - u_{i+2N}(t)/\lambda^2 \quad (i = 1 - M_n, \dots, 0, t \in [0, \tau]), \quad (2.4)$$

$$u'_i(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t + (i - 1)\tau) u_{i-M_k}(t) \quad (i = 1, \dots, 2N, t \in (0, \tau)). \quad (2.5)$$

Если пара функций (ϕ, v) удовлетворяет системе уравнений (2.1), (1.2), (1.3), то определенные по формуле (2.2) функции u_i удовлетворяют системе уравнений (2.4) и (2.5).

Обратное неверно. Если функции u_{1-M_n}, \dots, u_{2N} удовлетворяют системе уравнений (2.4) и (2.5), то пара функций (ϕ, v) , определенных в соответствии с формулами (2.3) и (2.2), обязаны удовлетворять системе уравнений (2.1), (1.2), (1.3) лишь на интервалах $(i\tau, i\tau + \tau)$, где $i = -M_n, \dots, 2N - 1$.

На концах интервалов эти функции могут иметь разрыв. Используя формулу (2.2), условие непрерывности функции v (а, следовательно, и ϕ , см. уравнение (1.3)) в этих точках можно записать в виде

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \quad (i = 2 - M_n, \dots, 2N). \quad (2.6)$$

Легко видеть, что система уравнений (2.1), (1.2), (1.3) эквивалентна (с учетом замены переменных (2.2) и (2.3)) системе уравнений (2.4), (2.5), (2.6).

Формула (2.4) при $i \in \{-\min\{N, M_n\}, \dots, 0\}$ дает представление функций u_i через функции u_1, \dots, u_{2N} . Допустим, что $M_n > N$ и $i_0 \in \{-M_n, \dots, -N\}$. Рассмотрим равенство (2.4) при $i = i_0$ и к первому слагаемому правой части применим равенство (2.4) при $i = i_0 + N$:

$$u_{i_0} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{2u_{i_0+2N}}{\lambda} - \frac{u_{i_0+3N}}{\lambda^2} \right) - \frac{u_{i_0+2N}}{\lambda^2} = \frac{(2 \cdot 2 - 1)u_{i_0+2N}}{\lambda^2} - \frac{2u_{i_0+3N}}{\lambda^3}.$$

Если $M_n > kN$ и при $i_0 \in \{-M_n, \dots, -kN\}$ имеет место равенство

$$u_{i_0} = \frac{(a_k + 1)u_{i_0+kN}}{\lambda^k} - \frac{a_k u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}},$$

то, аналогичным образом используя $(i_0 + kN)$ -е уравнение системы (2.4), получаем

$$u_{i_0} = \frac{(a_k + 2)u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}} - \frac{(a_k + 1)u_{i_0+(k+2)N}}{\lambda^{k+2}}.$$

Применяя метод математической индукции, перепишем систему (2.4) в виде

$$u_i = \frac{(k_i + 1)u_{i+k_iN}}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i+(k_i+1)N}}{\lambda^{k_i+1}} \quad (i = 1 - M_n, \dots, 0, \quad k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}). \quad (2.7)$$

Эта система эквивалентна системе (2.4) и дает явное представление функций u_{1-M_n}, \dots, u_0 через функции u_1, \dots, u_{2N} .

Используя представление (2.7) и то, что формально при $i > 0$ равенство (2.7) имеет вид $u_i = u_i$ (в этом случае $k_i = 0$), исключим функции u_{-M_n+1}, \dots, u_0 из уравнений (2.5):

$$u_i'(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t + (i-1)\tau) \left(\frac{(d_{ki} + 1)u_{i-M_k+d_{ki}N}(t)}{\lambda^{d_{ki}}} - \frac{d_{ki}u_{i-M_k+(d_{ki}+1)N}(t)}{\lambda^{d_{ki}+1}} \right), \quad (2.8)$$

$$i = 1, \dots, 2N, \quad d_{ki} = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M_k + pN > 0\}, \quad t \in (0, \tau).$$

Таким образом, система (2.4), (2.5) эквивалентна системе (2.7), (2.5).

Используя представление (2.7) при $i = 0$ в формуле (2.6) для $i = 1$, получаем

$$u_1(0) = 2u_N(\tau)/\lambda - u_{2N}(\tau)/\lambda^2. \quad (2.9)$$

Зафиксируем произвольное значение $i \in \{2 - M_n, \dots, 0\}$ и положим $k = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$. Если $i \neq 1 - kN$, то, используя представление (2.7), получим

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = (k+1) \frac{u_{i+kN}(0) - u_{i+kN-1}(\tau)}{\lambda^k} - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0) - u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}}.$$

Если же $i = 1 - kN$, то, используя представление (2.7) и формулу (2.9), получим

$$\begin{aligned} u_i(0) &= (k+1) \frac{u_{i+kN}(0)}{\lambda^k} - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = \\ &= \frac{k+1}{\lambda^k} \left(\frac{2}{\lambda} u_{i+(k+1)N-1}(\tau) - \frac{1}{\lambda^2} u_{i+(k+2)N-1}(\tau) \right) - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = \\ &= (k+2) \frac{u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}} - (k+1) \frac{u_{i+(k+2)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+2}} + k \left(\frac{u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}} - \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} \right) = \\ &= u_{i-1}(\tau) + \frac{k}{\lambda^{k+1}} (u_N(\tau) - u_{N+1}(0)). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (2.6) при $i = 2 - M_n, \dots, 0$ являются следствиями других уравнений системы (2.6), (2.7), (2.9) и их можно исключить из этой системы. Следовательно, в формуле (2.6) будут использоваться только уравнения

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \quad (i = 2, \dots, 2N). \quad (2.10)$$

Из сказанного следует, что система уравнений (2.1), (1.2), (1.3) эквивалентна (с учетом замены переменных (2.2) и (2.3)) системе уравнений (2.7), (2.8), (2.9), (2.10). Иначе говоря, для каждого решения уравнения (2.1) по формуле

$$u_i(t) = v^\phi(t + (i - 1)\tau) \quad (t \in [0, \tau])$$

однозначно определяется некоторое решение $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (2.8), (2.9), (2.10); при этом функции ϕ и U удовлетворяют соотношению (являющемуся следствием формул (2.3) и (2.7))

$$\phi(t) = \frac{(k_i + 1)u_{i-k_i N}(t - (i - 1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i-(k_i+1)N}(t - (i - 1)\tau)}{\lambda^{k_i+1}},$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$, $i = 1 - M_n, \dots, 0$, $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, и для любого решения $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (2.8), (2.9), (2.10) при помощи последнего соотношения восстанавливается соответствующее решение ϕ уравнения (2.1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *При $\lambda \neq 0$ множество решений уравнения (2.1) изоморфно множеству решений краевой задачи (2.8), (2.9), (2.10).*

Рассмотрим краевую задачу (2.8), (2.9), (2.10). Любое решение этой задачи можно представить в виде

$$U(t) = S_\lambda(t)c,$$

где $S_\lambda : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8). Чтобы найти вектор $c \in \mathbb{C}^{2N}$, достаточно подставить общий вид решения в краевые условия (2.9), (2.10). Через $e_{\lambda j}$ обозначим j -ю строку матрицы S_λ . Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ введем матрицу $Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$,

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{\lambda 1}(0) - \frac{2e_{\lambda N}(\tau)}{\lambda} + \frac{e_{\lambda, 2N}(\tau)}{\lambda^2} \\ e_{\lambda 2}(0) - e_{\lambda 1}(\tau) \\ \dots \\ e_{\lambda, 2N}(0) - e_{\lambda, 2N-1}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Тогда вектор c является решением уравнения

$$Q(\lambda)c = 0.$$

Поскольку фундаментальная матрица системы обыкновенных уравнений невырождена, то при каждом $\lambda \neq 0$ матричная функция $S_\lambda(\cdot)$ осуществляет изоморфизм между нуль-пространством матрицы $Q(\lambda)$ и множеством решений краевой задачи (2.8), (2.9), (2.10).

Таким образом, из леммы 2.1 следует, что множество решений уравнения (2.1) изоморфно нуль-пространству матрицы $Q(\lambda)$. Обозначим $N_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \det Q(\lambda) = 0\}$.

Теорема 2.1. *Если $\lambda \neq 0$, то имеет место равенство $\dim \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 2N - \text{rank } Q(\lambda)$. В частности, $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$.*

Лемма 2.2. *Алгебраическая кратность ненулевого собственного значения λ оператора монодромии равна единице тогда и только тогда, когда $\text{rank } Q(\lambda) = 2N - 1$.*

Доказательство. Алгебраической кратностью $m(\lambda)$ собственного значения λ оператора \mathcal{M} называется размерность пространства $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$, где $k \in \mathbb{N}$ — такое число, что $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k) = \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k+1})$. Если $m(\lambda) = 1$, то, очевидно, $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$. Если $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$, то легко доказать, что $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)) = 1$ и, следовательно, $m(\lambda) = 1$. Остается применить теорему 2.1. \square

Теорема 2.2. *Пусть существует T -периодическое решение \tilde{x} уравнения (1.1) и пусть число N определено выше. Решение \tilde{x} является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$ и $\text{rank } Q(1) = 2N - 1$.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$. Другими словами, оператор \mathcal{M} имеет на единичной окружности единственное собственное значение $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(0) \cap N_q = \{1\}$. Из леммы 2.2 следует, что собственное значение $\lambda = 1$ оператора монодромии будет простым тогда и только тогда, когда $\text{rank } Q(1) = 2N - 1$. \square

3. РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В этом разделе мы начнем исследование T -периодических решений уравнения (1.1) при $T \notin \mathbb{Q}$. Здесь и далее мы будем требовать, чтобы правая часть уравнения f принадлежала $C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$. При исследовании поведения решений уравнения (1.1), траектории которых не покидают некоторой окрестности периодической орбиты решения \tilde{x} , дополнительное требование $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ не является ограничительным, т. к. этого всегда можно добиться умножением на соответствующую срезающую функцию.

Для построения критерия гиперболичности нам понадобится понятие рациональной аппроксимации, предложенное впервые в работе [18].

Определение 3.1. Мы будем говорить, что T -периодическое решение \tilde{x} уравнения (1.1) допускает *рациональную аппроксимацию*, если существует такая функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, что

$$\|f_k - f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и уравнения

$$x'(t) = f_k(x(t), x(t - r_1), \dots, x(t - r_n))$$

имеют T_k -периодические решения $\tilde{x}_k(t)$ такие, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_{k0} - \tilde{x}_0\|_C &\rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \\ |T_k - T| &\rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где T_k — рациональные числа.

В дальнейшем при построении рациональной аппроксимации нам будет удобно ввести в правую часть уравнения (1.1) некоторое количество формальных запаздываний, от которых фактически правая часть уравнения (1.1) не зависит.

Пусть $n_A \in \mathbb{N}$ — некоторое число, $n_A \geq n$, и пусть функция $G_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$ определена по формуле

$$G_0(y_0, \dots, y_{n_A}) = f(y_0, \dots, y_n). \quad (3.1)$$

Очевидно, каждое решение \tilde{x} уравнения (1.1) является решением уравнения

$$x'(t) = G_0(x(t), x(t - r_1), \dots, x(t - r_{n_A})) \quad (3.2)$$

при любых положительных значениях запаздываний r_i ($i = n + 1, \dots, n_A$).

Пусть $r = \max\{r_i, i = 1, \dots, n_A\}$. Обозначим через \mathcal{M}_G оператор монодромии, ассоциированный с решением \tilde{x} уравнения (3.2). Тогда, по определению, оператор $\mathcal{M}_G : C([-r, 0], \mathbb{C}) \rightarrow C([-r, 0], \mathbb{C})$ действует по формуле $\mathcal{M}_G \phi(t) = v_G^\phi(t + T)$, $t \in [-r, 0]$, где v_G^ϕ — решение уравнения

$$v'(t) = \sum_{k=0}^{n_A} \alpha_{Gk}(t) v(t - r_k), \quad (3.3)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$v(t) = \phi(t) \quad (t \in [-r, 0]), \quad (3.4)$$

где

$$\alpha_{Gi}(t) = \frac{\partial}{\partial y_i} G_0(y_1, \dots, y_{n_A}) \Big|_{y_0 = \tilde{x}(t), \dots, y_{n_A} = \tilde{x}(t - r_{n_A})}. \quad (3.5)$$

Очевидно, $\alpha_{Gi} = \alpha_i$ при $i = 0, \dots, n$, $\alpha_{Gi} = 0$ при $i = n + 1, \dots, n_A$. Следовательно, уравнение (3.3) совпадает с уравнением (1.2). При этом, используя метод шагов, легко видеть, что задача (3.3), (3.4) однозначно разрешима в $C([-r, 0], \mathbb{R})$.

Определим оператор $P : C([-r, 0], \mathbb{R}) \rightarrow C([-r_n, 0], \mathbb{R})$ по формуле $Px(t) = x(t)$, $t \in [-r_n, 0]$. Это линейный ограниченный оператор. Поскольку уравнения (3.3) и (1.2) совпадают, то при $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{C})$ имеем

$$v_G^\phi(t) = v^{P\phi}(t) \quad (t \in [-r_n, T]), \quad (3.6)$$

$$P\mathcal{M}_G \phi = \mathcal{M}P\phi. \quad (3.7)$$

Рассмотрим следующие два уравнения со спектральным параметром:

$$(\mathcal{M}_G - \lambda I)\phi = 0, \quad (3.8)$$

$$(\mathcal{M} - \lambda I)\phi = 0. \quad (3.9)$$

Замечание 3.1. В двух последних равенствах через I обозначаются разные операторы. Здесь и далее мы предполагаем, что из контекста каждый раз ясно, в каком пространстве действует тождественный оператор I . При этом, если $r = r_n$, то $\mathcal{M}_G : C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ и уравнения (3.8) и (3.9) совпадают.

Лемма 3.1. *Множество собственных значений $\lambda \neq 0$ оператора \mathcal{M} совпадает с множеством собственных значений $\lambda \neq 0$ оператора \mathcal{M}_G с учетом кратности.*

Доказательство. Случай $r = r_n$ тривиален. Поэтому предположим, что $r > r_n$. Отметим, что все итерации \mathcal{M}_G^j при $\mathbb{Z} \ni j > r/T$ являются компактными операторами. Поэтому все точки $\lambda \neq 0$ спектра оператора \mathcal{M}_G являются его изолированными собственными значениями конечной кратности, т. е. $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I) < \infty$ при $\lambda \neq 0$.

1. Покажем, что при $\lambda \neq 0$ оператор P отображает взаимно однозначно пространство $\mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)$ на пространство $\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)$. Если ϕ_G — решение уравнения (3.8), то благодаря (3.7) функция $P\phi_G(t)$ является решением уравнения (3.9). Пусть ϕ — решение уравнения (3.9) и, следовательно, $v^\phi(t) = \lambda^{-1}v^\phi(t+T)$ при $t \in [-r_n, 0]$. Пусть $i_0 = \max\{p \in \mathbb{N} : r_n + pT < r\}$. Определим функцию \bar{v} по итерационной формуле

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v^\phi(t), & t \in [-r_n, T], \\ \lambda^{-1}\bar{v}(t+T), & t \in [-r_n - iT, -r_n - (i-1)T], \quad i = 1, \dots, i_0, \\ \lambda^{-1}\bar{v}(t+T), & t \in [-r, -r_n - i_0T]. \end{cases}$$

Поскольку $\bar{v}(-r_n - iT + 0) = \lambda^{-i}v^\phi(-r_n) = \lambda^{-(i+1)}v^\phi(-r_n + T) = \bar{v}(-r_n - iT - 0)$ при $i = 1, \dots, i_0$, то $\bar{v} \in C([-r, T], \mathbb{R})$. Определим функцию ϕ_G как сужение функции \bar{v} на отрезок $[-r_n, 0]$. Очевидно, функция ϕ_G является решением уравнения (3.8) и такова, что $P\phi_G = \phi$.

Допустим, $P\phi = 0$ при $\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)$. Тогда $v_G^\phi(t) = 0$ при $t > -r_n$. Для произвольного фиксированного значения $i \in \{0, \dots, i_0 - 1\}$ из равенства $v_G^\phi(t) = 0$ при $t \geq -r_n - iT$ следует, что $v_G^\phi(t) = (1/\lambda)v_G^\phi(t+T) = 0$ при $t \geq -r_n - (i+1)T$. Для $i = i_0$ из $v_G^\phi(t) = 0$ при $t \geq -r_n - i_0T$ следует, что $v_G^\phi(t) = (1/\lambda)v_G^\phi(t+T) = 0$ при $t \geq -r$. Поэтому $\phi(t) = v_G^\phi(t) = 0$ при $t \in [-r, 0]$.

2. Применяя метод математической индукции, предположим, что оператор P отображает взаимно-однозначно пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$ на пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1})$ и докажем, что оператор P отображает взаимно-однозначно пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^k)$ на пространство $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$.

Пусть $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^k)$. Тогда либо $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$, либо $\mathcal{M}_G\phi_G = \lambda\phi_G + \psi_G$, где $\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$. В первом случае из предположения индукции следует, что $P\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1}) \subset \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$. Во втором случае, используя (3.7), получаем равенство $\mathcal{M}P\phi_G = \lambda P\phi_G + P\psi_G$. Из предположения индукции следует, что $P\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1})$. Таким образом, $P\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$.

Пусть $\phi \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$. Тогда либо $\phi \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1})$, либо $\mathcal{M}\phi = \lambda\phi + \psi$, где $\psi \in \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k-1})$. В первом случае из предположения индукции следует, что существует такая функция $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1}) \subset \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^k)$, для которой $P\phi_G = \phi$. Рассмотрим второй случай. Из предположения индукции получаем, что существует такая функция $\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$, для которой $P\psi_G = \psi$. Следовательно, при $t \in [-r_n, 0]$ имеем $v^\phi(t) = (1/\lambda)(v^\phi(t+T) - \psi_G(t))$. Пусть $i_0 = \max\{p \in \mathbb{N} : r_n + pT < r\}$. Определим функцию \bar{v} по итерационной формуле

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v^\phi(t), & t \in [-r_n, T], \\ \lambda^{-1}(\bar{v}(t+T) - \psi_G(t)), & t \in [-r_n - iT, -r_n - (i-1)T], \quad i = 1, \dots, i_0, \\ \lambda^{-1}(\bar{v}(t+T) - \psi_G(t)) & t \in [-r, -r_n - i_0T]. \end{cases}$$

Тогда при $i = 1, \dots, i_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \bar{v}(-iT + 0) - \bar{v}(-iT - 0) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\bar{v}(-(i-1)T + 0) - \psi_G(-iT)) - \frac{1}{\lambda}(\bar{v}(-(i-1)T - 0) - \psi_G(-iT)) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\bar{v}(-(i-1)T + 0) - \bar{v}(-(i-1)T - 0)) = \dots = \frac{1}{\lambda^{i-1}}(\bar{v}(-T + 0) - \bar{v}(-T - 0)) = \\ &= \frac{1}{\lambda^i} \left((v^\phi(+0) - \psi_G(-T)) - (v^\phi(-0) - \psi_G(-T)) \right) = \frac{1}{\lambda^i} (v^\phi(+0) - v^\phi(-0)) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{v} \in C([-r, 0], \mathbb{R})$. Определим функцию ϕ_G как сужение функции \bar{v} на отрезок $[-r_n, 0]$. Легко видеть, что функция ϕ_G обладает свойством $P\phi_G = \phi$ и благодаря свойству (3.6) является решением уравнения $\phi_G = \lambda^{-1}(\mathcal{M}_G\phi_G - \psi_G)$. Таким образом, $\phi_G \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)^k$.

Допустим, что $P\phi_G = 0$ при $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^k)$. Если $\phi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$, то из предположения индукции следует, что $\phi_G = 0$. В противном случае существует такая функция $\psi_G \in \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^{k-1})$, что $\mathcal{M}_G\phi_G = \lambda\phi_G + \psi_G$. Благодаря (3.7) имеем $\mathcal{M}P\phi_G = \lambda P\phi_G + P\psi_G$. Равенство $P\phi_G = 0$ дает $P\psi_G = 0$. Из предположения индукции получаем, что $\psi_G = 0$. В таком случае $\mathcal{M}_G\phi_G = \lambda\phi_G$, т. е. $\phi_G \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_G - \lambda I)$. Поскольку $P\phi_G = 0$, из первой части доказательства следует, что $\phi_G = 0$.

3. Используя метод математической индукции, мы получаем, что при любом $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda \neq 0$ выполнено равенство $\dim \mathcal{N}((\mathcal{M}_G - \lambda I)^k) = \dim \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$. \square

Лемма 3.1 делает естественным следующее обобщение.

Определение 3.2. Мы будем говорить, что решение \tilde{x} уравнения (1.1) допускает *рациональную аппроксимацию в обобщенном смысле*, если рациональную аппроксимацию допускает решение \tilde{x} уравнения (3.2). Другими словами, для некоторого числа $n_A \in \mathbb{N}$ ($n \leq n_A$) найдутся такие числа $0 < r_i \in \mathbb{Q}$ ($i = n+1, \dots, n_A$) и такая последовательность $\{G_k\}_{k=1}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$, что

$$\|G_k - G_0\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

и уравнения

$$x'(t) = G_k(x(t), x(t-r_1), \dots, x(t-r_{n_A})) \quad (3.11)$$

имеют T_k -периодические решения $\tilde{x}_k(t)$ такие, что

$$\|\tilde{x}_k - \tilde{x}\|_{C[-r, 0]} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

$$|T_k - T| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

где T_k — рациональные числа, $r = \max\{r_i, i = 1, \dots, n_A\}$, функция G_0 определена по формуле (3.1).

Изучим теперь некоторые свойства рациональной аппроксимации решения \tilde{x} уравнения (3.2), допускающего рациональную аппроксимацию. Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ линейный ограниченный оператор $\mathcal{M}_k : C([-r, 0], \mathbb{C}) \rightarrow C([-r, 0], \mathbb{C})$ по формуле

$$\mathcal{M}_k\phi(t) = v_k^\phi(t + T_k) \quad (t \in [-r, 0]), \quad (3.14)$$

где v_k^ϕ — решение начальной задачи

$$v'(t) = \sum_{j=0}^{n_A} \alpha_{kj}(t)v(t-r_j) \quad (t > 0), \quad (3.15)$$

$$v(t) = \phi(t) \quad (t \in [-r, 0]), \quad (3.16)$$

а

$$\alpha_{kj}(t) = \frac{d}{dy_j} G_k(y_0, y_1, \dots, y_{n_A}) \Big|_{y_0 = \tilde{x}_k(t), \dots, y_{n_A} = \tilde{x}_k(t-r_{n_A})}. \quad (3.17)$$

Определим также линейные ограниченные операторы $\mathcal{V}, \mathcal{V}_k : C([-r, 0], \mathbb{C}) \rightarrow C([-r, 0], \mathbb{C})$ по формуле

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}_G^m, \quad \mathcal{V}_k = \mathcal{M}_k^m, \quad (3.18)$$

где $m = \min\{s \in \mathbb{N} : sT > r\}$. Из формулы (3.13) следует, что $m = m_k = \min\{s \in \mathbb{N} : sT_k > r\}$ при достаточно больших значениях k .

Замечание 3.2. Сужения функций \tilde{x}' и \tilde{x}'_k на отрезок $[-r, 0]$ являются собственными функциями операторов \mathcal{V} и \mathcal{V}_k соответственно. Им отвечает собственное значение $\lambda_0 = 1$.

Теорема 3.1. Если существует T -периодическое решение \tilde{x} уравнения (1.1), допускающее рациональную аппроксимацию в смысле определения 3.2, то

$$\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. 1. По определению,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\phi(t) &= v^\phi(t + mT) \quad (t \in [-r, 0]), \\ \mathcal{V}_k\phi(t) &= v_k^\phi(t + mT_k) \quad (t \in [-r, 0]), \end{aligned}$$

где v^ϕ и v_k^ϕ являются решениями начальных задач (3.3), (3.4) и (3.15), (3.16), соответственно. Далее будем писать v и v_k вместо v^ϕ и v_k^ϕ .

Интегрируя (3.3) и (3.15), будем иметь

$$v(t) = \phi(0) + \int_0^t \alpha_{G0}(s)v(s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n_A} \alpha_{Gj}(s)v(s - r_j)ds \quad (t \in [0, i_m r_m]), \quad (3.19)$$

$$v_k(t) = \phi(0) + \int_0^t \alpha_{k0}(s)v_k(s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n_A} \alpha_{kj}(s)v_k(s - r_j)ds \quad (t \in [0, i_m r_m]), \quad (3.20)$$

где $r_m = \min\{r_i, i = 1, \dots, n_A\}$, $i_m = \min\{s \in \mathbb{N} : sr_m > mT\}$. Отметим, что $i_m r_m > mT_k$ при достаточно больших k .

2. Получим оценку для норм $\|v\|_{C[0, i_m r_m]}$ и $\|v_k\|_{C[0, i_m r_m]}$. Поскольку $\{G_k\}_{k=0}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$, из определений (3.5) и (3.17) и формулы (3.10) для всех $j = 0, 1, \dots, n_A$ и $0 < k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\max_{s \in [0, i_m r_m]} |\alpha_{Gj}(s)| \leq C_1, \quad \max_{s \in [0, i_m r_m]} |\alpha_{kj}(s)| \leq C_1. \quad (3.21)$$

Для $(i-1)r_m \leq t \leq ir_m$, $i = 1, \dots, i_m$, из уравнений (3.19) и (3.20) следует

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq \|v\|_{C[-r, 0]} + \int_0^t |\alpha_{G0}(s)v(s)|ds + \sum_{j=1}^{n_A} C_1 i_m r_m \|v\|_{C[-r_j, ir_m - r_j]} \leq \\ &\leq \int_0^t |\alpha_{G0}(s)| |v(s)|ds + (1 + n_A C_1 i_m r_m) \|v\|_{C[-r, ir_m - r_m]}, \end{aligned}$$

$$|v_k(t)| \leq \int_0^t |\alpha_{k0}(s)| |v_k(s)|ds + (1 + n_A C_1 i_m r_m) \|v_k\|_{C[-r, (i-1)r_m]}.$$

Используя лемму Гронуолла, получаем

$$|v(t)| \leq (1 + n_A C_1 i_m r_m) \|v\|_{C[-r, (i-1)r_m]} \exp\left(\int_0^t |\alpha_{G0}(s)|ds\right) \quad (t \in [ir_m - r_m, ir_m]),$$

$$|v_k(t)| \leq (1 + n_A C_1 i_m r_m) \|v_k\|_{C[-r, (i-1)r_m]} \exp\left(\int_0^t |\alpha_{k0}(s)|ds\right) \quad (t \in [ir_m - r_m, ir_m]).$$

Тогда, используя начальные условия (3.4) и (3.16), будем иметь

$$\|v\|_{C[0, i_m r_m]} \leq C_2 \|\phi\|_{C([-r, 0], \mathbb{C})}, \quad (3.22)$$

$$\|v_k\|_{C[0, i_m r_m]} \leq C_2 \|\phi\|_{C([-r, 0], \mathbb{C})}, \quad (3.23)$$

где $C_2 > 1$ не зависит от ϕ и k .

3. Теперь мы оценим норму разности $\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| = \sup_{\substack{\phi \in C([-r,0],\mathbb{C}), \\ \|\phi\|=1}} \|\mathcal{V}_k\phi - \mathcal{V}\phi\|_{C([-r,0],\mathbb{C})}$. Очевидно,

имеет место неравенство:

$$|\mathcal{V}_k\phi(t) - \mathcal{V}\phi(t)| \leq |v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| + |v(t + mT_k) - v(t + mT)| \quad (t \in [-r, 0]). \quad (3.24)$$

Отметим, что $mT_k > r$, $mT > r$.

Из формул (3.19), (3.21) и (3.22) следует, что

$$|v(t + mT_k) - v(t + mT)| \leq C_1 C_2 (n_A + 1) m |T_k - T| \quad (t \in [-r, 0]) \quad (3.25)$$

для всех $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{C})$ таких, что $\|\phi\|_{C([-r, 0], \mathbb{C})} = 1$.

Подставим решения \tilde{x}_k и \tilde{x} в уравнения (3.11) и (3.2) соответственно, затем вычтем правую и левую части уравнения (3.11) из правой и левой частей уравнения (3.2). Теперь проинтегрируем полученный результат на интервалах вида $(0, t)$:

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t) = \int_0^t (G_0(\tilde{x}(t-r_0), \dots, \tilde{x}(t-r_{n_A})) - G_k(\tilde{x}_k(t-r_0), \dots, \tilde{x}_k(t-r_{n_A}))) ds,$$

где $t \in [ir_m - r_m, ir_m]$, $i = 1, \dots, i_m$, $r_0 = 0$. Оценивая модуль подынтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t)| &\leq \int_0^t |G_0(\tilde{x}(s-r_0), \dots, \tilde{x}(s-r_{n_A})) - G_0(\tilde{x}_k(s-r_0), \dots, \tilde{x}_k(s-r_{n_A}))| ds + \\ &\quad + \int_0^t |G_0(\tilde{x}_k(s-r_0), \dots, \tilde{x}_k(s-r_{n_A})) - G_k(\tilde{x}_k(s-r_0), \dots, \tilde{x}_k(s-r_{n_A}))| ds. \end{aligned}$$

Учитывая условие $G_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$, для оценки первого слагаемого мы используем аналог теоремы Лагранжа для многомерного случая. Для оценки второго слагаемого мы используем условие (3.10). Таким образом,

$$\begin{aligned} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_k(t)| &\leq \int_0^t \sum_{i=0}^{n_A} C_1 |\tilde{x}(s-r_i) - \tilde{x}_k(s-r_i)| ds + t\varepsilon(k) \leq \\ &\leq C_1(n_A + 1) \int_{-r}^0 |\tilde{x}(s) - \tilde{x}_k(s)| ds + C_1(n_A + 1) \int_0^t |\tilde{x}(s) - \tilde{x}_k(s)| ds + t\varepsilon(k), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(k) = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, благодаря лемме Гронуолла и условию (3.12), имеем

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\|_{C([-r, ir_m])} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В таком случае, используя определения (3.5) и (3.17) и условие (3.10), получим

$$\|\alpha_{Gi} - \alpha_{ki}\|_{C[0, ir_m]} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Из формул (3.19) и (3.20) следует, что

$$\begin{aligned} |v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| &\leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_A} \int_0^{t+mT_k} |\alpha_{Gi}(s) - \alpha_{ki}(s)| |v_k(s-r_i)| ds + \sum_{i=0}^{n_A} \int_0^{t+mT_k} |\alpha_{Gi}(s)| |v(s-r_i) - v_k(s-r_i)| ds. \end{aligned}$$

Используем для оценки первой суммы формулу (3.26) и оценку (3.23). Для оценки второй суммы используем неравенства (3.21). Таким образом, при $t \in [-r, 0]$ выполнено неравенство

$$|v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| \leq \sum_{i=0}^{n_A} \int_0^{t+mT_k} \varepsilon(k) C_2 \|\phi\|_{C([-r, 0], \mathbb{C})} ds + \sum_{i=0}^{n_A} \int_0^{t+mT_k} C_1 |v(s-r_i) - v_k(s-r_i)| ds,$$

где $\varepsilon(k) = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Учитывая то, что

$$v_k(t) = \phi(t) = v(t) \quad (t \in [-r, 0])$$

и то, что $\|\phi\|_{C([-r, 0], \mathbb{C})} = 1$, получаем

$$|v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| \leq (n_A + 1)(t + mT_k)\varepsilon(k) C_2 + (n_A + 1) \int_0^{t+mT_k} C_1 |v(s) - v_k(s)| ds.$$

Тогда из леммы Гронуолла вытекает

$$|v_k(t + mT_k) - v(t + mT_k)| \leq (n_A + 1)(t + mT_k)\varepsilon(t) C_2 \exp((n_A + 1)(t + mT_k)C_1). \quad (3.27)$$

Наконец, подставляя неравенства (3.25) и (3.27) в (3.24), получаем

$$\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

□

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы докажем некоторое свойство функций из C_T (см. теорему 4.2). Это свойство будет лежать в основе метода построения рациональной аппроксимации, излагаемого в следующем разделе. Название настоящего раздела мотивируется тем, что частным случаем теоремы 4.2 является следующее утверждение:

Теорема 4.1. *Любой функции $\hat{y} \in C_T$ ($\hat{y} \neq \text{const}$) можно поставить в соответствие такие числа $n^* \in \mathbb{N}$ и $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, n^*$), что для любой другой функции $\tilde{y} \in C_T$ существует функция $W \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству*

$$W(\hat{y}(t), \hat{y}(t - q_2), \dots, \hat{y}(t - q_{n^*})) = \tilde{y}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Нам понадобится вспомогательная функция \hat{g} , удовлетворяющая следующему условию.

Условие 4.1. *Пусть*

1. $\hat{g} \in C_T$, $\hat{g} \neq \text{const}$;
2. на полуинтервале $[t_0, t_0 + T)$ функция $\hat{g}(t)$ достигает своего глобального максимума только в одной точке $t = t_m$ (очевидно, наличие этого свойства не зависит от выбора $t_0 \in \mathbb{R}$);
3. существует такая проколота окрестность $\dot{U}(t_m)$ точки t_m , что для любого $t \in \dot{U}(t_m)$ выполнено $\hat{g}'(t) \neq 0$.

Лемма 4.1. *Для любой функции \hat{g} , удовлетворяющей условию 4.1, существуют такие числа $0 < d_b \in \mathbb{R}$, $0 < q \in \mathbb{Q}$, $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_b \in \mathbb{R}$, при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такая функция $U : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, что при $\beta \in [1, \beta_0]$ и $r, p \in \mathbb{R}$ имеем*

$$U(\hat{g}(\beta(t - r)), \hat{g}(\beta(t - r - q)), r, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t - p)), & \beta t \in (t_b + \beta r, t_b + d_b + \beta r), \\ 0, & \beta t \in [t_b + d_b + \beta r, t_b + T + \beta r]. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число, $a_m = \max_{t \in \mathbb{R}} \{\hat{g}(t)\}$. Тогда на полуинтервале $[t_0, t_0 + T)$ существует единственное число t_m такое, что $\hat{g}(t_m) = a_m$. Положим $a = \max\{\hat{g}(t) : t \in [t_0, t_0 + T), t \neq t_m, \hat{g}'(t) = 0\}$. Благодаря условию 4.1 имеем $a < a_m$. Если на полуинтервале $[t_0, t_0 + T)$ функция \hat{g} достигает локального максимума только в одной точке, то число a определим иначе:

$$a = (a_m + \max\{\hat{g}(t) : t \in [t_0, t_0 + T), t \neq t_m, \hat{g}'(t) = 0\})/2.$$

(Это же определение можно использовать и в общем случае, однако оно менее эффективно.) Очевидно, существуют такие числа $t_a \in (t_m - T, t_m)$ и $d_a \in (0, T)$, что

$$t \in (t_a, t_a + d_a) \quad \text{тогда и только тогда, когда } t \in [t_a, t_a + T] \text{ и } \hat{g}(t) > a.$$

Легко видеть, что $t_m \in (t_a, t_a + d_a)$, $\hat{g}'(t) > 0$ при $t \in (t_a, t_m)$ и $\hat{g}'(t) < 0$ при $t \in (t_m, t_a + d_a)$. Поэтому для любого $d_b \in (0, d_a)$ существуют такие числа $b \in (a, a_m)$ и $t_b \in (t_a, t_m)$, что

$$t \in (t_b, t_b + d_b) \quad \text{тогда и только тогда, когда } t \in [t_b, t_b + T] \text{ и } \hat{g}(t) > b. \quad (4.1)$$

Пусть числа $t_l, t_r \in \mathbb{R}$ таковы, что $t_l < t_r$ и $\hat{g}'(t) \neq 0$ при $t \in [t_l, t_r]$. Например, можно положить $t_l = t_a$ и $t_r = (t_m + t_a)/2$. Однако эффективнее выбирать эти числа так, чтобы разность $t_r - t_l$ принимала максимальное значение. Без ограничения общности можно считать, что $t_l < t_a$ (при необходимости заменим t_l и t_r на $t_l - iT$ и $t_r - iT$ соответственно, где $i \in \mathbb{N}$). Тогда существует такая функция $T_x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что при $t \in [t_l, t_r]$ имеет место равенство $T_x(\hat{g}(t)) = t$.

Зафиксируем теперь значение $d_b \in (0, d_a)$ так, чтобы $d_b < t_r - t_l$. Определим числа $b \in (a, a_m)$ и $t_b \in (t_a, t_m)$ так, чтобы имела место формула (4.1). Затем выберем положительное число $q \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $[t_b - q, t_b + d_b - q] \subset (t_l, t_r)$. Положим $\beta_0 = (t_b - t_l + q)/(2q)$. Легко проверить, что число $t_b - q\beta_0$ является серединой интервала $(t_l, t_b - q)$. Поэтому для любого $\beta \in [1, \beta_0]$ имеем $[t_b - \beta q, t_b + d_b - \beta q] \subset (t_l, t_r)$. Рассмотрим функцию $U(\cdot, \cdot, 0, \cdot, \cdot)$, заданную формулой

$$U(y, z, 0, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p), & y > b, \\ 0, & y \leq b. \end{cases}$$

Поскольку при $\beta t \in [t_b, t_b + T]$ имеем $\hat{g}(\beta t) > b$ тогда и только тогда, когда $\beta t \in (t_b, t_b + d_b)$, а при $\beta t \in [t_b, t_b + d_b]$ имеем $\beta t - \beta q \in (t_l, t_r)$ и, следовательно, $T_x(\hat{g}(\beta t - \beta q)) = \beta t - \beta q$, замечаем, что при $\beta \in [1, \beta_0]$ функция U обладает следующим свойством:

$$U(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta t - \beta q), 0, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in (t_b, t_b + d_b), \\ 0, & \beta t \in [t_b + d_b, t_b + T]. \end{cases}$$

Совершая в последнем равенстве замену переменной $t = s - r$, легко видеть, что функция U , заданная по формуле

$$U(y, z, r, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(T_x(z) + \beta(q - p + r)), & y > b, \\ 0, & y \leq b, \end{cases}$$

при $\beta \in [1, \beta_0]$ обладает следующим свойством:

$$U(\hat{g}(\beta(s - r)), \hat{g}(\beta(s - r - q)), r, p, \beta) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta(s - p)), & \beta(s - r) \in (t_b, t_b + d_b), \\ 0, & \beta(s - r) \in [t_b + d_b, t_b + T], \end{cases}$$

т. е. удовлетворяет условию леммы. \square

Далее мы построим семейство функций из пространства $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ со свойством, аналогичным свойству функций $U(\cdot, \cdot, r, p, \beta)$. Для этого нам понадобится вспомогательная функция $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, обладающая свойствами

$$h(t) = 1 \text{ при } t > 1/2, \quad h(t) = 0 \text{ при } t < -1/2, \quad h(t) \in (0, 1) \text{ при } t \in (-1/2, 1/2),$$

для построения которой известно много способов (такая функция не единственна; нам подойдет любая). При $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ нам будут полезны следующие свойства функции h :

$$\begin{cases} h\left(\frac{t - a + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 0, & t < a - \varepsilon, \\ h\left(\frac{t - a + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 1, & t > a, \end{cases} \quad \begin{cases} h\left(\frac{t - a - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 0, & t < a, \\ h\left(\frac{t - a - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) = 1, & t > a + \varepsilon, \end{cases} \quad (4.2)$$

которые очевидно имеют место. Дополнительно мы потребуем, чтобы

$$h'(t) \neq 0 \text{ при } t \in (-1/2, 1/2). \quad (4.3)$$

Лемма 4.2. *Для любой функции \hat{g} , удовлетворяющей условию 4.1, существуют такие числа $q \in \mathbb{Q}$, $\beta_0, d_c, t_c \in \mathbb{R}$, при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такое семейство функций $V(\cdot, \cdot, r, p, \beta, \varepsilon, d) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, что при любых значениях $r, p \in \mathbb{R}$, $\beta \in [1, \beta_0]$, $\varepsilon \in (0, d_c/4)$*

и $d \in (2\varepsilon, d_c]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 & V(\hat{g}(\beta(t-r)), \hat{g}(\beta(t-q-r)), r, p, \beta, \varepsilon, d) = \\
 & = \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t-p)) h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in [t_c + \beta r, t_c + \beta r + \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta(t-p)), & \beta t \in [t_c + \beta r + \varepsilon, t_c + d + \beta r - \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta(t-p)) \left(1 - h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), & \beta t \in [t_c + d + \beta r - \varepsilon, t_c + d + \beta r], \\ 0, & \beta t \in [t_c + d + \beta r, t_c + T + \beta r] \end{cases} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

и оператор $\bar{V} : \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, действующий по формуле

$$\bar{V}(r, p, \beta, \varepsilon, d)(y, z) = V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d),$$

является непрерывным.

Доказательство. 1. Построим функцию V . Пусть числа $a_m, b, q, t_l, t_r, t_b, \beta_0, d_b$ — те же, что в доказательстве леммы 4.1. Пусть $c \in (b, a_m)$, $\Delta_a = c - b$. Тогда числа t_c и d_c существуют и однозначно определяются из следующего условия:

$$t \in (t_c, t_c + d_c) \subset (t_b, t_b + d_b) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad t \in [t_b, t_b + T] \quad \text{и} \quad \hat{g}(t) > c.$$

Рассмотрим функцию $\chi_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, заданную по формуле $\chi_1(y) = h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right)$. Используя формулу (4.2) и определения чисел t_b, d_b и t_c, d_c , для любого $\beta \in \mathbb{R}$ получаем

$$\chi_1(\hat{g}(\beta t)) = 0 \quad \text{при} \quad \beta t \in [t_b + d_b, t_b + T], \quad \chi_1(\hat{g}(\beta t)) = 1 \quad \text{при} \quad \beta t \in (t_c, t_c + d_c).$$

Пусть $0 < \varepsilon < d_c/4$ и $2\varepsilon < d \leq d_c$. Рассмотрим семейство функций $\chi_2(\cdot, \beta, \varepsilon, d) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, заданных формулой

$$\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d) = h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \left(1 - h\left(\frac{T_x(z) - t_c - d + \beta q + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Тогда при $\beta \in [1, \beta_0]$ и $\beta t \in [t_b, t_b + d_b]$ имеем $\beta(t - q) \in [t_l, t_r]$ и, следовательно,

$$\chi_2(\hat{g}(\beta(t - q)), \beta, \varepsilon, d) = h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \left(1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Используя формулу (4.2), легко видеть, что

$$\chi_2(\hat{g}(\beta(t - q)), \beta, \varepsilon, d) = \begin{cases} h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon), \\ 1, & \beta t \in [t_c + \varepsilon, t_c + d - \varepsilon], \\ 1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c + d - \varepsilon, t_c + d), \\ 0, & \beta t \in [t_b, t_b + d_b] \setminus (t_c, t_c + d). \end{cases}$$

Наконец, поскольку при $\beta t \in (t_b, t_b + d_b)$ выполнено равенство $T_x(\hat{g}(\beta t - \beta q)) = \beta(t - q)$, видим, что функция $V(y, z, 0, p, \beta, \varepsilon, d) = \chi_1(y)\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d)\tilde{x}(T_x(z) + \beta(q - p))$ обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned}
 & V(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta(t - q)), 0, p, \beta, \varepsilon, d) = \\
 & = \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t - p)) h\left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon), \\ \tilde{x}(\beta(t - p)), & \beta t \in [t_c + \varepsilon, t_c + d - \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta(t - p)) \left(1 - h\left(\frac{\beta t - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), & \beta t \in (t_c + d - \varepsilon, t_c + d), \\ 0, & \beta t \in [t_b, t_b + T] \setminus (t_c, t_c + d). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему доказательству, используя замену переменной $t = s - r$, легко видеть, что определенные по формуле $V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d) = \chi_1(y)\chi_2(z, \beta, \varepsilon, d)\tilde{x}(T_x(z) + (q + r - p)\beta)$ функции $V(\cdot, \cdot, r, p, \beta, \varepsilon, d) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ обладают свойством

$$V(\hat{g}(\beta(t-r)), \hat{g}(\beta(t-q-r)), r, p, \beta, \varepsilon, d) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t-p))h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right), & \beta t \in (t_c + \beta r, t_c + \beta r + \varepsilon), \\ \tilde{x}(\beta(t-p)), & \beta t \in [t_c + \beta r + \varepsilon, t_c + \beta r + d - \varepsilon], \\ \tilde{x}(\beta(t-p))\left(1 - h\left(\frac{\beta t - \beta r - t_c - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right), & \beta t \in (t_c + \beta r + d - \varepsilon, t_c + \beta r + d), \\ 0, & \beta t \in [t_b + \beta r, t_b + \beta r + T] \setminus (t_c + \beta r, t_c + \beta r + d), \end{cases}$$

т. е. удовлетворяют условию леммы.

2. Докажем непрерывность оператора \bar{V} . Выпишем функцию V и ее производные:

$$V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d) = h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left(1 - \left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p + \beta r)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d) = \frac{1}{\Delta_a} h'\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left(1 - h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p + \beta r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} V(y, z, r, p, \beta, \varepsilon, d) = \frac{(T_x(z))'}{\varepsilon} h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h'\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left(1 - h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p + \beta r) - \\ - \frac{(T_x(z))'}{\varepsilon} h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \times \\ \times h'\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \tilde{x}(T_x(z) + \beta q - \beta p + \beta r) + \\ + (T_x(z))' h\left(\frac{y - c - \Delta_a/2}{\Delta_a}\right) h'\left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - \varepsilon/2}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left(1 - \left(\frac{T_x(z) - t_c + \beta q - d + \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{x}'(T_x(z) + \beta q - \beta p + \beta r).$$

Нам достаточно доказать непрерывность вышеприведенных функций по переменным $(r, p, \beta, \varepsilon, d) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$, равномерную относительно совокупности параметров $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Отметим, что по определению функция h непрерывно дифференцируема и ограничена, функция h' непрерывна и имеет компактный носитель (поэтому ограничена), функция \tilde{x} непрерывно дифференцируема и периодическая, функция $T_x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. В частности, функции $h, h', \tilde{x}, \tilde{x}'$ равномерно непрерывны (как функции одного аргумента). Для завершения доказательства достаточно несколько раз воспользоваться равномерной относительно параметров непрерывностью по своим переменным суммы и произведения функций, которые являются равномерно относительно параметров непрерывными по своим переменным и при произвольных фиксированных значениях своих переменных являются ограниченными функциями своих параметров. Кроме того, мы пользуемся равномерной относительно параметров непрерывностью по своим переменным сложной функции, полученной в результате композиции равномерно непрерывной функции одного аргумента и функции, непрерывной по своим переменным равномерно относительно параметров. \square

Замечание 4.1. Не меняя доказательства леммы 4.1, мы можем в случае необходимости получить значение величины d_c (а, следовательно, и d) сколь угодно малым, а значение β_0 — сколь угодно близким к 1. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $T > 7d_c$ и $\beta_0 < 1 + d_c/(8T) < 1 + 1/16$.

Лемма 4.3. Пусть функция \hat{g} удовлетворяет условию 4.1. Тогда существуют такие числа $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ и $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, 2n_1 + 2$), при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такое семейство функций $U_0(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$, что при $\beta \in [1, \beta_0]$ и $p \in \mathbb{R}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$U_0(\hat{g}(\beta t), \hat{g}(\beta(t - q_2)), \dots, \hat{g}(\beta(t - q_{2n_1+2})), p, \beta) = \tilde{x}(\beta(t - p)) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (4.5)$$

и оператор $\bar{U}_0 : \mathbb{R} \times [1, \beta_0] \rightarrow C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$, действующий по формуле

$$\bar{U}_0(p, \beta)(y_1, \dots, y_{2n_1+2}) = U_0(y_1, \dots, y_{2n_1+2}, p, \beta),$$

непрерывен.

Доказательство. Пусть числа t_c, d_c, β_0 определены в доказательстве леммы 4.2 с учетом замечания 4.1. Положим $T_0 \in (T - d_c/2, T - 3d_c/8) \cap \mathbb{Q}$, $n_1 = [T_0/d_c] + 2$ и $r = \frac{T_0}{n_1} = \frac{T_0}{[T_0/d_c] + 2}$, где $[\cdot]$ обозначает операцию взятия целой части от числа. Очевидно, $0 < r \in \mathbb{Q}$. Зафиксируем произвольное число $\beta \in [1, \beta_0]$. Тогда благодаря замечанию 4.1 имеют место следующие оценки:

$$d_c - \beta r = d_c - \frac{\beta T_0}{[T_0/d_c] + 2} \leq \beta d_c - \frac{\beta T_0}{T_0/d_c + 2} \leq \frac{2\beta d_c^2}{T_0 + 2d_c} < d_c/4,$$

$$d_c - \beta r \geq d_c - \frac{\beta T_0}{T_0/d_c + 1} = d_c \beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{T_0}{T_0 + d_c} \right) > d_c \left(\frac{1}{1 + d_c/(8T_0)} - \frac{T_0}{T_0 + d_c} \right) = \varepsilon_0 > 0.$$

Следовательно, в лемме 4.2 мы можем положить $\varepsilon = d_c - \beta r$. Определим число $d = T - \beta T_0 + \varepsilon$. Тогда благодаря замечанию 4.1 имеют место следующие оценки:

$$d < T - \beta(T - d_c/2) + d_c/4 = T(1 - \beta) + \beta d_c/2 + d_c/4 < (1 + 1/16)d_c/2 + d_c/4 < d_c,$$

$$d > T - \beta(T - 3d_c/8) + \varepsilon = T(1 - \beta) + 3\beta d_c/8 + \varepsilon > -d_c/8 + 3d_c/8 + \varepsilon > 2\varepsilon.$$

При таком определении $T = d + \beta n_1 r - \varepsilon$ и $d_c - \varepsilon = \beta r$. Поэтому

$$[t_c, t_c + T] = \left\{ \bigcup_{i=0}^{n_1} \bar{I}_i \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{n_1} \bar{J}_i \right\},$$

где

$$J_i = (t_c + \beta i r, t_c + \beta i r + \varepsilon) \quad \text{при } i = 0, \dots, n_1,$$

$$I_i = (t_c + \beta i r + \varepsilon, t_c + d_c + \beta i r - \varepsilon) = (t_c + \beta i r + \varepsilon, t_c + \beta(i+1)r) \quad \text{при } i = 0, \dots, n_1 - 1,$$

$$I_{n_1} = (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon).$$

По построению $d > 2\varepsilon$ и $\beta r = d_c - \varepsilon > 3\varepsilon$. Поэтому множества I_i, J_i не вырождаются и попарно не пересекаются.

Пусть функция V определена в лемме 4.2. Используя в правой части формулы (4.4) равенство $d_c - \varepsilon/2 = \beta r + \varepsilon/2$ в 3-ей строчке и T -периодичность левой части в 4-ой строчке, при $i = 0, \dots, n_1 - 1$ по определению получаем:

$$V(\hat{g}(\beta(t - ir)), \hat{g}(\beta(t - q - ir)), ir, p, \beta, \varepsilon, d_c) =$$

$$= \begin{cases} \tilde{x}(\beta(t - p)) h \left(\frac{\beta t - (t_c + \beta i r + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right), & \beta t \in (t_c + \beta i r, t_c + \beta i r + \varepsilon) = J_i, \\ \tilde{x}(\beta(t - p)), & \beta t \in (t_c + \beta i r + \varepsilon, t_c + d_c + \beta i r - \varepsilon) = I_i, \\ \tilde{x}(\beta(t - p)) \left(1 - h \left(\frac{\beta t - (t_c + \beta(i+1)r + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right) \right), & \beta t \in (t_c + d_c + \beta i r - \varepsilon, t_c + d_c + \beta i r) = J_{i+1}, \\ 0, & \beta t \in (t_c, t_c + T] \setminus (J_i \cup \bar{I}_i \cup J_{i+1}). \end{cases}$$

Поскольку $d + \beta n_1 r - \varepsilon = T$, имеем $(t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r) = (t_c + T, t_c + \varepsilon + T)$. Тогда благодаря T -периодичности функций \tilde{x} и \hat{g} , при $\beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon)$ имеем $\beta t + T \in (t_c + d + \beta n_1 r - \varepsilon, t_c + d + \beta n_1 r)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} V(\hat{g}(\beta(t - n_1 r)), \hat{g}(\beta(t - q - n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) &= \\ &= V(\hat{g}(\beta t + T - \beta n_1 r), \hat{g}(\beta t + T - \beta q - \beta n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) = \\ &= \tilde{x}(\beta t + T - \beta p) \left(1 - h \left(\frac{\beta t + T - t_c - d - \beta n_1 r + \varepsilon/2}{\varepsilon} \right) \right) = \\ &= \tilde{x}(\beta t - \beta p) \left(1 - h \left(\frac{\beta t - t_c - \varepsilon/2}{\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, благодаря T -периодичности функция

$$V(\hat{g}(\beta(t - n_1 r)), \hat{g}(\beta(t - q - n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d) = \begin{cases} \tilde{x}(\beta t - \beta p) \left(1 - h \left(\frac{\beta t - (t_c + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right) \right), & \beta t \in (t_c, t_c + \varepsilon) = J_0, \\ 0, & \beta t \in (t_c, t_c + T] \setminus (J_0 \cup \overline{I_{n_1}} \cup J_{n_1}), \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p) h \left(\frac{\beta t - (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right), & \beta t \in (t_c + \beta n_1 r, t_c + \beta n_1 r + \varepsilon) = J_{n_1}, \\ \tilde{x}(\beta t - \beta p), & \beta t \in (t_c + \beta n_1 r + \varepsilon, t_c + d + \beta(n_1)r - \varepsilon) = I_{n_1}. \end{cases}$$

Определим функции $U_0(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$ по формуле

$$U_0(y_0, \dots, y_{n_1}, z_0, \dots, z_{n_1}, p, \beta) = \sum_{i=0}^{n_1-1} V(y_i, z_i, ir, p, \beta, \varepsilon, d_c) + V(y_{n_1}, z_{n_1}, n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_0(\hat{g}(\beta(t)), \dots, \hat{g}(\beta(t - n_1 r)), \hat{g}(\beta(t - q)), \dots, \hat{g}(\beta(t - q - n_1 r)), p, \beta) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n_1-1} V(\hat{g}(\beta(t - ir)), \hat{g}(\beta(t - q - ir)), ir, p, \beta, \varepsilon, d_c) + \\ &\quad + V(\hat{g}(\beta(t - n_1 r)), \hat{g}(\beta(t - q - n_1 r)), n_1 r, p, \beta, \varepsilon, d). \end{aligned}$$

При каждом $t \in (t_c/\beta, (t_c + T)/\beta]$ за исключением конечного числа точек число βt принадлежит одному из множеств I_i или J_i ($i = 0, \dots, n_1$). Если $\beta t \in I_{i_0}$ при $i_0 = 0, \dots, n_1$, то

$$\begin{aligned} U_0(\hat{g}(\beta(t)), \dots, \hat{g}(\beta(t - n_1 r)), \hat{g}(\beta(t - q)), \dots, \hat{g}(\beta(t - q - n_1 r)), p, \beta) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n_1} \tilde{x}(\beta t - \beta p) \delta_{i, i_0} = \tilde{x}(\beta t - \beta p). \end{aligned}$$

Если $\beta t \in J_{i_0}$ при $i_0 = 1, \dots, n_1$, то

$$\begin{aligned} U_0(\hat{x}(\beta(t)), \dots, \hat{x}(\beta(t - n_1 r)), \hat{x}(\beta(t - q)), \dots, \hat{x}(\beta(t - q - n_1 r)), p, \beta) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{x}(\beta t - \beta p) \left(\delta_{i, i_0} h \left(\frac{\beta t - (t_c + \beta ir + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{i+1, i_0} \left(1 - h \left(\frac{\beta t - (t_c + \beta(i+1)r + \varepsilon/2)}{\varepsilon} \right) \right) \right) = \tilde{x}(\beta t - \beta p). \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что равенство (4.5) имеет место при $\beta t \in J_0$.

На полуинтервале $(t_c, t_c + T]$ осталось не рассмотренным лишь конечное число точек. Поскольку правая и левая части равенства (4.5) непрерывны, при $\beta t \in (t_c, t_c + T]$ это равенство имеет место всегда. Но функции \hat{g} и \tilde{x} имеют период T , так что лемма доказана. При этом $q_i = (i - 1)r$ ($i = 1, \dots, n_1 + 1$), $q_i = q + (i - n_1)r$ ($i = n_1 + 2, \dots, 2n_1$).

Поскольку при $\beta \in [1, \beta_0]$ выполнено неравенство $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, из леммы 4.2 получаем, что оператор \bar{U}_0 является конечной суммой непрерывных операторов. Поэтому оператор \bar{U}_0 является непрерывным. \square

Чтобы избавиться от условия 4.1, нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 4.4. Пусть $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $y(t) \neq \text{const}$ и $A = \{t \in [a, b] : y'(t) = 0\}$. Тогда множество $y(A)$ нигде не плотно в области значений функции y . В частности, существует такое значение $y_0 \in \mathbb{R}$, что $y(t_0) = y_0$ при некотором $t_0 \in [a, b]$, однако $y(t) \neq y_0$ при $t \in A$. При этом значение y_0 на отрезке $[a, b]$ функция y принимает лишь в конечном числе точек.

Доказательство. Множество A , очевидно, является компактом на отрезке $[a, b]$. Пусть $B_{\delta p}$ — δ -окрестность точки $p \in A$. Поскольку $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ и $y'(p) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|y'(s)| < \varepsilon$ при $s \in B_{\delta p}$ для любого $p \in A$. Рассмотрим покрытие $\{B_{\delta p}, p \in A\}$ компакта A . Имеем $|y'(s)| < \varepsilon$ для любого $s \in B_\varepsilon = \bigcup_{p \in A} B_{\delta p}$. Поскольку A — компакт, из покрытия

$\{B_{\delta p}, p \in A\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{B_{\delta p_1}, \dots, B_{\delta p_m}\}$. Множество $\tilde{B}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^m B_{\delta p_i}$

является объединением конечного числа интервалов I_i ($i = 1, \dots, i_0$), суммарная длина которых $d < b - a + 2\delta$ (длина каждого не меньше 2δ). При этом $y'(s) < \varepsilon$ для всех $s \in \tilde{B}_\varepsilon$. Пусть $\text{meas}(I_i) = d_i$. Тогда $\text{meas}(y(I_i)) \leq d_i \varepsilon$. Поэтому $\text{meas}(y(A)) < \text{meas}(y(\tilde{B}_\varepsilon)) < d\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\text{meas}(y(A)) = 0$. Таким образом, имеет место первое утверждение леммы.

Допустим, что при некотором $y_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющем первому утверждению леммы, существует счетное множество различных чисел $t_i \in y^{-1}(y_0)$ ($i = 1, \dots, \infty$). Из этого множества выделим монотонную сходящуюся последовательность $t_{i_k} \rightarrow t_0$. Будем считать, что $t_{i_k} < t_{i_{k+1}}$. При этом по непрерывности получаем $y(t_0) = y_0$. Поскольку $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $s_k \in [t_{i_k}, t_{i_{k+1}}]$, что $y'(s_k) = 0$. Очевидно, $s_k \rightarrow t_0$. Снова используя то, что $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, получаем $y'(t_0) = 0$. При этом $y(t_0) = y_0$. Из полученного противоречия вытекает последнее утверждение леммы. \square

Лемма 4.5. Пусть $\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x} \neq \text{const}$) и $T_2 \in (0, T)$. Тогда существует такое число $s^* \in \mathbb{R}$, что $\hat{x}(s^*) \neq \hat{x}(s^* - T_2)$ и $\hat{x}'(s^*) \neq 0$.

Доказательство. Положим $y(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}(t - T_2)$. Предположим, что $y(t) = \delta = \text{const}$. Поскольку T_2 не является периодом, имеем $\delta \neq 0$. Неравенство $\delta \neq 0$ противоречит периодичности (ограниченности) функции \hat{x} . Следовательно, $y(t) \neq \text{const}$. Тогда существует такой невырожденный интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, что $y(s) \neq 0$ и $y'(s) \neq 0$ при $s \in (a, b)$. Если $\hat{x}'(t^*) \neq 0$ для некоторого $t^* \in (a, b)$, то, положив $s^* = t^*$, мы приходим к утверждению леммы. В противном случае для любого $s \in (a, b)$ имеем $\hat{x}'(s) = 0$ и $\hat{x}'(s - T_2) \neq 0$, т. е. $(a, b) \subset \Pi_1 \setminus \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \{t \in [0, T) : \hat{x}'(t - T_2) \neq 0\} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \{t \in [0, T) : \hat{x}'(t) \neq 0\}.$$

Допустим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда

$$\exists T_2 : \forall s \in \mathbb{R} \quad \hat{x}'(s) \neq 0 \Rightarrow \hat{x}(s) = \hat{x}(s - T_2). \quad (4.6)$$

Если $p \in \Pi_2$, то благодаря непрерывности функции \hat{x} имеем $\hat{x}'(s) \neq 0$ в некоторой окрестности $U(p)$ точки p . Поэтому из (4.6) следует, что $\hat{x}(s) = \hat{x}(s - T_2)$ для любого $s \in U(p)$. Тогда $\hat{x}'(p - T_2) = \hat{x}'(p) \neq 0$, т. е. $p \in \Pi_1$. Следовательно, $\text{meas} \Pi_1 - \text{meas} \Pi_2 \geq b - a$, что противоречит T -периодичности функции \hat{x} . \square

Теперь мы сможем снять ограничение, связанное с условием 4.1.

Лемма 4.6. Пусть функция $\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x}(t) \neq \text{const}$). Тогда существуют такие числа $n^* \in \mathbb{Z}$ и $0 < \hat{q}_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, n^*$) и такая функция $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$, что функция

$$\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t), \hat{x}(t - q_2), \dots, \hat{x}(t - q_{n^*})),$$

удовлетворяет условию 4.1.

Доказательство. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число. Пусть функция $\hat{x} \in C_T$ и $\hat{x}(t) \neq \text{const}$. Из леммы 4.4 следует, что существует число $y_0 \in \mathbb{R}$, для которого

1. $\exists t \in (t_0, t_0 + T] : \hat{x}(t) = y_0$;
2. $\hat{x}(t) = y_0 \Rightarrow \hat{x}'(t) \neq 0$.

При этом множество точек $t \in (t_0, t_0 + T]$, в которых $\hat{x}(t) = y_0$, конечно, т. е. существуют такие числа $n^* \in \mathbb{Z}$ и $t_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n^*$), что

$$t \in (t_0, t_0 + T], \hat{x}(t) = y_0 \Leftrightarrow t \in \{t_1, \dots, t_{n^*}\}.$$

Далее будем считать, что $t_i > t_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n^* - 1$). Тогда существует такое число $d_{0x} \in \mathbb{R}$, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \hat{x}(t) \in [y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}] \Rightarrow \hat{x}'(t) \neq 0.$$

Это свойство сохраняется для любого $d_x \in (0, d_{0x})$. Пусть $[t_{0li}, t_{0ri}]$ — отрезок наибольшей длины, содержащий точку t_i и принадлежащий множеству $\hat{x}^{-1}([y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}])$. Поскольку $\hat{x} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, эти отрезки попарно не пересекаются даже после сдвига одного из них на период T . Поэтому, действуя от противного, легко доказать, что для любого $i \in \{1, \dots, n^*\}$ выполнено включение $[t_{0li}, t_{0ri}] \subset (t_{0r1} - T, t_{0r1}]$. Таким образом,

$$t \in (t_{0r1} - T, t_{0r1}], \hat{x}(t) \in [y_0 - d_{0x}, y_0 + d_{0x}] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{0li}, t_{0ri}].$$

При уменьшении значения d_{0x} величины $t_i - t_{0li}$ и $t_{0ri} - t_i$ также уменьшаются. Эта зависимость непрерывна. Следовательно, для любого $0 < d_t \in \mathbb{R}$ существуют числа $d_x \in (0, d_{0x})$, $t_{li} \in \mathbb{R}$ и $t_{ri} > t_{li}$ ($i = 1, \dots, n^*$), обладающие следующими свойствами:

$$t \in (t_{r1} - T, t_{r1}], \hat{x}(t) \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}] \quad \text{и при этом} \quad (4.7)$$

$$0 < t_i - t_{li} < d_t, \quad 0 < t_{ri} - t_i < d_t, \quad t_i \in [t_{li}, t_{ri}] \subset [t_{0li}, t_{0ri}], \quad \hat{x}'(t) \neq 0 \text{ при } t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}].$$

Пусть $T_2 = t_1 - t_2 < T$. Выберем число $\hat{s}_2 \in (t_1 - T, t_1]$ так, чтобы $\hat{x}(\hat{s}_2) \neq \hat{x}(\hat{s}_2 - T_2)$ и $\hat{x}'(\hat{s}_2) \neq 0$ (см. лемму 4.5). Поскольку $\hat{x} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, существует такой отрезок $[s_{l2}, s_{r2}] \ni \hat{s}_2$, что $\hat{x}'(s) \neq 0$ для всех $s \in [s_{l2}, s_{r2}]$ и $J_{1,2} \cap J_2 = \emptyset$, где $J_{1,2} = \{\hat{x}(t), t \in [s_{l2}, s_{r2}]\}$, $J_2 = \{\hat{x}(t), t \in [s_{l2} - T_2, s_{r2} - T_2]\}$. Очевидно, существует такое число $0 < \hat{q}_2 \in \mathbb{Q}$, что $s_2 = t_1 - \hat{q}_2 \in (s_{l2}, s_{r2})$. Тогда $\hat{x}'(s_2) \neq 0$ и $t_2 - \hat{q}_2 \in [s_{l2} - T_2, s_{r2} - T_2]$.

Аналогично доказывается, что при каждом $i \in \{3, \dots, n^*\}$ существуют такие числа $T_i = t_1 - t_i$ и $\hat{q}_i \in \mathbb{Q}$, отрезок $[s_{li}, s_{ri}]$ и множества

$$J_{1,i} = \{\hat{x}(t), t \in [s_{li}, s_{ri}]\} \quad \text{и} \quad J_i = \{\hat{x}(t), t \in [s_{li} - T_i, s_{ri} - T_i]\},$$

что $J_{1,i} \cap J_i = \emptyset$, $s_i = t_1 - \hat{q}_i \in (s_{li}, s_{ri})$, $t_i - \hat{q}_i \in [s_{li} - T_i, s_{ri} - T_i]$, $\hat{x}'(s_i) \neq 0$.

Выберем такое число $d_t \in \mathbb{R}$, что

$$0 < d_t < \min\{s_2 - s_{l2}, s_{r2} - s_2, \dots, s_{n^*} - s_{ln^*}, s_{rn^*} - s_{n^*}\},$$

и определим числа $d_x \in (0, d_{0x})$, $t_{li} \in \mathbb{R}$ и $t_{ri} > t_{li}$ ($i = 1, \dots, n^*$) в соответствии с формулой (4.7). Рассмотрим множество

$$J_0 = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n^*} : v_1 \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x], v_2 \in J_{1,2}, \dots, v_{n^*} \in J_{1,n^*} \right\}.$$

По построению

$$t \in (t_{r1} - T, t_{r1}], \hat{x}(t) \in [y_0 - d_x, y_0 + d_x] \Leftrightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{n^*} [t_{li}, t_{ri}].$$

Однако, при $i \in \{2, \dots, n^*\}$, если $t \in [t_{li}, t_{ri}]$, то $t - \hat{q}_i \in [s_{li} - T_i, s_{ri} - T_i]$ и, следовательно, $\hat{x}(t - \hat{q}_i) \notin J_{1,i}$. Таким образом, при $t \in (t_{r1} - T, t_{r1}]$ имеем

$$(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*}))^T \in J_0 \Leftrightarrow t \in [t_{l1}, t_{r1}].$$

Зафиксируем вектор $v_0 = (\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_1 - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t_1 - \hat{q}_{n^*}))^T$. Очевидно, $v_0 \in J_0$. Поскольку $\hat{x}'(t) \neq 0$ при $t \in [t_{l1}, t_{r1}]$ и $t_1 \in [t_{l1}, t_{r1}]$, имеем

$$t \in (t_{r1} - T, t_{r1}], (\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*}))^T = v_0 \Leftrightarrow t = t_1,$$

Определим функцию $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$ по формуле

$$g(v) = h \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (v_i - v_{0i})^2 \right).$$

Очевидно, эта функция достигает максимума только в точке $v_0 \in \mathbb{R}^{n^*}$.

Рассмотрим функцию $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, заданную формулой $\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \hat{q}_2), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*}))$. Очевидно, на полуинтервале $[t_1, t_1 + T)$ эта функция достигает глобального максимума только в точке t_1 .

Положим $\hat{q}_1 = 0$ и выпишем производную

$$\hat{g}'(t) = -2h' \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i))^2 \right) \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i)) \hat{x}'(t - \hat{q}_i).$$

Поскольку $\hat{x}'(t_1 - \hat{q}_i) \neq 0$ ($i = 1, \dots, n^*$), найдется такая проколотая окрестность $\dot{U}(t_1)$ точки t_1 , в которой $\hat{x}'(t - \hat{q}_i) \neq 0$ ($i = 1, \dots, n^*$). Таким образом,

$$(\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i)) \hat{x}'(t - \hat{q}_i) > 0 \quad \text{при } t \in \dot{U}(t_1)$$

и, следовательно, сумма, стоящая в выражении для $\hat{g}'(t)$, больше нуля при $t \in \dot{U}(t_1)$.

Поскольку при $t \in \dot{U}(t_1)$ имеем $\hat{x}'(t) \neq 0$, при $t \in \dot{U}(t_1)$ выполнено $(\hat{x}(t - \hat{q}_1) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_1))^2 > 0$. Учитывая непрерывность функции \hat{x} , получаем, что в достаточно малой проколотой окрестности точки t_1

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n^*} (\hat{x}(t - \hat{q}_i) - \hat{x}(t_1 - \hat{q}_i))^2 < \frac{1}{2}.$$

Тогда в этой окрестности благодаря формуле (4.3) множитель перед суммой в выражении для $\hat{g}'(t)$ тоже отличен от нуля. Лемма доказана. \square

Теорема 4.2. Для любой функции $\hat{x} \in C_T$ ($\hat{x} \neq \text{const}$) найдутся такие числа $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, n_0$), при которых для любой функции $\tilde{x} \in C_T$ найдется такое семейство функций $W(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$, что для любой пары $(\beta, p) \in [1, \beta_0] \times \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$W(\hat{x}(\beta t), \hat{x}(\beta t - \beta q_2), \dots, \hat{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), p, \beta) = \tilde{x}(\beta t - \beta p), \quad t \in \mathbb{R},$$

и оператор $\overline{W} : \mathbb{R} \times [1, \beta_0] \rightarrow C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$, действующий по формуле

$$\overline{W}(p, \beta)(y_1, \dots, y_{n_0}) = W(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta),$$

непрерывен.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}, \hat{x} \in C_T$, и пусть числа $n^* \in \mathbb{N}$, $0 < \hat{q}_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, n^*$), $\hat{q}_1 = 0$, и функция $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$ определены в лемме 4.6. Тогда функция $\hat{g}(t) = g(\hat{x}(t - \hat{q}_1), \dots, \hat{x}(t - \hat{q}_{n^*}))$ удовлетворяет условию 4.1. Теперь определим числа $n_1 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ ($i = 2, \dots, n_1 + 1$), $q_1 = 0$, и семейство функций $U_0(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{2n_1+2}, \mathbb{R})$ в соответствии с леммой 4.3. Следовательно имеет место равенство (4.5). Рассмотрим функцию

$$W(y_{1,1}, \dots, y_{2n_1+2,1}, y_{1,2}, \dots, y_{2n_1+2,n^*}, p, \beta) = U_0(g(y_{1,1}, \dots, y_{1,n^*}), \dots, g(y_{2n_1+2,1}, \dots, y_{2n_1+2,n^*}), p, \beta).$$

При $n_0 = 2(n_1 + 1)n^*$ и $q_{i+(k-1)n^*} = q_i + \hat{q}_k$ ($i = 1, \dots, 2n_1 + 2$, $k = 1, \dots, n^*$) (поскольку $\hat{q}_1 = 0$, здесь не происходит переобозначений) функция W является искомой. Непрерывность оператора \overline{W} следует из непрерывности оператора \overline{U}_0 и включения $g \in C^1(\mathbb{R}^{n^*}, \mathbb{R})$. \square

Отметим, что изложенный выше метод построения функции W в первую очередь доказывает существование такой функции. Вероятнее всего, в каждом конкретном случае можно предложить более простые построения, используя индивидуальные свойства известных функций \tilde{x} и \hat{x} .

5. ПОСТРОЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В этом разделе мы продолжим рассматривать T -периодическое решение \tilde{x} уравнения (1.1) при $T \notin \mathbb{Q}$. Используя теорему 4.2, мы построим рациональную аппроксимацию (в смысле определения 3.2) без каких-либо дополнительных требований относительно уравнения (1.1) и его решения \tilde{x} .

Пусть $\tilde{x} \in C_T$ — периодическое решение уравнения (1.1). Тогда функция $\bar{x} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенная по формуле $\bar{x}(t) = \tilde{x}(\beta t)$, является решением уравнения

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t - r_1/\beta), \dots, x(t - r_n/\beta))$$

(это проверяется непосредственной подстановкой и заменой переменной $\beta t = s$). В таком случае, \bar{x} является также решением следующего уравнения:

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t - r_1) + \Delta(t, 1, \beta), \dots, x(t - r_n) + \Delta(t, n, \beta)),$$

где $\Delta(t, i, \beta) = \bar{x}(t - r_i/\beta) - \bar{x}(t - r_i) = \tilde{x}(\beta t - r_i) - \tilde{x}(\beta t - \beta r_i)$. Пусть числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$, $i = 2, \dots, n_0$ и $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, а также семейство функций $W(\cdot, \dots, \cdot, i, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$ определены в соответствии с теоремой 4.2. Тогда при $\beta \in [1, \beta_0]$, $q_1 = 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\Delta(t, i, \beta) = W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \dots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i/\beta, \beta) - W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \dots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i, \beta).$$

Определим семейство функций $F(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$ по формуле

$$F(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta) = W(y_1, \dots, y_{n_0}, p/\beta, \beta) - W(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta).$$

Из теоремы 4.2 следует, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} F(\bar{x}(t - q_1), \dots, \bar{x}(t - q_{n_0}), r_i, \beta) &= \Delta(t, i, \beta) \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \|F(\cdot, \dots, \cdot, i, \beta)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} &\rightarrow 0 \quad \text{при } \beta \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Определим функцию $G_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n_0+n}, \mathbb{R})$ по формуле

$$G_0(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) = f(y_1, z_1, \dots, z_n),$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ определено выше.

Поставим в соответствие каждому числу $k \in \mathbb{N}$ такое число $\beta_k \in [1, \beta_0]$, что $0 < \beta_k - 1 < 1/k$ и $\beta_k T \in \mathbb{Q}$. Пусть

$$G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) = \beta_k f(y_1, z_1 + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_1, \beta_k), \dots, z_n + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_n, \beta_k)), \quad (5.1)$$

где функция F определена выше.

Лемма 5.1. *Функции G_k , определенные по формуле (5.1), удовлетворяют определению 3.2 при $n_A = n_0 + n - 1$ и $0 < r_i = q_{i-n+1}$, $i = n + 1, \dots, n_A$.*

Доказательство. Рассмотрим при $i \in \{2, \dots, n_0\}$ производные

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial y_i} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) \right| = \\ &= \left| \beta_k \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} f(y_1, z_1 + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_1, \beta_k), \dots, z_n + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_n, \beta_k)) \frac{\partial F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_j, \beta_k)}{\partial y_i} \right| \leq \\ &\leq n \beta_k \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1})} \max_{j=1, \dots, n} \|F(\cdot, \dots, \cdot, r_j, \beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

При $k \rightarrow \infty$ имеем $\beta_k \rightarrow 1$ и, следовательно, $\|F(\cdot, \dots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \rightarrow 0$. Значит,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Аналогично получается, что при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1} f(y_1, z_1, \dots, z_n), \\ \frac{\partial}{\partial z_j} G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_{n_0}) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial z_j} f(y_1, z_1, \dots, z_n) \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Таким образом, из сходимости $\|F(\cdot, \dots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ следует сходимость (3.10).

Поскольку $\beta_k \in [1, \beta_0]$, имеем

$$\begin{aligned} G_k(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k(t - r_1)), \dots, \tilde{x}(\beta_k(t - r_n)), \tilde{x}(\beta_k(t - q_2)), \dots, \tilde{x}(\beta_k(t - q_{n_0}))) = \\ = \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k t - r_1), \dots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)). \end{aligned}$$

Тогда, подставляя функцию $x(t) = \tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ в уравнение (3.11), получаем

$$\frac{d\tilde{x}(\beta_k t)}{dt} = \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \dots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)).$$

Последнее равенство является тождеством, т. к. \tilde{x} является решением уравнения (1.1). Следовательно, \tilde{x}_k является решением уравнения (3.11). При этом каждая функция $\tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ имеет рациональный период T/β_k . Наличие свойств (3.12) и (3.13) очевидно. \square

Из леммы 5.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Любое периодическое решение уравнения (1.1) допускает рациональную аппроксимацию в смысле определения 3.2.*

6. КРИТЕРИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО ПЕРИОДА

В этом разделе мы получим необходимые и достаточные условия гиперболичности периодического решения в случае иррационального периода. Доказательство будет основано на связи спектральных свойств оператора \mathcal{V} и операторов \mathcal{V}_k , соответствующих рациональной аппроксимации (понимаемой в смысле определения 3.2).

Пусть $\tilde{x} \in C_T$ — периодическое решение уравнения (1.1). Определим числа $n_A \in \mathbb{N}$ и $0 < r_i \in \mathbb{Q}$ ($i = n + 1, \dots, n_A$) и последовательности $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$, $\{G_k\}_{k=0}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$ и $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ так же, как они были определены в разделе 5 (по построению эти числа и последовательности удовлетворяют определению 3.2). Операторы \mathcal{V} и \mathcal{V}_k определим по формуле (3.18). Как и прежде, $r = \max\{r_i, i = 1, \dots, n_A\}$, $m = \min\{p \in \mathbb{N} : pT > r\}$.

I. Поскольку при каждом значении $0 < k \in \mathbb{N}$ решение \tilde{x}_k уравнения (3.11) имеет рациональный период $T_k \in \mathbb{Q}$, мы можем использовать результаты раздела 2. Представим рациональные числа T_k ($k = 1, 2, \dots$) и r_i ($i = 1, \dots, n_A$) в виде дробей $T_k = \tilde{N}_{0k}/\tilde{M}_{0k}$, $r_i = \tilde{N}_i/\tilde{M}_i$. Обозначим через M_{0k} наименьшее общее кратное чисел $\tilde{M}_{0k}, \tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_{n_A}$ и положим $\tau_k = 1/M_{0k}$. При этом $N_k = m\tilde{N}_{0k}M_{0k}/\tilde{M}_{0k} \in \mathbb{N}$ и $M_{ki} = \tilde{N}_i M_{0k}/\tilde{M}_i \in \mathbb{N}$. Тогда $mT_k = N_k \tau_k$ и $r_i = M_{ki} \tau_k$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u'_i = \sum_{j=0}^{n_A} \alpha_{kj} (t + (i-1)\tau_k) \left(\frac{(d_{kji} + 1)u_{i-M_{kj}+d_{kji}N_k}(t)}{\lambda^{d_{kji}}} - \frac{d_{kji}u_{i-M_{kj}+(d_{kji}+1)N_k}(t)}{\lambda^{d_{kji}+1}} \right) \\ (i = 1, \dots, 2N_k, d_{kji} = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M_{kj} + pN_k > 0\}, t \in (0, \tau)). \end{aligned}$$

Обозначим через $S_{k\lambda}$ такую фундаментальную матрицу этой системы, что $S_{k\lambda}(0) = E$. Пусть $e_{k\lambda i}$ — i -я строка матрицы $S_{k\lambda}$. Определим матрицу $Q_k(\lambda)$ по формуле

$$Q_k(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{k\lambda 1}(0) - \frac{2e_{k\lambda N_k}(\tau)}{\lambda} + \frac{e_{k\lambda, 2N_k}(\tau)}{\lambda^2} \\ e_{k\lambda 2}(0) - e_{k\lambda 1}(\tau) \\ \dots \\ e_{k\lambda, 2N_k}(0) - e_{k\lambda, 2N_k-1}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через N_{kq} множество $N_{kq} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \det Q_k(\lambda) = 0\}$.

Из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ выполнено равенство $\dim \mathcal{N}(\mathcal{V}_k - \lambda I)^2 = 2N_k - \text{rank } Q_k(\lambda)$. В частности, $\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\} = N_{kq}$.*

II. Сформулируем некоторое свойство линейных операторов, позволяющее исследовать спектр оператора \mathcal{V} через спектры операторов \mathcal{V}_k .

Пусть B — комплексное банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор в B и $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная точка спектра $\sigma(A)$ конечной алгебраической кратности $m(A, \lambda)$, т. е. собственное значение оператора A . Тогда (см. [9, гл. III, пункт 6.5]) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ резольвента $R(A, \cdot)$ оператора A может быть представлена рядом Лорана

$$R(A, \lambda) = \sum_{j=-r}^{\infty} A_j(\lambda - \lambda_0)^j \quad (0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon),$$

сходящимся по операторной норме, где $r \leq m(A, \lambda_0)$ (другими словами, λ_0 является полюсом резольвенты $R(A, \cdot)$). При этом оператор $P = P(A, \lambda_0) = -A_{-1}$ является проектором, т. е.

$$P^2(A, \lambda_0) = P(A, \lambda_0),$$

$\dim \mathcal{R}(P(A, \lambda_0)) = m(A, \lambda_0)$ и $\mathcal{R}(A_j) \subset \mathcal{R}(P(A, \lambda_0))$ ($j = -r, \dots, -2$).

Точка λ_0 является нормальной точкой оператор-функции $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, если $m(A, \lambda_0) < \infty$ и оператор $A - \lambda_0 I$ является фредгольмовым. Пусть Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий область G . Оператор $A - \lambda I$ называется нормальным относительно контура Γ , если $\Gamma \subset \rho(A)$ и множество $\sigma(A) \cap G$ состоит из конечного числа нормальных точек оператор-функции $A - \lambda I$. Если оператор $A - \lambda I$ является нормальным относительно контура Γ и $\sigma(A) \cap G = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то положим

$$m(A, \Gamma) = \sum_{j=1}^n m(A, \lambda_j).$$

Следующая теорема является частным случаем операторного обобщения теоремы Руше, доказательство которого можно найти в [5].

Теорема 6.1. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытая ограниченная область с границей Γ , где Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая, и задан оператор $A \in \mathcal{L}(B)$. Если оператор-функция $A - \lambda I$ является нормальной относительно границы Γ , и оператор $S \in \mathcal{L}(B)$ таков, что

$$\|R(A, \lambda)S\| < 1 \quad (\lambda \in \Gamma),$$

то оператор-функция $A + S - \lambda I$ является нормальной относительно границы Γ , причем

$$m(A, \Gamma) = m(A + S, \Gamma).$$

III. Опишем спектр $\sigma(\mathcal{V})$ в терминах нулей характеристических функций $q_k(\lambda) = \det Q_k(\lambda)$.

Обозначим через $\Lambda_{\mathcal{V}}$ множество чисел $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K$ имеется $\lambda_k \in (\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\}) \cap B_{\varepsilon}(\lambda)$. В частности, $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{V}}$, если $\lambda \in (\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\})$ для всех $k \geq K$.

Обозначим через Λ_q множество чисел $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K$ имеется $\lambda_k \in N_{kq} \cap B_{\varepsilon}(\lambda)$. В частности, $\lambda \in \Lambda_q$, если $\lambda \in N_{kq}$ для всех $k \geq K$.

Для каждого $\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ обозначим через ε_{λ} число, для которого $(\sigma(\mathcal{V}) \cup \{0\}) \cap \overline{B_{\varepsilon_{\lambda}}(\lambda)} = \{\lambda\}$. Оператор \mathcal{V} является компактным, поэтому для каждого $\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ такое число ε_{λ} существует. Положим $N_{k\lambda\varepsilon} = N_{kq} \cap B_{\varepsilon}(\lambda)$.

Теорема 6.2. Пусть $\tilde{x} \in C_T$ — решение уравнения (1.1). Тогда $\sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\} = \Lambda_q$ и для любых значений $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ существует такое $K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $k > K_0$ мы имеем

$$m(\mathcal{V}, \lambda_0) = \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon}} m(\mathcal{V}_k, \lambda). \quad (6.1)$$

Доказательство. 1. Сначала мы докажем, что выполнено равенство (6.1). Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$. По определению ε_{λ} имеем $\sigma(\mathcal{V}) \cap \overline{B_{\varepsilon_{\lambda_0}}(\lambda_0)} = \{\lambda_0\}$, где λ_0 — изолированное собственное значение оператора \mathcal{V} (\mathcal{V} — компактный оператор). С другой стороны, из компактности оператора \mathcal{V} благодаря теореме 13.2 из [10] следует, что оператор $\mathcal{V} - \lambda I$ фредгольмов для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (в частности,

для всех $\lambda \in B_{\varepsilon_{\lambda_0}}(\lambda_0)$). По определению ε_λ имеем $\sigma(\mathcal{V}) \cap \overline{B_{\varepsilon_{\lambda_0}}(\lambda_0)} = \{\lambda_0\}$. Следовательно, оператор $\mathcal{V} - \lambda I$ является нормальным относительно границы $\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\lambda_0}$.

Из существования резольвенты $R(\mathcal{V}, \lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ и ее непрерывности по λ на $\Gamma_\varepsilon(\lambda_0)$ вытекает, что

$$\sup_{\lambda \in \Gamma_\varepsilon(\lambda_0)} \|R(\mathcal{V}, \lambda)\| = c_1 < \infty,$$

где $c_1 = c_1(\lambda_0, \varepsilon) > 0$.

Из теоремы 3.1 следует, что $\mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}$ по операторной норме при $k \rightarrow \infty$. Поэтому существует $K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| < (2c_1)^{-1}$ для $k \geq K_0$. Тогда выполнено неравенство

$$\|R(\mathcal{V}, \lambda)(\mathcal{V}_k - \mathcal{V})\| < 1/2 \quad (\lambda \in \Gamma_\varepsilon(\lambda_0)).$$

Используя это неравенство, из теоремы 6.1 мы получим

$$m(\mathcal{V}, \lambda_0) = m(\mathcal{V}, \Gamma_\varepsilon(\lambda_0)) = m(\mathcal{V}_k, \Gamma_\varepsilon(\lambda_0)) = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{V}_k) \cap B_\varepsilon(\lambda_0)} m(\mathcal{V}_k, \lambda).$$

Суммирование производится по всем собственным значениям λ оператора \mathcal{V}_k из круга $B_\varepsilon(\lambda_0)$. По лемме 6.1 имеем $N_{k\lambda_0\varepsilon} = \sigma(\mathcal{V}_k) \cap B_\varepsilon(\lambda_0)$.

2. Теперь мы докажем, что $\sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\} = \Lambda_q$. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$. Тогда из формулы (6.1) получаем, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ существует такое $K = K(\lambda_0, \varepsilon)$, что при всех натуральных числах $k > K$ выполнено $N_{k\lambda_0\varepsilon} \neq \emptyset$. Таким образом, $\sigma(\mathcal{V}) \setminus \{0\} \subset \Lambda_q$.

Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_q$. Тогда по лемме 6.1 $\lambda_0 \in \Lambda_\nu$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K = K(\lambda_0, \varepsilon)$, что

$$\text{для любого } k \geq K \text{ существует } \lambda_k \in (\sigma(\mathcal{V}_k) \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon(\lambda_0). \quad (6.2)$$

Из теоремы 3.1 следует, что $\mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}$ при $k \rightarrow \infty$. Предположим, что $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{V})$. Тогда в формуле (6.2) можно выбрать такие ε и $k > K = K(\lambda_0, \varepsilon)$, что

$$B_\varepsilon(\lambda_0) \subset \rho(\mathcal{V}), \quad \varepsilon + \|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}\| \leq \frac{1}{2 \|R(\mathcal{V}, \lambda_0)\|}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{V}_k - \lambda I = \mathcal{V} - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I + \mathcal{V}_k - \mathcal{V} = (\mathcal{V} - \lambda_0 I) (I + R(\mathcal{V}, \lambda_0)((\lambda_0 - \lambda)I + (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}))).$$

Тогда для любого $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$ оператор $\mathcal{V}_k - \lambda I$ имеет ограниченный обратный

$$R(\mathcal{V}_k, \lambda) = (I + R(\mathcal{V}, \lambda_0) ((\lambda_0 - \lambda)I + (\mathcal{V}_k - \mathcal{V})))^{-1} R(\mathcal{V}, \lambda_0).$$

Это противоречит формуле (6.2). Значит, наше предположение было неверно, т. е. $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V})$. \square

IV. Теперь мы исследуем условия простоты собственного значения $\lambda_0 \neq 0$ оператора \mathcal{V} .

Теорема 6.3. *Если для некоторого $0 \neq \lambda_0 \in \mathbb{C}$ имеет место включение*

$$\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{V}) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{V}_k) \right), \quad (6.3)$$

то собственное значение λ_0 оператора \mathcal{V} является простым тогда и только тогда, когда существуют такие числа $0 < \varepsilon^ \in \mathbb{R}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K_1$ выполнены условия $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$ и $\text{rank } Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$.*

Доказательство. Пусть существуют такие числа $0 < \varepsilon^* \in \mathbb{R}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K_1$ выполнены условия $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$ и $\text{rank } Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$. В силу леммы 6.1 равенство $\text{rank } Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$ эквивалентно требованию $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1$. Поэтому из равенства (6.1) и предположения $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$ следует, что при достаточно больших значениях $k > K_1$ выполнено

$$m(\mathcal{V}, \lambda_0) = \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon^*}} m(\mathcal{V}_k, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon^*}} m(\mathcal{V}_k, \lambda) = m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1,$$

где $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_{\lambda_0}, \varepsilon^*\})$. Из предположения (6.3) получаем, что $m(\mathcal{V}, \lambda_0) \geq 1$. Следовательно, собственное значение λ_0 оператора \mathcal{V} является простым.

2. Предположим теперь, что собственное значение λ_0 оператора \mathcal{V} — простое. Из предположения (6.3) следует, что $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) \geq 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из формулы (6.1) вытекает, что

$$1 = m(\mathcal{V}, \lambda_0) = m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) + \sum_{\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon} \setminus \{\lambda_0\}} m(\mathcal{V}_k, \lambda)$$

при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $k > K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon)$. По лемме 6.1 имеем $m(\mathcal{V}_k, \lambda) \geq 1$ при $\lambda \in N_{k\lambda_0\varepsilon}$. Поэтому при любых значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $k > K_0 = K_0(\lambda_0, \varepsilon)$ имеем $m(\mathcal{V}_k, \lambda_0) = 1$ и $N_{k\lambda_0\varepsilon} = \{\lambda_0\}$. Тогда по лемме 6.1 получаем, что $\text{rank } Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$. \square

V. Наконец, мы сформулируем критерий гиперболичности периодического решения с иррациональным периодом.

Теорема 6.4. *Периодическое решение $\tilde{x} \in C_T$ уравнения (1.1) с иррациональным периодом T является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и существуют такие числа $\varepsilon^* > 0$ и $K_1 = K_1(\varepsilon^*) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K_1$ выполнены условия $N_{k1\varepsilon^*} = \{1\}$ и $\text{rank } Q_k(1) = 2N_k - 1$.*

Доказательство. 1. Благодаря лемме 3.2 свойство гиперболичности эквивалентно следующим требованиям: $\sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и $m(\mathcal{M}_G, 1) = 1$.

Покажем, что в последнем предложении можно заменить \mathcal{M}_G на \mathcal{V} . Если $T > r$, то это очевидно (так как $\mathcal{V} = \mathcal{M}_G$). Допустим, что $T < r$, т. е. $\mathcal{V} = \mathcal{M}_G^m$ ($1 < m \in \mathbb{N}$). Тогда по теореме 11 из [6, гл. VII, раздел 3] имеем

$$\sigma(\mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{M}_G^m) = (\sigma(\mathcal{M}_G))^m. \quad (6.4)$$

Пусть $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{\lambda_i, i = 1, \dots, i^*\}$ ($i^* < \infty$, поскольку спектр компактного оператора может иметь точку накопления только в нуле). Для каждого $i \in \{1, \dots, i^*\}$ обозначим через $\{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ij_i}\}$ множество всех различных чисел $\lambda \in \sigma(\mathcal{M}_G)$, для которых $\lambda^m = \lambda_i$. Используя компактность оператора \mathcal{M}_G^m , по теореме 6 из [6, гл. VII, раздел 4] получаем, что $j_i < \infty$ и $P(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}) < \infty$. Благодаря теореме 19 из [6, гл. VII, раздел 3] имеем

$$P(\mathcal{V}, \lambda_i) = P(\mathcal{M}_G^m, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{j_i} P(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}). \quad (6.5)$$

Поскольку $P(\mathcal{M}_G, \lambda)P(\mathcal{M}_G, \mu) = 0$ для любых двух изолированных собственных значений $\lambda \neq \mu$, по формуле (6.5) мы имеем

$$m(\mathcal{V}, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{j_i} m(\mathcal{M}_G, \lambda_{ij}).$$

Из формулы 6.4 следует, что $\sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0) = \{\lambda_{ij}, j = 1, \dots, j_i, i = 1, \dots, i^*\}$. Следовательно,

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0)} m(\mathcal{V}, \lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{M}_G) \cap \Gamma_1(0)} m(\mathcal{M}_G, \lambda), \quad (6.6)$$

т. е. операторы \mathcal{M}_G и \mathcal{V} имеют на единичной окружности одинаковое количество собственных значений с учетом алгебраической кратности. Поскольку $1 = \lambda \in \sigma(\mathcal{M}_G) \cap \sigma(\mathcal{V})$, то свойство гиперболичности эквивалентно следующим требованиям: $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$ и $m(\mathcal{V}) = 1$.

2. Пусть $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$. Тогда по теореме 6.2 получаем $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$. При этом, поскольку существуют такие числа $\varepsilon^* > 0$ и $K_1 = K_1(\varepsilon^*) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K_1$ выполнены условия $N_{k1\varepsilon^*} = \{1\}$ и $\text{rank } Q_k(1) = 2N_k - 1$, из теоремы 6.3 следует, что собственное значение $\lambda_0 = 1$ — простое (условие (6.3) выполнено, т. к. $\lambda_0 = 1$ является собственным значением всех операторов \mathcal{V} и \mathcal{V}_k , см. замечание 3.2).

Докажем обратное утверждение. Пусть $\sigma(\mathcal{V}) \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$, $m(\mathcal{V}, 1) = 1$. Тогда по теореме 6.2 получаем $\Lambda_q \cap \Gamma_1(0) = \{1\}$; по теореме 6.3 для $\lambda_0 = 1$ существуют числа $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_{\lambda_0})$ и $K_1 = K_1(\lambda_0, \varepsilon^*) \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $k \geq K_1$ выполнены условия $N_{k\lambda_0\varepsilon^*} = \{\lambda_0\}$ и $\text{rank } Q_k(\lambda_0) = 2N_k - 1$. \square

Автор выражает благодарность проф. А. Л. Скубачевскому за внимание, поддержку и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. О спектре оператора монодромии для медленно осциллирующих периодических решений функционально-дифференциальных уравнений// Докл. АН. — 2002. — 384, № 4. — С. 442–445.
2. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений// Тр. ММО. — 2003. — 64. — С. 3–53.
3. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. О гиперболичности быстро осциллирующих периодических решений функционально-дифференциальных уравнений// Функциональный анализ и его прилож. — 2005. — 39, вып. 1. — С. 82–85.
4. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. О гиперболичности решений с иррациональными периодами некоторых функционально-дифференциальных уравнений// Докл. АН. — 2005. — 402, № 2. — С. 151–154.
5. Гохберг И. Ц., Сигал Е. И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше// Мат. сборник. — 1971. — 84, № 4. — С. 607–629.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Часть 1: Общая теория. — М.: УРСС, 2004.
7. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
8. Журавлев Н. Б., Скубачевский А. Л. О гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2007. — 256. — В печати.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
11. Arino O., Chérif A. More on ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — 180, № 2. — С. 361–385.
12. Chow S. N., Diekmann O., Mallet-Paret J. Stability, multiplicity and global continuation of symmetric periodic solutions of a nonlinear Volterra integral equation// Japan J. Indust. Appl. Math. — 1985. — 2. — С. 433–469.
13. Chow S. N., Walther H.-O. Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g(x(t-1))$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. — 307, № 1. — С. 127–142.
14. Diekmann O., van Gils S., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O. Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. — New York: Springer-Verlag, 1995.
15. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer, 1993.
16. Kaplan J. L., Yorke J. A. Ordinary differential equations which yield periodic solutions of delay differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1974. — 48, № 1. — С. 317–324.
17. Mallet-Paret J., Sell G. Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions// J. Dynam. Differential Equations. — 1996. — 125. — С. 385–440.
18. Skubachevskii A. L., Walther H.-O. On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations// J. Dynam. Differential Equations. — 2006. — 18, № 2. — С. 257–355.
19. Walther H.-O. Hyperbolic periodic solutions, heteroclinic connections and transversal homoclinic points in autonomous differential delay equations// Mem. Amer. Math. Soc. — 1989. — 79, № 402.
20. Xie X. Uniqueness and stability of slowly oscillating periodic solutions of delay equations with unbounded nonlinearity// J. Differential Equations. — 1993. — 103. — С. 350–374.
21. Zhuravlev N. B. On the spectrum of the monodromy operator for slowly oscillating periodic solutions of functional differential equations with several delays// Funct. Differ. Equ. — 2006. — 13, № 2. — С. 323–344.

Николай Борисович Журавлев

Российский университет дружбы народов

Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики

E-mail: kolya090380@yandex.ru