I. V. Andrianov, A new asymptotic method for computing reinforced constructions taking into account the discreteness of the distributed rods and their widths, *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 352, Number 4, 474–476

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 4, с. 474–476

МЕХАНИКА

УДК 531.39

НОВЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УЧЕТЕ ДИСКРЕТНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕБЕР И ИХ ШИРИНЫ

© 1997 г. И. В. Андрианов

Представлено академиком И. Ф. Образцовым 20.11.95 г.

Поступило 24.11.95 г.

Расчет подкрепленных конструкций при учете реального (дискретного) характера размещения ребер – проблема, имеющая достаточно длительную историю [1, 2]. При большом числе ребер естественным является переход к схеме конструктивной ортотропии. Как было показано в ряде работ [2], подобная упрощенная инженерная схема совпадает с первым приближением метода осреднения дифференциальных уравнений с быстропеременными коэффициентами [2–4]. При этом, как правило, используются методы интегрирования дифференциальных уравнений с быстропеременными правыми частями и граничными условиями [2] или многих масштабов [3, 4]. Основным недостатком подобных подходов являются необходимость решения задачи на ячейке, что в случае подкрепления перекрестной системой ребер приводит к существенно двумерной задаче, а также громоздкость выкладок, усложняющая построение высших приближений. Кроме того, основные результаты в этом направлении получены для случая, когда ребра считаются одномерными. Значительно сложнее обстоит дело с аналитическим учетом ширины ребер. В то же время сейчас в асимптотологии успешно развивается подход, основанный на асимптотическом разложении обобщенных функций [5–8]. Ниже показано, что эта техника может быть с успехом использована для исследования подкрепленных конструкций с учетом дискретного размещения ребер, а также их ширины.

1. В качестве модельной задачи рассматривается изгибная деформация бесконечной пластинки, подкрепленной периодическими системами ребер в двух главных направлениях и лежащей на упругом основании. Исходное дифференциальное уравнение в частных производных может быть в этом случае записано в следующем виде:

$$D\Delta\Delta w + cw + D_1F_1(x)w_{xxxx} + \\ + D_2F_2(y)w_{yyyy} = q(x, y). \qquad (1)$$

Здесь

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[H(x+nl_1) - H(x+nl_1+a)],$$

$$F_2(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[H(y+nl_2) - H(y+nl_2+b)];$$

D – цилиндрическая жесткость; Δ – оператор Лапласа; c – жесткость основания; $H(x)$ – функция Хевисайда; l_1, l_2 – расстояния между ребрами; a, b – их толщины.

Считая параметры a, b малыми (т.е. ребра тонкими), разложим функции $F_1(x)$, $F_2(y)$ в ряды по этим малым параметрам. Покажем это разложение на примере функции $f(x) = H(x) - H(x + a)$. Применяя к функции $f(x)$ преобразование Лапласа, имеем после разложения экспоненты в ряд Маклорена по a

$$\bar{f}(p) = a + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{n+1}p^n/(n+1)!$$

Здесь $\bar{f}(p)$ – изображение функции $f(x)$; p – параметр преобразования Лапласа.

Переход к оригиналу, обоснованный в рамках теории обобщенных функций [6], дает разложение

$$\bar{f}(p) = a\delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{n+1}\delta^{(n)}(x)/(n+1)!$$

Здесь $\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)$ – дельта-функция Дирака и ее n-я производная.

Аналогично могут быть разложены функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$. В результате исходное уравнение

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, Украина

равновесия (1) переписывается в виде

$$D\Delta\Delta w + cw + D_1\Phi_1(x)w_{xxxx} + \\ + D_2\Phi_2(y)w_{yyyy} = q(x, y), \quad (2)$$

где

$$\Phi_1(x) = \Phi_{10}(x) + \Phi_{11}(x) + \Phi_{12}(x) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\delta(x + nl_1) - 0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2\delta'(x + nl_1) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k a^{k+1}\delta^{(n)}(x + nl_1);$$

$$\Phi_2(y) = \Phi_{20}(y) + \Phi_{21}(y) + \Phi_{22}(y) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\delta(y + nl_2) - 0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2\delta'(y + nl_2) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k a^{k+1}\delta^{(n)}(y + nl_2).$$

Решение уравнения (2) можно искать в виде следующего асимптотического разложения по малым параметрам a, b:

$$w = w_0 + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a^i b^i w_{ij}.$$

В результате в нулевом приближении получаем конструкцию с одномерными ребрами

$$D\Delta\Delta w_0 + cw_0 + D_1\Phi_{10}(x)w_{0xxxx} + \\ + D_2\Phi_{20}(y)w_{0yyyy} = q(x, y). \quad (3)$$

Учет ширины ребер легко осуществляется в следующих приближениях, так как левые части соответствующих дифференциальных уравнений для всех приближений одни и те же, и для построения соответствующих функций Грина, обеспечивающих их единообразное решение, могут быть использованы известные методы [1–3].

В частности, в первом приближении имеем (в предположении, что малые параметры a и b имеют один и тот же порядок)

$$D\Delta\Delta w_1 + cw_1 + D_1\Phi_{11}(x)w_{1xxxx} + \\ + D_2\Phi_{21}(y)w_{1yyyy} = 0.$$

Здесь $w_1 = w_{01} + w_{10}$.

Построение рекуррентной системы уравнений последующих приближений тривиально.

2. Перейдем теперь к решению дифференциального уравнения (3).

Разложим сначала функции $\Phi_{10}(x)$, $\Phi_{20}(y)$ в ряд Фурье (подобное разложение обосновано в рамках теории обобщенных функций [7]):

$$\Phi_{10}(x) = \frac{1}{l_1} + \frac{2}{l_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos 2k\pi x/l_1, \\ \Phi_{20}(y) = \frac{1}{l_2} + \frac{2}{l_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos 2k\pi x/l_2. \quad (4)$$

Оставляя в разложениях (4) только постоянные составляющие, приходим к соотношениям конструктивно-ортотропной теории

$$D\Delta\Delta w_{00} + cw_{00} + (D_1 a/l_1)w_{00xxxx} + \\ + (D_2 b/l_2)w_{00yyyy} = q(x, y). \quad (5)$$

Пусть характерные периоды изменения внешней нагрузки $q(x, y)$ L_1, L_2 (причем L_1 и L_2 имеют один и тот же порядок) существенно превосходят расстояния между ребрами ($l_1/L_1 = \varepsilon \ll 1$). Тогда переменные части выражений (4) можно разложить в ряд по малому параметру ε. Для этого рассмотрим сначала функцию $\varphi(\xi) = \cos 2k\pi\xi\varepsilon^{-1}$ ($\xi = x/L_1$) на периоде $-0.5\varepsilon \le \xi \le 0.5\varepsilon$. Применив к ней двустороннее преобразование Лапласа, получаем

$$\bar{\varphi}(p) = 4\exp((-p\varepsilon))\varepsilon^2 p(\pi k)^{-2}/[1 + (p\varepsilon/\pi k)^2], \\ k = 2n + 1; \\ \bar{\varphi}(p) = 0, \quad k = 2n,$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

Разложив далее функцию от p в степенной ряд

$$\bar{\varphi}(p) = 4\varepsilon^2 p(\pi k)^{-2} - 4\varepsilon^3 p^2(\pi k)^{-2} + \ldots$$

и переходя почленно к оригиналам (обоснование этой операции см. [8]), имеем

$$\varphi(\xi) = 0, \quad k = 2n, \\ \varphi(\xi) = 4\varepsilon^2(\pi k)^{-2}[\delta'(\xi) + \varepsilon\delta''(\xi) + \ldots]. \quad (6)$$

Учитывая периодичность функций $\Phi_{10}(x)$ и $\Phi_{20}(y)$, запишем

$$\Phi_{10}(x) = \frac{1}{l_1} + \frac{2}{l_1}\left[0.5\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\delta'(x + nl_1) + \right. \\ \left. + 0.5\varepsilon^3\sum_{n=1}^{\infty}\delta''(x + nl_1) + \ldots\right]; \quad (7)$$

$$\Phi_{20}(y) = \frac{1}{l_2} + \frac{2}{l_2}\left[0.5 l^2\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\delta'(y + nl_2) + \right.$$

$$+0.5\varepsilon^3 l^3 \sum_{n=1}^{\infty} \delta''(y+nl_2)+\ldots\Bigg], \tag{8}$$

где

$$l = L_2/L_1.$$

Решение уравнения (2) можно представить в виде разложения

$$w_0 = w_{00}+\varepsilon^2 w_{001}+\varepsilon^3 w_{001}+\ldots \tag{9}$$

Подставляя далее разложения (7)–(9) в уравнение (2) и производя расщепление по ε, получим рекуррентную систему уравнений

$$D\Delta\Delta w_{001}+cw_{001}+\frac{D_1 a}{l_1}w_{001xxxx}+\frac{D_2 b}{l_2}w_{001yyyy} =$$

$$= -\frac{2}{l_1}0.5\varepsilon^2\sum_{n=1}\delta'(x+nl_1)-\frac{2}{l_2}0.5l^2\varepsilon^2\sum_{n=1}\delta'(y+nl_2), \tag{10}$$

$$D\Delta\Delta w_{002}+cw_{002}+\frac{D_1 a}{l_1}w_{002xxxx}+\frac{D_2 b}{l_2}w_{002yyyy} =$$

$$= -\frac{2}{l_1}0.5\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\delta''(x+nl_1)-\frac{2}{l_2}0.5l^2\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\delta''(y+nl_2), \tag{11}$$

$$\ldots$$

Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами (10), (11), … не представляет труда и особенно просто может быть выполнено после построения соответствующей функции Грина однородного уравнения (5).

Итак, предложенная методика позволяет получать аналитическое решение задачи о расчете перекрестно подкрепленных конструкций с учетом дискретного размещения ребер и их толщины в любом приближении, что выгодно отличает ее от известных модификаций метода осреднения. Метод допускает естественное обобщение на подкрепленные пластины и оболочки более сложного вида, динамические и нелинейные задачи, а также периодически неоднородные конструкции, описываемые дифференциальными уравнениями с периодически разрывными коэффициентами (складчатые, многоопорные пластины и оболочки, пластины и оболочки с периодическими шарнирами, большим числом присоединенных масс и т.д. [2, 9–13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 368 с.
2. *Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 224 с.
3. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 252 с.
4. *Победря Б.Е.* Механика композитных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
5. *Андрианов И.В.* // ДАН. 1993. Т. 328. № 5. С. 557–558.
6. *Андрианов И.В.* // ПММ. 1993. Т. 57. № 5. С. 181–184.
7. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с.
8. *Земанян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 399 с.
9. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* // ДАН. 1979. Т. 249. № 5. С. 1036–1040.
10. *Estrada R.P., Kanwal R.P.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 1990. V. 428. P. 399–430.
11. *Estrada R.P., Kanwal R.P.* Asymptotic Analysis: A Distributional Approach. B.: Birchauser, 1993. 258 p.
12. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* // Успехи механики. 1983. Т. 6. № 3/4. С. 3–29.
13. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.